



В. А. ЕГОРОВ  
Л. И. ГУСЕВ

**ДИНАМИКА  
ПЕРЕЛЕТОВ  
МЕЖДУ ЗЕМЛЕЙ  
И ЛУНОЙ**











# **МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА**

МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

В. А. ЕГОРОВ, Л. И. ГУСЕВ

**ДИНАМИКА  
ПЕРЕЛЕТОВ  
МЕЖДУ ЗЕМЛЕЙ  
И ЛУНОЙ**



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

39.61

Е 30

УДК 629.78

Динамика перелетов между Землей и Луной. Егоров В. А., Гусев Л. И.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.— 544 с.

В книге систематизированно излагается динамика полета между Землей и Луной космических аппаратов с двигателями «большой» тяги (например, химическими). Сначала для ограниченной круговой проблемы трех точек, в которой одна притягивающая масса существенно меньше другой, развивается приближенный метод точечной сферы действия. Далее этим и более точными методами рассматриваются три траекторных задачи: достижения Луны, возвращения от Луны к Земле и облета Луны. Вычисляются (на ЭВМ) затраты характеристической скорости, необходимые для перелетов между круговыми орбитами ИСЗ и ИСЛ по траекториям с двумя активными участками. Решения задач и результаты массовых траекторных расчетов представлены в обозримом виде, пригодном для практического использования.

Табл. 10, илл. 171, библи.

Е 34902 — 143 168-80. 3607000000  
053(02)-80

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1980.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	11
Введение . . . . .	15
§ В.1. Об энергетическом подходе и методе игнорирования возмущений . . . . .	15
§ В.2. Метод точечной сферы действия . . . . .	18
§ В.3. О литературе по методу точечной сферы действия . . . . .	20
§ В.4. О методе скоростных многообразий . . . . .	21
§ В.5. Замечание о методе долготной привязки . . . . .	23
§ В.6. О некоторых методах теории возмущений . . . . .	23
§ В.7. О задачах минимизации характеристической скорости перелетов . . . . .	25
§ В.8. Краткий хронологический обзор литературы по динамике полета между Землей и Луной . . . . .	26

## РАЗДЕЛ I

### ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ТРАЕКТОРИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ПРОБЛЕМЕ ТРЕХ ТОЧЕК

Глава 1. Основные траекторные задачи и уравнения движения . . . . .	35
§ 1.1. Краткая характеристика основных траекторных задач . . . . .	35
§ 1.2. Требования к траекториям в связи с задачами полета . . . . .	40
§ 1.3. Основные силы, действующие на КА . . . . .	42
§ 1.4. Уравнения движения . . . . .	45
Глава 2. Методы точного расчета траекторий . . . . .	49
§ 2.1. О решении задачи Коши для уравнений движения . . . . .	49
§ 2.2. Метод многих конических сечений . . . . .	53
§ 2.3. Численное решение краевых задач . . . . .	57
Глава 3. Необходимые минимальные скорости и невозможность захвата в ограниченной круговой задаче трех точек . . . . .	61
§ 3.1. Теоретическое решение вопроса о минимальных начальных скоростях . . . . .	61

§ 3.2. Траектории с минимальной геоцентрической начальной скоростью . . . . .	68
§ 3.3. Невозможность захвата КА меньшей из притягивающих масс при достаточно малом отношении этих масс . . . . .	73
§ 3.4. Замечания . . . . .	82
<b>Глава 4. Приближенное исследование траекторий сближения в ограниченной круговой задаче трех точек . . .</b>	<b>86</b>
§ 4.1. Применение метода игнорирования возмущений к траекториям сближения . . . . .	86
§ 4.2. Анализ скоростных многообразий и переход к методу точечной сферы действия . . . . .	93
§ 4.3. Анализ множества траекторий сближения методом точечной сферы действия . . . . .	106
§ 4.4. Метод скоростных многообразий . . . . .	111
§ 4.5. Анализ линий постоянства наклонения, энергии, кинетического момента и радиуса перицентра траекторий возвращения . . . . .	121
<b>Глава 5. Условие сопряжимости движений к сфере действия и от сферы действия в ограниченной круговой задаче трех точек . . . . .</b>	<b>129</b>
§ 5.1. Критерий сопряжимости и динамический смысл условия сопряжимости Тиссерана . . . . .	129
§ 5.2. Расчет сопряжения движений методом точечной сферы действия . . . . .	133
§ 5.3. Сопряжение движений методом игнорирования возмущений и точное сопряжение . . . . .	137
§ 5.4. Примеры приближенного и точного анализа некоторых характеристик траекторий перелета между Землей и Луной . . . . .	142
<b>Глава 6. Плоские задачи лунных перелетов . . . . .</b>	<b>154</b>
§ 6.1. Попадание в Луну . . . . .	154
§ 6.2. Облет Луны с возвращением к Земле . . . . .	162
§ 6.3. Облет Луны с последующим пологим входом в атмосферу Земли . . . . .	169
§ 6.4. Задача о разгоне или торможении КА с помощью Луны . . . . .	171

## РАЗДЕЛ II

### ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ ЛУНЫ

<b>Глава 7. Достижение Луны при старте с больших широт . . .</b>	<b>175</b>
§ 7.1. Особенности попадания в Луну с больших широт . . . . .	176
§ 7.2. Характеристики траекторий попадания в Луну с заданной широты . . . . .	187
§ 7.3. Учет протяженности активного участка . . . . .	195

Глава 8. Энергетически оптимальные траектории достижения Луны с земной поверхности . . . . .	204
§ 8.1. Определение энергетических затрат, необходимых для реализации заданных начальных данных . . . . .	204
§ 8.2. Характеристики попадающих в Луну траекторий с фиксированным наклоном плоскости траектории к экватору . . . . .	207
§ 8.3. Определение оптимальных начальных данных при фиксированном наклоне плоскости траектории к экватору . . . . .	211
§ 8.4. Выбор энергетически оптимального наклона для траекторий северного типа . . . . .	215
§ 8.5. Выбор энергетически оптимального наклона для траекторий южного типа . . . . .	221
Глава 9. Номинальные траектории достижения Луны с поверхности Земли и анализ влияния разброса начальных данных . . . . .	227
§ 9.1. Приближенный расчет номинальной траектории на основе долготной привязки ее концов . . . . .	227
§ 9.2. Решение задачи о точке встречи КА с Луной при фиксированном угле начальной скорости с трансверсалью . . . . .	230
§ 9.3. Выбор номинальной траектории с учетом прямой видимости встречи с Луной из заданного пункта . . . . .	234
§ 9.4. Расчет номинальной траектории попадания в Луну методом игнорирования возмущений . . . . .	240
§ 9.5. Расчет варьированных траекторий методом игнорирования возмущений . . . . .	248
§ 9.6. Влияние разброса начальных данных на точки входа в сферу действия Луны . . . . .	253
§ 9.7. Влияние разброса начальных данных на точки падения . . . . .	259
Глава 10. Учет влияния второстепенных факторов . . . . .	269
§ 10.1. Анализ влияния Луны как материального тела . . . . .	269
§ 10.2. Влияние эллиптичности орбиты Луны . . . . .	273
§ 10.3. Влияние сжатия Земли . . . . .	275
§ 10.4. Влияние Солнца . . . . .	280
Глава 11. Траектории полета к Луне с орбиты спутника Земли . . . . .	286
§ 11.1. Особенности расчета запуска КА к Луне с орбиты ИСЗ . . . . .	286
§ 11.2. Расчет начального приближения методом долготной привязки и пример расчета попадания в заданную точку картинной плоскости у Луны . . . . .	293
§ 11.3. Расчет траектории попадания в заданную точку лунной поверхности . . . . .	297

§ 11.4. Расчет траекторий перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ	301
§ 11.5. Приближенное вычисление характеристических скоростей перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ с учетом эллиптичности лунной орбиты	308
Глава 12. Посадка на поверхность Луны	320
§ 12.1. Вертикальная посадка непосредственно с траектории Земля — Луна	321
§ 12.2. Выбор номинального направления тяги с учетом непертикальности приближения к поверхности Луны	326
§ 12.3. Посадка на лунную поверхность с орбиты ИСЛ	329
 РАЗДЕЛ III	
ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ	
Глава 13. Номинальные траектории возвращения от Луны к Земле	334
§ 13.1. Общая характеристика множества траекторий возвращения	336
§ 13.2. Номинальные траектории возвращения различных видов	341
Глава 14. Оптимизация одноимпульсного перехода с орбиты спутника на гиперболу с заданной скоростью «на бесконечности»	350
§ 14.1. Постановка задачи оптимизации одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую	350
§ 14.2. Построение результирующего скоростного многообразия	354
§ 14.3. Зависимость переходного импульса от положения спутника на орбите и поворота орбиты в ее плоскости	357
§ 14.4. Оптимизация поворота спутниковой орбиты в ее плоскости при переходе на гиперболу	360
§ 14.5. Оптимизация положения спутника на орбите	362
Глава 15. Алгоритмы расчета, общие для задач возвращения с поверхности Луны и с орбиты ИСЛ	368
§ 15.1. Характеристика заданных в конце движения условий и постановка краевой задачи	368
§ 15.2. Связь геоцентрической энергии со временем полета	372
§ 15.3. Вычисление вектора скорости по заданным значениям энергии, высоты перигея, наклонения и радиуса-вектора	374
§ 15.4. Начальное приближение для скорости «на бесконечности»	375
§ 15.5. Расчет перигейных параметров	378



Глава 16. Частные алгоритмы в различных задачах возвращения от Луны к Земле . . . . .	379
§ 16.1. Решение внутренней задачи в импульсной постановке . . . . .	379
§ 16.2. Решение внутренней задачи в точной постановке . . . . .	381
§ 16.3. Стыковка внешней и внутренней задач путем итераций . . . . .	383
§ 16.4. Два возможных метода вычисления начального приближения для траектории возвращения . . . . .	385
Глава 17. Стандартные краевые задачи расчета траекторий возвращения . . . . .	388
§ 17.1. Две методические краевые задачи . . . . .	389
§ 17.2. Проектная задача расчета возвращения при свободной долготе восходящего узла орбиты ИСЛ . . . . .	392
§ 17.3. Краевая задача возвращения с заданной орбиты ИСЛ . . . . .	394
§ 17.4. Краевая задача возвращения с поверхности Луны . . . . .	397
Глава 18. Влияние разброса начальных данных на траектории возвращения . . . . .	401
§ 18.1. Предварительная оценка точности начальных данных, необходимой для возвращения . . . . .	402
§ 18.2. Анализ отклоненных траекторий возвращения с поверхности Луны . . . . .	404
§ 18.3. Расчет и анализ отклоненных траекторий возвращения с орбиты ИСЛ к Земле . . . . .	414

## РАЗДЕЛ IV

### ТРАЕКТОРИИ ОБЛЕТА ЛУНЫ

Глава 19. Общий количественный анализ траекторий облета Луны . . . . .	421
§ 19.1. Постановка задачи облета Луны с различными целями . . . . .	422
§ 19.2. Эволюция пучка начинающихся у Земли облетных траекторий с изменением энергии . . . . .	425
§ 19.3. Анализ влияния невыполнения предположений метода ТСД . . . . .	433
§ 19.4. Сравнение результатов анализа траекторий сближения с Луной методами ТСД и ИВ . . . . .	437
§ 19.5. Анализ некоторых общих свойств пучка облетных траекторий методом ТСД . . . . .	452
§ 19.6. Энергетические особенности облетных траекторий . . . . .	455
Глава 20. Приближенный анализ траекторий облета Луны с возвращением к Земле . . . . .	461
§ 20.1. Траектории облета с возвращением к Земле в целом . . . . .	461

§ 20.2. Траектории облета Луны с заданными наклоном и радиусом перигея возвращения . . . . .	468
§ 20.3. Приближенный расчет параметров траектории облета Луны (с возвращением) за заданное время . . . . .	472
Глава 21. Точный расчет траекторий облета Луны с возвращением к Земле . . . . .	476
§ 21.1. Применение критерия сопряжимости к точному расчету облетных траекторий . . . . .	476
§ 21.2. Постановки краевых задач точного расчета траекторий облета . . . . .	480
§ 21.3. Определение начальных приближений при решении задач облета Луны в точной постановке . . . . .	483
Глава 22. Использование сближения с Луной для облегчения маневров различного назначения . . . . .	486
§ 22.1. Использование сближения с Луной с целью разгона КА без затрат топлива . . . . .	486
§ 22.2. Использование сближения с Луной для запуска стационарного ИСЗ . . . . .	494
§ 22.3. Приближенный анализ геоцентрических орбит, получающихся после облета Луны . . . . .	499
Приложения . . . . .	
Приложение 1. Об определении наклона в диапазоне $(-180^\circ, +180^\circ)$ и оси пучка (перигейного радиуса) . . . . .	507
Приложение 2. Пересчет угловых элементов от плоскости лунной орбиты к плоскости экватора и обратный пересчет . . . . .	509
Приложение 3. Зависимость угловых элементов траектории от долготы ее узла в плоскости лунной орбиты при постоянном наклоне к экватору Земли . . . . .	511
Приложение 4. Пересчет географических параметров движения КА в параметры, отнесенные к плоскости лунной орбиты . . . . .	515
Приложение 5. Теорема . . . . .	517
Приложение 6. Точный расчет пассивных траекторий перелета между Землей и Луной (задача Коши) . . . . .	518
Приложение 7. Переход от кеплеровых элементов орбиты к декартовым координатам (ЭДК) . . . . .	519
Приложение 8. Переход от декартовых координат к кеплеровым элементам орбиты (ДКЭ) . . . . .	520
Приложение 9. Расчет параметров движения относительно поверхности Земли (Луны) . . . . .	521
Приложение 10. Погрешность расчета скорости методом игнорирования возмущений . . . . .	522
Основные сокращения и обозначения . . . . .	526
Литература . . . . .	530
Указатель имен и библиографических ссылок . . . . .	539
Предметный указатель . . . . .	541

## ПРЕДИСЛОВИЕ

За двадцать лет космической эры человечество достигло больших успехов в реализации космических полетов. Автоматические космические аппараты (КА) были посажены на Луну. Они под управлением с Земли исследовали различные районы лунной поверхности, передавая на Землю разнообразную информацию и, в частности, снимки лунных пейзажей. Другие автоматические КА доставили на Землю образцы грунта из разных точек лунной поверхности. С помощью автоматических межпланетных КА, посланных на Венеру и Марс, получена научная информация об атмосферах этих планет, а также об их поверхности, в том числе — снимки пейзажей около точек посадки. На пилотируемых КА не только освоены орбиты искусственных спутников Земли (ИСЗ) и Луны (ИСЛ), но и совершены экспедиции с высадкой на Луне. Интерес к Луне возрастает, в литературе все чаще появляются разнообразные проекты освоения и использования Луны.

Практическому осуществлению полетов КА между Землей и Луной предшествовала разработка разнообразных методов исследования траекторий полета. Применяемые КА снабжены обычно двигателями «большой» тяги (использующими, например, химические топлива). Действие этих двигателей относительно кратковременно, и его обычно можно считать импульсным. Уже накоплен большой методический материал и опыт расчета траекторий полета между Землей и Луной с двигателями боль-

шой тяги. Он нашел отражение в многочисленных журнальных статьях и в нескольких книгах.

Первая из этих книг [3—1964] является справочным руководством, причем руководством по всем научно-техническим вопросам, связанным с реализацией полетов к Луне, а не специально по динамике полета. Это руководство не издавалось в русском переводе. Вторая книга [2—1965] была посвящена лишь одной задаче достижения Луны и уже стала библиографической редкостью. Остальные книги [5—1966, 1—1970, 5—1971, 2—1972, 1—1976, 1—1980] посвящены общим вопросам теории полета и проектирования КА, а не специально траекториям перелетов между Землей и Луной. Поэтому возникла необходимость систематического изложения динамики таких перелетов.

Настоящая книга посвящена анализу совокупностей траекторий полета от Земли к Луне и от Луны к Земле, анализу условий сопряжимости двух траекторий пассивного полета — к Луне и от Луны — в одну траекторию и анализу совокупности сопряженных траекторий. Предлагаются машинные алгоритмы отыскания внутри каждой из совокупностей единственной траектории с нужными свойствами. Эти свойства чаще всего заданы в виде геометрических, динамических и других условий, которые удовлетворяются путем решения соответствующей краевой задачи. В книге даются приближенные и точные методы решения основных краевых задач. Рассматривается вопрос о необходимых для перелетов затратах характеристической скорости, указываются в основных случаях параметры траекторий, для которых затраты минимальны.

Систематическое исследование траекторий полета к Луне и влияния на них разброса начальных данных впервые было проведено в Математическом институте АН СССР в 1953—1955 гг. [1—1957]. Тогда же был разработан весьма простой метод анализа траекторий сближения с Луной.

В нем пренебрегается не только возмущениями от Луны вне ее сферы действия (СД) по отношению к Земле и от Земли внутри этой сферы, но и размерами СД (для участков движения вне СД), так что его можно назвать методом точечной сферы действия (ТСД). Этот общий метод и другие результаты по ограниченной круговой проблеме трех точек рассматриваются в разделе I данной книги. В нем же рассматриваются некоторые вопросы, носящие вводный характер.

В раздел II книги вошли результаты систематического исследования задачи достижения Луны, которое было проведено в 1956—1958 гг. Частично они были доложены на ежегодном собрании Американского ракетного общества [2—1960] и на Всесоюзной конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии в 1961 г., позже они были опубликованы в виде книги [2—1965] и представлены в докладе конгрессу МАФ в 1966 г.

В разделе III собраны результаты применения метода ТСД и более точных методов к анализу совокупности траекторий возвращения к Земле с поверхности Луны или с орбиты ИСЛ. Эти результаты ранее публиковались в статьях [1—1967, 1—1969, 1—1972, 2—1973, 1,2—1974, 1, 2—1975] и докладывались конгрессу МАФ в 1973 г.

Наконец, в разделе IV рассматривается траекторная задача облета Луны. Излагаются методы и некоторые результаты отыскания траекторий облета Луны с возвращением в атмосферу Земли или на орбиту стационарного ИСЗ, облета с целью разгона (или торможения) КА возмущениями от Луны (без помощи двигателя) и др.

Расчетные методы в данной книге излагаются с учетом требований автоматизации вычислений, а в приложениях к книге приведены примеры некоторых частных алгоритмов, многократно использовавшихся в машинных программах отыскания и расчета траекторий в различных задачах полета между Землей и Луной.

Материал книги излагается достаточно подробно, так что может быть использован как специалистами в области механики космического полета, так и студентами-старшекурсниками соответствующих специальностей. От читателя требуется знание основ высшей математики и теоретической механики, а также знакомство с общим курсом астрономии.

Главы 1, 2, 11, 12, 17 и приложения 6—9 написаны Л. И. Гусевым, главы 5, 16, 21 написаны совместно Л. И. Гусевым и В. А. Егоровым, остальные главы, введение и приложения 1—5, 10 написаны В. А. Егоровым.

Авторы всегда будут глубоко благодарны М. В. Келдышу, по инициативе и при поддержке которого было начато систематическое исследование траекторий полета к Луне, а также С. П. Королеву и его сотрудникам, способствовавшим развитию этих исследований в практическом направлении и опубликованию первой в СССР книги [2—1965] по теории полета к Луне.

Авторы выражают признательность Д. Е. Охоцимскому и Т. М. Эннееву за обсуждение ряда результатов и полезные замечания.

## ВВЕДЕНИЕ

### § В.1. Об энергетическом подходе и методе игнорирования возмущений

Систематическое исследование траекторий полета от Земли к Луне КА с двигателями «большой» тяги было начато в 1953 г. в Математическом институте АН СССР. Рассматривались траектории достижения Луны или облета ее с целью возвращения КА в атмосферу Земли или разгона КА возмущениями от Луны [1, 2—1957]. Траектории полета от Земли к Луне начинаются активным участком у поверхности Земли или на орбите ИСЗ.

Позже стали рассматриваться и траектории возвращения (ТВ) от Луны к Земле. Начинаются они, аналогично предыдущим, активным участком у поверхности Луны или на орбите искусственного спутника Луны (ИСЛ).

Траектории достижения Луны кончаются активным участком торможения у поверхности Луны или на орбите ИСЛ. Траектории облета Луны кончаются пассивным торможением в атмосфере Земли или активным участком торможения на орбите ИСЗ. Таким образом, предполагается, что перелет между Землей и Луной происходит по траектории с одним или двумя короткими активными участками большой тяги, расположенными, соответственно, на одном или обоих концах траектории. Траектория состоит в основном из одного пассивного участка (траекторий полета КА с двигателями «малой» тяги и вопросы коррекции пассивного полета в книге не рассматриваются).

Задача о траекториях пассивного полета между Землей и Луной даже в простейшей постановке сводится [2—1957] к классической ограниченной круговой проблеме трех точек ( $m_0$  — Земля,  $m_L$  — Луна,  $m_0$  — КА), до сих пор не имеющей эффективного общего решения. Поэтому

актуально качественное исследование тех свойств движения, которые можно установить, не имея общего решения уравнений движения. Следуя Хиллу [1—1877], можно осуществить «энергетический» подход к задаче, используя интеграл Якоби, который имеет место в системе координат, вращающейся вместе с прямой Земля—Луна. Этот подход позволил получить точное теоретическое решение вопроса о минимальных начальных скоростях, необходимых для достижения Луны [2—1957].

Однако фактическое определение траекторий с минимальной начальной скоростью методом численного интегрирования (ЧИ) показало, что прежде чем достигнуть Луны, КА должен сделать вокруг Земли порядка 100 (и более) оборотов. Поэтому теоретические минимальные начальные скорости не представляют практического интереса.

Методом ЧИ было показано, что минимальные скорости, необходимые для достижения Луны на первом обороте траектории вокруг Луны, можно вычислять в невращающейся геоцентрической системе координат (с точностью порядка 1 м/с) из условия попадания в Луну, полностью пренебрегая ее влиянием [2—1957].

Интеграл Якоби использовался также В. Г. Фесенковым при выяснении вопроса о возможности захвата в ограниченной круговой проблеме трех точек [1—1946]. С помощью результатов Хопфа [1—1930] можно прийти к заключению, что множество траекторий в фазовом пространстве, про которые нельзя сказать, что они не отвечают захвату Луной КА, запущенного с Земли, имеет лебегову меру нуль. Но важно знать, существует ли хоть одна траектория, отвечающая захвату, или нет. Если она существует, то, хотя ее исключительные начальные данные невозможно реализовать в точности, все же, реализуя достаточно близкие к ним данные, можно было бы получать траектории, делающие сколь угодно большое количество витков вокруг Луны, прежде чем удалиться от нее. Это представляет интерес, например, для создания ИСЛ без помощи двигателя.

Если, следуя В. Г. Фесенкову, сделать преобразование интеграла Якоби из вращающейся системы координат к невращающейся  $m_2$ -центрической системе (аналогично тому, как Тиссеран [1—1896] делал такое преобразование

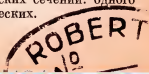


к  $m_0$ -центрической системе), то можно получить условие невозможности захвата для достаточно малых  $\mu = \mu_L/\mu_G$ , где  $\mu_L$  и  $\mu_G$  — гравитационные параметры масс  $m_L$  и  $\mu_G$  соответственно. Это условие пригодно лишь для значений  $\mu < 10^4$  (а для системы Земля — Луна  $\mu = \mu_L/\mu_G = 1/81$  оно неприменимо [1—1959]).

Однако невозможность захвата в системе Земля — Луна удается доказать приближенным методом для траекторий, начинающихся или кончающихся вблизи массы  $m_0$  (Земли) и на этом же обороте вокруг  $m_G$  сближающихся с массой  $m_L$  (Луной). При этом считается, что сближение точки  $m_0$  с массой  $m_L$  имеет место, если траектория точки  $m_0$  пересекает сферу действия массы  $m_L$  относительно массы  $m_G$ .

Сферу действия (СД) меньшей массы  $m_L$  относительно большей  $m_G$  в ограниченной круговой задаче трех точек  $m_G, m_L, m_0$  ввел в рассмотрение Лаплас [1—1805] при анализе сближения кометы  $m_0$  с Юпитером  $m_L$ , как  $m_L$ -центрическую сферу радиуса  $\rho = \rho_*$ , внутри которой целесообразно принять Юпитер  $m_L$  за центральное тело, а Солнце  $m_G$  — за возмущающее. Лаплас показал, что если взять  $\rho_* = r_L \mu^{2/5}$ , то на границе СД отношение возмущающей силы к силе притяжения центрального тела не зависит от того, какая из притягивающих масс принята за центральную. Оно пропорционально  $\mu^{1/5}$  [2—1937], т. е. убывает до нуля вместе с  $m_L/m_G$ . С убыванием  $\rho$  от  $\rho_*$  до нуля это отношение также убывает до нуля, причем весьма быстро — как  $(\rho/\rho_*)^3$ .

Поэтому единичное прохождение точки  $m_0$  через СД массы  $m_L$  можно анализировать приближенно: пренебрегая возмущениями от массы  $m_L$  вне ее СД и возмущениями от массы  $m_G$  — внутри СД. Такой подход можно назвать *методом игнорирования возмущений* (ИВ). Уточним теперь понятие *траектории сближения* точки  $m_0$  с массой  $m_L$ . Далее этим термином будем называть такую  $m_0$ -центрическую траекторию, по которой частица  $m_0$  на первом ее обороте вокруг массы  $m_G$  проходит через СД массы  $m_L$  относительно массы  $m_G$  с существенно гиперболической  $m_L$ -центрической скоростью. В рассматриваемом приближении траектория сближения точки  $m_0$  с массой  $m_L$  состоит из трех конических сечений: одного  $m_L$ -центрического и двух  $m_G$ -центрических.



Траекторию сближения  $m_0$  с массой  $m_L$ , начинающуюся (или кончающуюся) вблизи массы  $m_G$ , назовем *траекторией облета массы  $m_L$  или облетной траекторией*. Здесь близость означает малость начального (или конечного) расстояния  $m_G m_0$  по сравнению с расстоянием  $m_G m_L$ .

Оказывается, что при  $m_L/m_G \ll 1$   $m_L$ -центрическое движение по облетной траектории внутри СД является сильно гиперболическим [1—1959], так что облетная траектория является частным случаем траектории сближения. Окрестность границы СД проходимся по облетной траектории столь быстро, что влияние возмущения не успевает накопиться (несмотря на то, что в случае Луны и Земли отношение возмущения к притяжению центрального тела на СД достигает  $\sim 0,55$ ). Поэтому захват КА Луной на облетной траектории оказывается невозможным.

## § В.2. Метод точечной сферы действия

Облетные траектории задачи Земля — Луна — КА были систематически исследованы в 1953—1955 гг. методом, в котором кроме возмущений пренебрегалось и некоторыми другими второстепенными факторами [2—1957, стр. 49]. Такими факторами в плоской задаче при фиксированных геоцентрических начальных данных (радиусе-векторе  $r_1$ , угле  $\alpha_1$  вектора  $V_1$  скорости с радиусом-вектором и величине  $V_1$  скорости, не близкой к минимальной) были следующие:

1) отличие геоцентрических радиусов  $r_2$  точки входа в СД и  $r_L(t_2)$  Луны в момент  $t_2$  входа в СД [2—1957, стр. 91, 97];

2) отличие векторов  $V_L(t_2)$  и  $V_L(t_3)$  скорости Луны в моменты  $t_2$  входа в СД и  $t_3$  выхода из нее [2—1957, стр. 96];

3) отличие геоцентрических радиусов  $r_3$  точки выхода из СД и  $r_L(t_3)$  Луны в момент  $t_3$  выхода из СД [2—1957, стр. 105].

То, что эти факторы действительно второстепенные, т. е. не имеют принципиального значения в задачах о траекториях сближения с Луной, проверялось и было подтверждено более точными методами ИВ и численного

интегрирования (ЧИ), причем как в плоском [1,2—1957] случае, так и в пространственном [2—1965], когда кроме начальных данных  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $\alpha_1$  фиксировано еще и наклонение  $i_1$  плоскости траектории КА к плоскости лунной орбиты.

Предположение о возможности пренебрежения факторами 1—3 эквивалентно предположению о пренебрежимой малости радиуса  $\rho_*$  СД по сравнению с расстоянием  $r_L$  между притягивающими телами  $m_L$ ,  $m_G$ . Поэтому метод анализа траекторий сближения, основанный на пренебрежении не только возмущениями, но и вышеперечисленными тремя факторами, можно назвать *методом точечной сферы действия* — ТСД.

Метод ТСД принципиально проще метода ИВ, поскольку позволяет представлять  $m_G$ -центрическую траекторию сближения с меньшей массой  $m_L$  лишь двумя дугами  $m_G$ -центрических конических сечений. Эти дуги, соединяясь концами в точке встречи с  $m_L$ , образуют излом. Причем, как и в методе ИВ, вектор  $m_G$ -центрической скорости  $V_2$  в конце первой дуги определяет вектор  $m_L$ -центрической скорости  $U_2 = V_2 - V_L$  входа в СД, а вектор  $U_3$   $m_L$ -центрической скорости выхода из СД в начале второй дуги определяет вектор  $m_G$ -центрической выходной скорости  $V_3 = U_3 + V_2$ . Здесь  $V_L$  — скорость массы  $m_L$  в момент сближения. Величина и направление вектора  $V_3$  зависят при фиксированных начальных энергии  $h_1$ , величине  $C_1$  вектора кинетического момента и наклонения  $i_1$  только от выбора положения точки входа на СД. Это положение определяется одной координатой (долготой) в плоском случае и двумя (широтой и долготой) — в пространственном случае. Изменяя положение точки входа на СД, можно получить в пространстве компонент вектора  $V_3$  соответственно одномерное или двумерное многообразие  $\Sigma_V$  точек  $V_3$ . Как показывается в разделе I, оно является (в предположениях метода ТСД) частью окружности для плоской задачи и частью сферы — для пространственной (при начальных энергиях  $h_1$ , не близких к минимальным, см. гл. 4). Поскольку при  $m_G$ -центрическом рассмотрении входная точка в методе ТСД считается совпадающей с выходной, то вся совокупность движений от СД определяется только многообразием  $\Sigma_V$  выходных скоростей. При этом каждому вектору  $V_3 \in \Sigma_V$  соответствует единствен-

ная траектория сближения. Анализ скоростных многообразий  $\Sigma_v$  существенно упрощает решение задач о траекториях возвращения от Луны к Земле (раздел III) и облета Луны (раздел IV).

### § В.3. О литературе по методу точечной сферы действия

Идея метода ТСД, т. е. пренебрежения размерами СД с сохранением пересчета входных скоростей в выходные на ее границе, впервые была применена в космической баллистике, по-видимому, Лоуденом [1, 2—1954], чтобы оценить максимальное увеличение скорости гелиоцентрического движения возмущениями от планеты («пертурбационный эффект»). Метод ТСД применялся для анализа траекторий сближения с планетами и в последующих работах [2—1956, 6—1959]. Особенно подробно рассмотрен методом ТСД выбор траекторий для облета планет в работе Беттина [3—1959].

Для анализа траекторий полета к Луне метод ТСД не применялся до работ [1, 2—1957], в которых исследованы погрешности этого метода на разных участках движения и тем самым обоснована применимость его к траекториям сближения с Луной. Более того, эта применимость подвергалась Беттином сомнению [5—1966, стр. 186] даже после того, как методом ТСД в сочетании с другими методами был выполнен подробный анализ [2—1965] задачи достижения Луны (см. раздел II данной книги). Позже в работах [3—1967, 5—1970] метод ТСД был предложен как совершенно новый метод и успешно применен для решения задачи облета Луны с возвращением в атмосферу Земли (хотя и без геометрического анализа многообразия выходных скоростей).

Затем методом ТСД была решена задача о траекториях возвращения к Земле с поверхности Луны и с орбиты ИСЛ [1—1967, 1—1969] (см. раздел III данной книги). Позже в работе [2—1970] было вновь предложено решать задачу возвращения к Земле с поверхности Луны фактически тем же методом ТСД (и опять он применялся без геометрического анализа скоростных многообразий).

Еще позже авторами книги [1—1976] метод ТСД был назван ММСВ — «модифицированный метод сфер влия-

ния», а метод ИВ (игнорирования возмущений) был назван МСВ — «метод сфер влияния». Однако название «метод ИВ» представляется более отвечающим сути дела, чем название МСВ, так как именно игнорированием возмущений этот метод характерен и отличается от обычного последовательного вычисления участков траектории по сферам действия, которое со времен Лапласа астрономы выполняли с учетом возмущений и которое с учетом возмущений выполняется в методе асимптотических разложений [4, 5, 6—1963]. Аналогично название «метод ТСД» больше раскрывает суть дела, чем название ММСВ.

Метод ТСД применим для получения приближенных условий сопряженности пары траекторий полета к массе  $m_\tau$  и от нее в одну траекторию сближения (начинающуюся не обязательно вблизи массы  $m_\sigma$ ). Метод ТСД дает для расчета таких траекторий исходное приближение, последовательно уточняемое методами ИВ и ЧИ так же, как это делается для облетных траекторий в работах [1, 2—1957, 2—1965]. В частности, таким путем в разделе IV находятся с заданной точностью траектории облета Луны с возвращением к Земле.

## § В.4. О методе скоростных многообразий

Метод ТСД облегчает исследование совокупности траекторий потому, что позволяет свести дело к анализу только многообразий скоростей в характерных точках траекторий рассматриваемой совокупности, игнорируя различные радиусов-векторов в этих точках. Характерными точками для траекторий сближения с Луной считаются точки входа и выхода траектории на СД. Рассмотрение такого рода скоростных многообразий существенно облегчает решение не только задач перелета между Землей и Луной, но и ряда других задач космической баллистики.

Например, в задаче перелета между двумя фиксированными точками — начальной  $A$  и конечной  $B$  — в поле тяготения одного центра  $M$  многообразие  $\Sigma$  всех допустимых начальных скоростей принадлежит гиперболе в евклидовом пространстве компонент начальной скорости (см. § 4.4). Одной асимптотой гиперболы является направление  $MA$ , а другой —  $AB$ , а величина и направление дей-

ствительной полуоси гиперболы — это просто величина и направление минимальной скорости перелета.

В задаче достижения из заданной начальной точки  $A$  заданного расстояния  $R$  от массы  $M$  можно также построить в евклидовом пространстве компонент начальной скорости многообразие  $\Sigma$ , каждая точка которого является концом вектора начальной скорости, дающего решение задачи. Если заданное расстояние  $R > |\vec{MA}|$ , то оно достигается в апоцентрии траектории ( $r_a = R$ ), а если  $R < |\vec{MA}|$ , то — в перицентрии  $r_p = R$ . Соответствующее скоростное многообразие  $\Sigma$  при  $R > |\vec{MA}|$  есть эллипс, малая ось которого имеет направление радиуса  $MA$ . При  $R < |\vec{MA}|$  скоростное многообразие  $\Sigma$  является гиперболой, причем по вектору  $\vec{MA}$  направлена ее мнимая полуось (см. § 4.4).

Знание таких скоростных многообразий позволяет сводить задачу минимизации затрат характеристической скорости к задаче минимизации некоторого расстояния в пространстве скоростей. Например, если в каждом из рассмотренных выше трех случаев уже имеется в точке  $A$  некоторый вектор скорости  $V_A$ , то минимальный импульс  $\Delta V$  в точке  $A$ , необходимый для достижения радиуса  $r_p$  в первом случае, или расстояния  $R > |\vec{MA}|$  во втором случае, или расстояния  $R < |\vec{MA}|$  в третьем случае, будет в евклидовом пространстве скоростей просто вектором  $\vec{V_A V_\Sigma}$  минимальной длины, т. е. вектором, идущим от заданной точки  $V_A$  до ближайшей точки  $V_\Sigma$  одного из трех рассмотренных выше скоростных многообразий  $\Sigma$ .

Рассмотрение более сложных скоростных многообразий позволяет решить и задачу об оптимизации перехода с заданной эллиптической орбиты на гиперболическую с заданным вектором скорости «на бесконечности» (см. гл. 14). Таким образом, использование метода ТСД в задаче сближения с массой  $m_L$  позволяет затем эффективно применить и метод скоростных многообразий (приложимый к гораздо более широкому кругу задач космической баллистики).

### § В.5. Замечание о методе долготной привязки

Заметим, что при практическом вычислении траекторий полета Земля—Луна (или Луна—Земля) обычно заданы число полных суток полета, высота перигея и трасса запуска на земной поверхности (или трасса перигейного участка траектории возвращения). Это вычисление может быть существенно облегчено, если в качестве одного из условий, определяющих искомое решение, задано дополнительно время встречи КА с Луной или полное время облета Луны с возвращением к Земле, или географическая долгота точки встречи с Луной (или начала траектории возвращения). Задание географических долгот на концах траектории эквивалентно заданию конечных моментов времени, поскольку траектория перелета располагается в одной плоскости, а зависимость геоцентрических углов суточного вращения поверхности Земли и месячного вращения центра Луны от времени заранее известна (например, из Астрономического ежегодника СССР).

Такое задание времени полета почти точно фиксирует полную геоцентрическую энергию перелета, что существенно сужает диапазон поиска всех параметров искомой траектории. При этом энергия фиксируется тем точнее, чем точнее реализуется заданная высота перигея. Использование фиксированности конечной географической долготы (или времени прохождения характерной точки искомой траектории) для сокращения области поиска решения можно назвать *методом долготной привязки*. Он был сначала применен в пространственной задаче о точке встречи с Луной для обеспечения возможности наблюдения встречи из заданного пункта на земной поверхности [2—1965], затем — в задачах о других перелетах между Землей и Луной [1—1974, 2—1975, 4—1979]. Примеры его применения можно найти во всех разделах данной книги, он используется вместе с методами ТСД и ИВ для вычисления начального приближения в краевых задачах.

### § В.6. О некоторых методах теории возмущений

Уточнение результатов метода ТСД методами ИВ и ЧИ оказывается практически более удобным, чем применение других методов теории возмущений, таких, например, как метод асимптотических разложений (АР) [4, 5, 6—1963]

и метод полиноминой аппроксимации [4—1967]. Для применения методов теории возмущений необходимо [1—1956, 3—1972] наличие малого параметра в задаче. Таким параметром для внешней задачи (о движении вне СД) является отношение массы Луны к массе Земли, а для внутренней задачи (о движении внутри СД) — отношение радиуса этой сферы к расстоянию Луна—Земля.

В работах [4,5—1963] предлагается использовать для представления решений асимптотические разложения, различные во внешней и внутренней задачах. Эти разложения «сращиваются» на СД с помощью обычных условий пересчета для радиусов-векторов и векторов скорости на границе СД. При этом краевые задачи сводятся к системам уравнений, более сложным, чем в методе ИВ. Они недостаточно «прозрачны» (для анализа всей совокупности траекторий), и для их применения необходимо использовать ЭВМ [5—1963, 11—1970]. Несмотря на эти трудности, в работах [4, 5, 6—1963] получены для траекторий полета к Луне как качественные, так и количественные результаты в ограниченной проблеме трех точек, причем не только плоской, но и пространственной [6—1966]. С применением тех же идей рассмотрены также траектории возвращения от Луны к Земле со входом в атмосферу [6—1968, 7—1969].

К работам по методу АР примыкает работа [4—1967], где с помощью полиноминых аппроксимаций всех функций времени построена аналитическая теория движения КА к Луне (и теория движения Луны) на коротких временных интервалах. В качестве исходного приближения к траекториям берутся невозмущенные кеплеровы орбиты. В основу теории положена регуляризация соударения в задаче двух тел, т. е. представление координат, компонент скорости и времени в виде целых функций некоторой регуляризирующей независимой переменной. При построении теории возмущенного движения варьируемыми функциями являются не кеплеровы элементы, а начальные значения координат, компонент скорости и времени. Даются формулы для вычисления возмущений почти параболического и почти прямолинейного движений. Формулы для возмущений от Луны вне ее СД составляют аналитическую теорию движения КА вне СД Луны. При этом используется представление координат Луны



полиномами сначала от времени, а затем — от регуляризирующей переменной. Формулы для возмущений от Земли внутри СД Луны составляют аналитическую теорию движения КА внутри СД Луны (и позволяют также вычислять возмущения от любого удаленного тела).

Хотя работа [4—1967] представляет несомненный теоретический интерес, а ее метод расчета движения даёт выигрыш во времени по сравнению с методом ЧИ, однако ее формулы еще более громоздки и трудны для программирования и отладки, чем формулы метода АР. Поэтому методы работы [4—1967] не нашли столь широкого практического применения, как методы ТСД, ИВ и ЧИ.

### § В.7. О задачах минимизации характеристической скорости перелетов

Задача отыскания таких траекторий перелета Земля — Луна, для которых затраты характеристической скорости минимальны, до сих пор в общем виде не решена. Не решена в общем виде и более простая задача минимизации характеристической скорости перехода между орбитами в поле тяготения одного тела. Общая постановка этих задач, как вариационных [3—1969], [4—1971], имеется в книгах [4—1975, 1—1976] и статье [1—1979], посвященных оптимизации маневра КА, там же приводятся основные результаты, полученные в этой области. Поскольку вариационные задачи минимизации затрат характеристической скорости на перелеты между Землей и Луной не решены, то представляют интерес оценки (вроде [1—1975]) превышения затрат над минимальными при использовании двухимпульсного перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ, а также решение отдельных задач параметрической минимизации затрат. Это, например, задачи оптимизации:

- 1) непрерывного активного участка выведения КА с заданной широты земной поверхности на траекторию достижения Луны [2—1965];

- 2) одноимпульсного возвращения к Земле с орбиты ИСЛ [1—1972];

- 3) трехимпульсного перелета орбита ИСЗ — орбита ИСЛ — атмосфера Земли [1—1976];

- 4) двухимпульсного перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ [1—1974, 2—1975];

5) двухимпульсного перехода с низкой орбиты ИСЗ на геостационарную орбиту с использованием облета Луны [3—1971].

Решение первой задачи приводится в главе 8 данной книги. В основе второй и третьей задач лежит оптимизация перехода с орбиты ИСЛ на гиперболу (для возвращения к Земле). Для случая круговой орбиты ИСЛ эта оптимизация проведена в работе [2—1971], для случая эллиптической — в работе [1—1972]. Последние результаты приведены в главе 14 данной книги. Некоторые результаты по четвертой задаче приведены в главе 11, а по пятой — в главе 22 данной книги. Параметрическая оптимизация окололунных маневров рассматривается также в работах [3—1961, 21, 22—1963, 6—1964, 8, 9—1966, 7—1968, 5, 6—1969, 12—1970].

#### § В.8. Краткий хронологический обзор литературы по динамике полета между Землей и Луной

Перечислим или упомянем кратко (не претендуя на полноту) сначала работы о перелетах между Землей и Луной более общего характера, а затем — по основным частным задачам перелета между Землей и Луной: достижения Луны, возвращения от Луны к Земле и облета Луны.

Общие соображения и результаты, относящиеся к окололунным траекториям различного назначения, приводятся в работах [8—1957] и [7—1959], причем в работе [8—1957] наряду с другими вопросами исследуется влияние изменения начальных данных на траекторию, в частности, находятся производные от параметров селеноцентрического движения по начальным данным. Эти производные рассматриваются также в работах [1, 2—1957], как в задаче достижения Луны, так и в задачах облета Луны с различными целями. В книге [3—1960] рассматриваются траекторные вопросы и другие аспекты задач полета к Луне. В частности, там излагаются основные результаты работ [1, 2—1957]. О трудностях орбитальной сборки и запуска КА при полетах к Луне с различными целями трактуется в работе [3—1962].

В работах [3—1961, 8, 9—1963] рассматривается совокупность задач, связанных с полетом экспедиции на

поверхность Луны или на орбиту ИСЛ (и обратно), производятся, в частности, выбор номинальных траекторий и анализ влияния разброса начальных данных на различных участках полета. К этим работам примыкают работы [15, 16—1963], рассматривающие траекторные и другие вопросы аварийного возвращения экспедиции на Землю с различных участков траектории полета к Луне, а также работа [2—1963], в которой на основе метода ИВ разрабатывается система диаграмм, позволяющих довольно просто рассчитывать различные маневры, такие как полет к Луне с возвращением, переход с гиперболической селеноцентрической орбиты на орбиту ИСЛ и т. д.

В работах [4, 5—1962] рассматриваются общие свойства различных траекторий полета к Луне, главным образом в плоскости ее орбиты. Общие вопросы динамики полета КА между Землей и Луной, траекторные характеристики и ограничения рассматриваются в «Руководстве по полетам к Луне» [3—1964]. Оценки необходимых затрат характеристической скорости на различных этапах реализации экспедиции на Луну и соответствующие требования к двигательным установкам анализируются в работе [6—1965]. В книгах [5—1966, 7—1970, 5—1971, 2—1972, 5—1974, 1, 2—1976], где рассматриваются основные задачи и общие методы механики космического полета, излагаются, в частности, приложения этих методов к задачам расчета траекторий и характеристических скоростей перелета между Землей и Луной, посадки на Луну, выхода на орбиту ИСЛ и др.

Работ по проблеме достижения Луны больше, чем по проблемам возвращения от Луны к Земле и облета Луны. Первой, по-видимому, является работа [2—1956], где были рассмотрены некоторые траекторные вопросы, связанные с созданием ИСЛ. Задача перелета Земля—Луна рассматривается теоретически в работе [9—1957] в предположениях ограниченной круговой проблемы трех точек.

Задаче достижения Луны посвящены также работы [1, 2, 3—1958], причем в работе [2—1958] проведено сравнение плоской и пространственной задач, а в работе [3—1958] рассмотрен вопрос о влиянии разброса начальных данных для некоторых видов пространственных траекторий. Более подробно пространственная задача полета к Луне рассмотрена в работах [4—1958, 2, 5—1959],

причем в работе [4—1958] показано, что для анализа орбит весьма существенны ограничения, определяемые назначением орбиты.

В работе [2—1959] предлагается приближенное аналитическое рассмотрение трехмерных траекторий, которое позволяет графически построить семейства траекторных характеристик, выяснить взаимосвязь определяющих параметров и ограничений, оценить влияние разброса начальных данных. Рассматриваются также вопросы создания ИСЛ и мягкой посадки на лунную поверхность. В работе [5—1959] результаты приближенного аналитического изучения пространственных траекторий полета к Луне сравниваются с численными, причем выясняется удовлетворительная точность приближенного анализа. В работе [8—1959] успешно применен метод ИВ. Он позволил вычислить номограммы для быстрого определения мгновенного положения летящего к Луне КА. Этот метод позволил также указать последовательность приближенных операций (с графиками и формулами) для выбора траекторий полета к Луне (или обратно) с учетом ограничений геометрических (например, фиксированность азимута запуска), динамических (например, фиксированность времени полета) и других.

В работе [6—1960] методом ИВ получены приближенные формулы для решения задачи об определении точки встречи с Луной и момента запуска при различных условиях. Траектории полета к Луне с различными целями исследовались в работах [1, 4—1960] и [3, 4—1961], причем в работе [1—1960] рассматриваются траекторные вопросы, связанные с созданием ИСЛ с целью охвата фотографированием всей лунной поверхности, а в работе [4—1961] дается способ поиска траекторий заданного назначения. В работе [4—1960] численно определяются траектории полета с эллиптическими и гиперболическими начальными скоростями, причем рассматривается применение тормозных ракет для перехода на орбиту ИСЛ и для возвращения к Земле.

Задача точного расчета пассивного участка траектории полета к Луне, т. е. с учетом не только притяжения Земли и Луны, но и влияния возмущений от Солнца, атмосферы Земли, сжатия Земли и т. д., рассматривается в работе [2—1962]. Предлагается экономный метод чис-

ленного интегрирования уравнений движения с учетом всех возмущений, которые исследователь сочтет существенными.

Из работ 1963 г., кроме уже упоминавшихся [4, 6—1963], отметим работу [3—1963], в которой с помощью расчета на ЭВМ траекторий полета к Луне исследуется влияние ошибок начальных данных и эффективность различных видов коррекции траекторий. В работе [10—1963] рассматривается задача запуска КА на вытянутую эллиптическую орбиту. Эта задача является энергетически более легкой, чем запуск ИСЛ на низкие круговые орбиты. В работе [11—1963] делается обзор траекторий полета к Луне, дается одна из возможных их классификаций. В работе [4—1964] предлагается способ графического отображения траекторий полета к Луне. В работах [5—1964, 7—1965] рассматривается в рамках ограниченной круговой проблемы трех тел семейство траекторий соударения точки нулевой массы с притягивающими массами. Применяется регуляризация уравнений движения, позволяющая повысить точность расчетов параметров движения вблизи соударения и рассмотреть последовательность соударений на одной траектории. Различные методы учета возмущений при расчете траекторий полета к Луне сравниваются в работе [7—1965].

В 1965 г. вышла книга [2—1965], в которой методами ИВ и ТСД рассмотрены траектории достижения Луны с высоких географических широт, влияние разброса начальных данных на эти траектории и влияние второстепенных факторов — эллиптичности орбиты Луны, возмущений от Солнца и др. (см. раздел II данной книги).

К уже упоминавшейся работе [6—1966] по применению метода АР в пространственной задаче полета к Луне примыкает численный анализ [8—1969] задачи тем же методом. В работе [6—1967] предлагается регуляризация задачи в случае тесного сближения КА с Луной.

Отметим еще работы [7—1966, 7—1968, 6—1970, 1—1974, 1, 2—1975, 1—1979], посвященные анализу траекторий и энергетических затрат, необходимых для полета от Земли к Луне или от Луны к Земле при различных ограничениях. В них рассматривается задача минимизации характеристических скоростей, находятся соответствующие условия оптимальности траекторий, а в некоторых

случаях и сами оптимальные траектории. Схема полета обычно задается. Исключением являются работы [1—1975, 1—1979], где ставится задача минимизации характеристической скорости перелета выбором величины и направления тяги вдоль всей траектории. Эта вариационная задача решается методом достаточных условий В. Ф. Кротова [5—1975].

Задача, возвращения от Луны к Земле стала рассматриваться в литературе, естественно, позже, чем задача достижения Луны. В первых работах [6—1962, 12—1963] находятся номинальные (расчетные) траектории возвращения (ТВ), рассматривается влияние выбора параметров движения около Луны на эти траектории и, в частности, на характеристики входа этих траекторий в земную атмосферу.

Работы [13, 14—1963] посвящены различным аспектам проблемы возвращения лунной экспедиции на Землю. В них не только анализируются характеристики ТВ, но и рассматриваются вопросы управления и контроля движения наземными станциями командно-измерительного комплекса.

В работе [1—1967] рассматривается множество ТВ к Земле с поверхности Луны или с низкой орбиты ИСЛ методом ТСД (с анализом скоростных многообразий). Тем же методом оценивается влияние разброса начальных данных. На основании этих результатов в работе [1—1969] находятся с помощью ЭВМ производные параметров ТВ по начальным данным, как для крутого, так и для пологого возвращения в земную атмосферу (см. раздел III данной книги).

В работе [6—1968] пространственная задача о ТВ рассматривается методом АР. Результаты этой работы используются в [7—1969] для создания быстродействующей методики массового расчета ТВ, а также в работе [11—1970] — для разработки численного метода решения двухточечной краевой задачи отыскания ТВ (кроме того, в работе [11—1970] сравниваются точности различных методов расчета перелетов Земля — Луна).

В работах [2, 6—1970] ТВ от Луны в атмосферу Земли рассматриваются методом ТСД. В первой работе рассматривается возвращение с поверхности Луны, находятся области, из которых возвращение возможно, и необхо-

димые энергетические затраты. При однократном погружении в атмосферу Земли оценивается достижимая область географических широт точек посадки. Во второй работе задача о ТВ с орбиты ИСЛ в атмосферу Земли решается наряду с задачей полета к Луне (точнее, с задачей перелета с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ). В задаче возвращения к Земле с круговой или околокруговой орбиты ИСЛ проведена оптимизация одноимпульсного перехода на ТВ.

Задача возвращения с произвольной орбиты ИСЛ к Земле рассмотрена в работах [1—1972 и 2—1973], причем в первой из них методами ТСД и скоростных многообразий решена задача оптимизации одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую с заданным вектором скорости «на бесконечности». Во второй работе это решение использовано в итерационном алгоритме выбора энергетически оптимальной ТВ с заданной орбиты ИСЛ на заданную трассу спуска в земной атмосфере (см. раздел III данной книги).

Проблеме возвращения КА с поверхности Луны на Землю посвящены работы [1,5—1973]. В них развиваются результаты работы [1—1967], причем применяются для анализа траекторий, начальные участки которых близки к лунной вертикали в точке старта. Для этих траекторий приближенно определяются как параметры прицеливания, так и геометрические характеристики движения относительно Луны и относительно Земли.

Наконец, в работе [1—1974] рассматриваются перелеты между орбитами ИСЛ и ИСЗ (и обратно) с использованием методов ТСД и ЧИ. Массовыми численными расчетами на ЭВМ находятся некоторые геометрические характеристики многообразия скоростей на СД Луны и характеристические скорости одноимпульсного маневра перехода с орбиты ИСЛ на траекторию Луна — Земля, а также с орбиты ИСЗ на траекторию Земля — Луна и с траектории Земля — Луна — на орбиту ИСЛ (см. разделы II и III данной книги).

По задаче облета Луны литература богаче, чем по задаче возвращения от Луны к Земле. Объясняется это двумя обстоятельствами. С одной стороны, энергетические затраты, необходимые для облета Луны, близки

к затратам, необходимым для достижения Луны. С другой стороны, облетные траектории весьма разнообразны. К ним, в частности, относятся траектории, на которых с КА видна сторона Луны, невидимая с Земли, траектории, по которым КА после сближения с Луной возвращается к Земле в ее атмосферу или на орбиту ИСЗ (например, стационарного ИСЗ). К ним относятся и траектории разгона КА Луной для полета за пределы СД Земли относительно Солнца, и траектории возвращения КА к Земле после межпланетного полета с торможением Луной в ее СД скорости относительно Земли и др.

Принципиальное значение имели работы [5, 6—1957], в которых впервые была показана возможность облета Луны с возвращением к Земле. Соответствующие одиночные траектории были получены численным интегрированием уравнений плоской ограниченной круговой задачи трех тел и были симметричными. Однако интересно было выяснить, какие вообще траектории облета Луны возможны, и дать их классификацию. Это было сделано для плоской задачи в работах [1, 2—1957], где из общей задачи облета методом ТСД и массовыми расчетами на ЭВМ были выделены задачи облета с пологим входом в атмосферу Земли, периодического облета Земли и Луны, а также разгона (или торможения) КА Луной без использования двигателя.

В работах [5—1958] и [9—1959] было продолжено изучение одиночных траекторий облета Луны с возвращением к Земле. В работе [5—1960] в рамках ограниченной круговой пространственной задачи трех тел рассмотрены траектории облета с помощью соображений симметрии и обратимости движения в небесной механике. В системе координат, вращающейся вместе с прямой Земля — Луна, проведен анализ различных траекторий сближения с Луной, симметричных относительно этой прямой или относительно плоскости, проходящей через эту прямую перпендикулярно к плоскости лунной орбиты.

В работах [3—1961, 7—1962] рассмотрены траектории КА, облетающего Луну с экипажем на борту, и маневры перехода на ТВ к Земле из различных точек облетных траекторий. Максимальное количество работ по траекториям перелетов между Землей и Луной, в том



числе облетным, приходится на 1963 г. В них развиваются общие численные методы поиска и расчета облетных траекторий на ЭВМ [17, 18—1963], практические методы определения наиболее удобных дат запуска с учетом фиксированности трассы (т. е. точки и азимута) запуска на Земле и других существенных для практики ограничений, например энергетических, геометрических и т. д. [19, 20—1963]. Эти ограничения, с одной стороны, сужают область поиска, а с другой — усложняют вычислительные алгоритмы.

В работе [2—1964] исследована на ЭВМ методом ИВ в рамках ограниченной круговой проблемы трех тел совокупность траекторий сближения с Луной для двух значений начальной энергии и трех значений начального наклона. Результаты представлены графически в обозримом виде на картинной плоскости (плоскости двух компонент вектора прицельной дальности). В разделе IV данной книги показано, как эти результаты можно получить путем геометрического анализа скоростных многообразий, получаемых с помощью метода ТСД.

Работа [4—1965] также посвящена численному исследованию траекторий облета Луны путем решения соответствующих краевых задач на ЭВМ. В ней выясняется, что обычные методы решения краевых задач для задачи облета малопригодны, так как классы близких к Луне облетных траекторий отвечают очень узким диапазонам начальных данных, причем при изменении начальных данных в этих диапазонах характеристики прохождения траекторий около Луны изменяются очень нелинейно.

В работе [5—1967] тоже приводятся результаты массовых расчетов облетных траекторий на ЭВМ с учетом дополнительных ограничений практического характера. Разработаны способы для обозримого представления этих результатов на графиках. Наиболее полно задача облета Луны с возвращением в атмосферу Земли рассмотрена в цикле работ [3—1967, 3—1968, 4—1973, 1—1976] методом ТСД. Об этом в книге [1—1976, стр. 497] авторы пишут: «В работах В. А. Ильина [4—1973, 3—1968, 3—1967] рассматривается приближенный метод синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли. На основе разработанного метода в работе В. А. Ильина, В. В. Демешкиной, Н. А. Истомина [5—

1970] проведено систематическое параметрическое исследование пространственных траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли»<sup>1)</sup>.

В работах [3—1971, 4—1975] предлагается применить облет Луны с возвращением на орбиту стационарного ИСЗ для одноимпульсного перевода КА на эту орбиту. Показывается, что если запуск КА производится с низкой орбиты ИСЗ достаточно большого наклонения (более  $30^\circ$ ), то предлагаемая траектория перехода на геостационарную орбиту ИСЗ энергетически выгоднее, чем обычные [4—1969] двух- и трехимпульсные траектории. Начальное приближение находится методом ТСД, производится сравнение результатов приближенного и точного решений для конкретной даты облета.

Наконец, в работе [3—1975] метод ТСД применяется для поиска начального приближения в точной краевой задаче вычисления траектории облета, удовлетворяющей ряду условий, обеспечивающих единственность решения.

Заканчивая этот не претендующий на полноту обзор литературы, заметим, что в конце книги [1—1976] приведена богатая библиография (около 400 наименований) по механике космического полета вообще и по теории полета к Луне — в частности.

---

<sup>1)</sup> См. по поводу этого метода п. В.З.

# ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ТРАЕКТОРИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ПРОБЛЕМЕ ТРЕХ ТОЧЕК

## Глава 1

### ОСНОВНЫЕ ТРАЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Астрономическая справка (2—1961, стр. 211). Естественный спутник Земли Луна имеет орбиту, близкую к круговой, — эксцентриситет ее не превосходит 0,0715. Плоскость этой орбиты наклонена к эклиптике на угол, колеблющийся между пределами, близкими к  $5^\circ$  и  $5^\circ,3$  с периодом около 173 сут., а ее линия узлов (линия пересечения с плоскостью эклиптики) вращается навстречу движению Луны с периодом 18,6 года. В результате наклонение  $i_L$  плоскости лунной орбиты к экватору Земли колеблется между пределами, близкими к  $18^\circ$  и  $29^\circ$ . Максимальная скорость изменения угла  $i_L$  есть величина порядка 0,5 угл. мин./сут. Геоцентрическое расстояние  $r_L$  Луны колеблется между пределами, близкими к 356 и 400 тыс. км. Среднее расстояние  $a_L = 384\,400$  км  $\approx 60 r_G$ , где  $r_G$  — радиус Земли. Период обращения Луны — сидерический месяц — составляет около 27,3 сут.

#### § 1.1. Краткая характеристика основных траекторных задач

Выбор траектории планируемого перелета между Землей и Луной существенно влияет как на последовательность проектирования, так и на компоновку КА. Поэтому в каждой задаче такого перелета сначала оцениваются необходимые энергетические затраты, выбирается номинальная траектория, т. е. траектория, решающая задачу при отсутствии ошибок в работе системы управления полетом. Затем исследуется влияние разброса начальных данных в окрестности номинальных, оцениваются точности управления полетом, необходимые для реализации траектории.

Первой из задач о траекториях перелета между Землей и Луной была решена задача достижения лунной поверхности. Вследствие большой удаленности Луны от Земли минимальная геоцентрическая начальная скорость  $V_1^{(m)}$  у Земли, необходимая для достижения Луны, близка к местной параболической  $V_n$ , зависящей от начальной высоты  $H_1$ . Например, для высоты  $H_1 = 200$  км имеем  $V_n = 11$  км/с,  $V_n - V_1^m < 0,1$  км/с. Соответствующее скорости  $V_1^{(m)}$  время полета составляет  $\sim 5$  сут. При эллиптических начальных скоростях  $V_1$  ( $V_1 < V_n$ ) сближение КА с Луной возможно как на восходящей по отношению к Земле, так и на нисходящей ветвях траектории КА, а при гиперболических начальных скоростях  $V_1 > V_n$  — лишь на восходящей ветви. Ограничимся рассмотрением траекторий с высотой перигея  $H_n \leq 200$  км, причем лишь на высотах вне атмосферы ( $H \geq 200$  км), и будем пренебрегать влиянием атмосферы. Для таких траекторий начальные углы  $\theta$  возвышения вектора  $V_1$  над местным горизонтом неотрицательны, а сами траектории сильно вытянуты вдоль геоцентрического радиуса точки встречи с Луной: при эллиптических начальных скоростях угол между большой осью эллипса и радиусом, равным расстоянию  $r_L$  до Луны, не превосходит  $15^\circ$ . Соответственно истинная аномалия  $\phi$  точки с  $r = r_L$  заключена между  $165$  и  $195^\circ$ , а геоцентрическая угловая дальность перелета  $\Phi_1$ , т. е. угол между радиусами начальной точки и конечной, на пассивном участке не может превышать  $195^\circ$ . Если считать, что угловая дальность  $\Phi_a$  активного полета при непрерывном активном участке невелика, например не превосходит нескольких градусов, то полная угловая дальность полета  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_a$  не будет превышать величины около  $200^\circ$ .

Пусть на поверхности Земли задана точка старта ее широтой  $\varphi_0$  и долготой  $\lambda_0$ , а также задано направление запуска его азимутом  $A_0$  (отсчитывается от направления на север по часовой стрелке). Пусть  $\varphi_0 > i_L > 0$ . Тогда независимо от  $A_0$  наклонение  $i$ , к экватору плоскости  $\Pi$  движения КА превосходит наклонение  $i_L$  лунной орбиты. Углы  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $A_0$  полностью определяют положение плоскости  $\Pi$  движения КА относительно земной поверхности.

В невращающейся системе координат плоскость  $\Pi$  равномерно поворачивается в суточном вращении вместе с земной поверхностью. Упрежденная точка  $L_\gamma$ , т. е. точка будущей встречи КА с Луной, опережающая в начальный момент Луну на угол, проходимый Луной за выбранное время полета, вращается вместе с Луной по ее орбите примерно в 30 раз медленнее, чем плоскость  $\Pi$ , и два раза в течение суток попадает в плоскость  $\Pi$ . В эти два момента в принципе возможен запуск КА к Луне. Если КА стартует из средних широт примерно в северном направлении, то полная угловая дальность полета для одного момента  $t'$  будет порядка  $\Phi' = 180^\circ - \varphi_0 - \delta_\gamma$ , для другого  $t''$  — порядка  $\Phi'' = 360^\circ - \varphi_0 + \delta_\gamma$ , где  $\delta_\gamma$  — склонение точки  $L_\gamma$ . Поскольку  $|\delta_\gamma| \leq i_L$ , то имеем  $90^\circ - i_L < \Phi' < 180^\circ$ ;  $360^\circ > \Phi'' > 270^\circ - i_L$ , т. е.  $\Phi''$  намного превышает  $200^\circ$ , так что из двух моментов  $t'$  и  $t''$  запуск возможен лишь в момент  $t'$ . При этом пассивный участок траектории перелета Земля — Луна в основном проходит над северным полушарием. Энергетические затраты на запуск (т. е. затраты характеристической скорости) возрастают вместе с величинами скорости  $V_1$  в конце активного участка и угла  $\theta_1$  ее возвышения над местным горизонтом (из-за роста гравитационных потерь). Минимальные затраты соответствуют минимальной скорости  $V_1 = V_1^{(m)}$  и углу  $\theta_1 = 0$ , т. е. перелету по полуэллипсу Гомана. Соответствующая пассивная угловая дальность  $\Phi_1^{(opt)} = 180^\circ$ .

Чтобы энергетические затраты были близки к минимальным независимо от величины угла  $\Phi_1$  между точкой старта и точкой встречи с Луной, применяется запуск к Луне с предварительным выведением КА на низкую спутниковую орбиту и таким временем пассивного движения по ней, чтобы после разгона с нее до скорости, близкой к  $V_1^{(m)}$ , до Луны оставалась как раз угловая дальность полета, близкая к  $180^\circ$ . При этом разгон производится в плоскости орбиты ИСЗ с целью минимизации энергетических затрат.

Поскольку время полета до Луны по полуэллипсу Гомана является вполне определенным, то определенными будут и положение упрежденной точки  $L_\gamma$  перед Луной на ее орбите и два момента  $t'_{\mathcal{L}}$ ,  $t''_{\mathcal{L}}$ , в которые пло-

скость  $\Pi$ , вращаясь, в течение суток проходит через точку  $L_\gamma$ , и возможен старт для запуска КА к Луне с орбиты ИСЗ. Для такого запуска, в отличие от предыдущего, пригодны и вполне равноправны оба момента старта, причем интервал между ними составляет  $\sim 0,5$  сут. После старта в первый момент траектория проходит в основном над северным полушарием Земли, а после старта во второй момент — над южным. Для различения этих случаев будем говорить соответственно о северной  $N$  и южной  $S$  траекториях.

При запуске КА к Луне с предварительным его выходом на орбиту ИСЗ будем предполагать, что долгота  $\Omega_\gamma$  восходящего узла этой орбиты (отсчитывается в плоскости экватора Земли от точки  $\Upsilon$  весеннего равноденствия) заранее не задана, но заданы остальные элементы  $p_\gamma$ ,  $e_\gamma$ ,  $i_\gamma$ ,  $\omega_\gamma$ ,  $u_\gamma$  орбиты. Величина  $\Omega_\gamma$  определяется моментом  $t_d$  старта внутри даты старта.

В задаче достижения Луны выбор номинальных траекторий связан не только с точным решением задачи о точке встречи с Луной с расчетом и минимизацией затрат характеристической скорости на разгон у Земли и на «мягкую» посадку на лунную поверхность, но также и с определением достижимых районов посадки на поверхности Луны.

Траекторная задача создания ИСЛ является более трудной, чем задача достижения Луны. В ней при выборе номинальных траекторий необходимо дополнительно рассмотреть зависимость параметров орбиты ИСЛ от параметров пучка геоцентрических траекторий, затраты характеристической скорости при переходе с траектории полета к Луне на орбиту ИСЛ, минимизацию суммарных затрат на переход орбита ИСЗ — орбита ИСЛ. В краевой задаче точного расчета перелета орбита ИСЗ — орбита ИСЛ необходимо ввести новые алгоритмы: а) расчета начального приближения и б) активного участка перехода на орбиту ИСЛ.

Траекторная задача возвращения от Луны к Земле, как и задача достижения Луны, может рассматриваться в четырех вариантах, в которых номинальные траектории начинаются и кончаются по-разному. Начинаться они могут на поверхности Луны или на орбите ИСЛ,

а кончатся — на орбите ИСЗ или в атмосфере Земли. При этом особенно интересны траектории, полого входящие в атмосферу (в заданном «коридоре» высот над заданной на поверхности Земли трассой). Однако практически интересный диапазон высот  $H_n$  условного перигея (т. е. вычисляемого при условии отсутствия атмосферы) ничтожен по сравнению с геоцентрическим радиусом  $r_n$  перигея. Поэтому особенно важным является анализ производных от  $r_n$ , от времени достижения перигея и от других конечных параметров — по начальным данным (или параметрам конца активного участка у Луны).

Выбор номинальных траекторий перелета орбиты ИСЛ — орбита ИСЗ в принципе аналогичен выбору траекторий перелета орбита ИСЗ — орбита ИСЛ.

При выборе номинальной траектории возвращения (ТВ) стараются минимизировать затраты топлива, в том числе на разгон у Луны. Если старт производится с поверхности Луны, то алгоритм расчета ТВ должен учитывать специфические условия прицеливания (мало похожие на земные).

Для расчета номинальной ТВ в заданный район земной поверхности необходимо уметь решать новую крайнюю задачу о точке встречи (учитывающую суточное вращение этого района вместе с Землей). Здесь при выборе начального приближения существенно получить правильное время  $T$  полета (уже при ошибке  $\delta T = 0,5$  сут приземление произойдет на противоположной стороне Земли).

Траекторная задача облета Луны является самой сложной. В ней наиболее интересны траектории, которые близко (ближе 10 тыс. км) подходят к поверхности Луны и возвращаются к Земле — либо в атмосферу, либо на орбиту ИСЗ. Характер селеноцентрического движения по облетной траектории зависит от заданных условий прохождения вблизи Луны, от времени полета КА, от заданных характеристик геоцентрического движения в начале и в конце полета, от положения Луны на ее орбите. Все это необходимо учитывать при выборе класса номинальной траектории и при ее поиске в пределах этого класса. Для решения крайней задачи облета Луны необходимо гораздо более аккуратное начальное при-

ближение, чем для предыдущих краевых задач, потому что облетная траектория проходит вблизи особых точек (притягивающих масс) не в двух, а в трех местах.

Двухимпульсное выведение КА на стационарную орбиту ИСЗ с низкой орбиты ИСЗ при ее наклонении  $45-65^\circ$  требует значительных затрат характеристической скорости (около 5 км/с). Оказывается [3—1971], использование траекторий облета Луны для перевода КА с низкой орбиты ИСЗ на геостационарную орбиту может быть выгоднее, чем обычный двухимпульсный маневр.

Можно использовать аналогичный пертурбационный эффект при близком пролете около Луны с целью разгона КА к планетам. Исследование качественных и количественных характеристик подобных траекторий сближения с Луной позволяет выбирать номинальные траектории как для запуска КА на различные высокоэнергетические орбиты ИСЗ, так и для полета в межпланетное пространство.

Перечисленные траекторные задачи полета КА в гравитационном поле Земли и Луны исследуются в последующих разделах с помощью приближенных и точных методов расчета. Кроме этих задач в литературе рассматриваются и другие задачи. Это, например, задача о траекториях выхода КА в либрационные точки системы Земля — Луна [3—1974], о траекториях, близких к периодическим орбитам в системе Земля — Луна (причем отличным от орбит ИСЛ и ИСЗ). Однако в настоящее время эти задачи недостаточно изучены и в данной монографии не рассматриваются.

## § 1.2. Требования к траекториям в связи с задачами полета

Пусть заданы уравнения (У) движения КА и рассматриваются их решения — траектории, проходящие из области  $r \ll r_L$  в область  $\rho \ll r_L$  (или обратно), где  $r$  и  $\rho$  — геоцентрическое и селеноцентрическое расстояния КА,  $r_L$  — расстояние Земля — Луна. Пусть в этих областях заданы граничные условия  $(Y_1)$  и  $(Y_2)$  соответственно на «земном» и «лунном» концах траектории, определяющие допустимые множества  $Y_1$  и  $Y_2$  краевых данных (например, элементы  $p_1, e_1, i_1, \omega_1, u_1$  орбиты ИСЗ и точка  $Y_2$  на поверхности Луны).



Многообразие траекторий, удовлетворяющих условиям  $(Y)$ ,  $(Y_A)$ ,  $(Y_T)$ , не всегда приемлемо для практической реализации, так как, кроме граничных условий, существуют требования, определяемые техническими ограничениями. При выборе траекторий достижения поверхности Луны основным требованием является условие прилета КА в заданный район посадки. Для фиксированного наклона к экватору геоцентрической орбиты Земля — Луна достижение поверхности Луны (без выхода на орбиты ИСЗ и ИСЛ) возможно лишь в определенные календарные даты, диапазон  $D_1$  которых необходимо определять. Для управления КА сразу после посадки требуется выполнить определенные условия радиовидимости по крайней мере из двух наблюдательных пунктов на поверхности Земли. Это требование может сузить диапазон допустимых дат до  $D_2 < D_1$ . Часто для нормальной работы отдельных систем КА требуется выполнить в момент посадки определенные условия освещенности, например, на угол склонения Солнца над горизонтом точки посадки; это может сузить диапазон допустимых календарных дат до  $D_3 < D_2$ . Кроме ограничений, соответствующих моменту посадки, могут быть различного вида ограничения на пассивном участке траектории КА. В результате допустимыми с учетом всех ограничений могут оказаться лишь несколько дат года, соответствующих вполне определенным положениям Луны на орбите.

В задачах создания ИСЛ, кроме перечисленных ограничений, могут быть необходимы еще определенные условия освещенности КА на орбите ИСЛ и радиовидимости КА с поверхности Земли и Луны.

В задачах возвращения КА к Земле с орбиты ИСЛ или с поверхности Луны основные ограничения на траекторию вытекают из условий входа КА в земную атмосферу и посадки в заданную точку поверхности Земли. Здесь важно обеспечить заданные радиус условного перигея, наклонение геоцентрической орбиты возвращения к экватору и географические широту и долготу точки условного перигея. Заданная широта точки условного перигея обеспечивается, в основном, выбором склонения Луны в момент старта КА с орбиты ИСЛ, а заданная долгота может быть получена варьированием времени

перелета. Довольно часто в рассматриваемых задачах требуется выполнить еще определенные условия освещенности и радиовидимости КА с Земли в момент его старта с поверхности Луны или с орбиты ИСЛ, а также условия освещенности КА в момент его посадки на поверхность Земли. Все эти ограничения существенно сужают допустимое множество траекторий возвращения.

Обычными требованиями к траекториям облета Луны с пологим входом в атмосферу Земли являются фиксированность полного времени полета и минимального расстояния траектории от поверхности Луны, а также ограничение времени пребывания КА в тени Луны или Земли.

Перечисленные примеры требований и ограничений не исчерпывают всего их разнообразия. Обстоятельства конкретных запусков могут налагать и другие условия, ограничивающие множество допустимых траекторий.

### § 1.3. Основные силы, действующие на КА

При расчете траектории пассивного перелета между Землей и Луной будем предполагать, что эта траектория делает не более одного оборота вокруг Земли (или Луны) в невращающейся геоцентрической (или селеноцентрической) системе координат. Вдоль такой траектории основными силами, действующими на КА, являются притяжения Земли и Луны как материальных точек. Влияние отличия распределения масс этих тел от сферически симметричного является второстепенным фактором для рассматриваемых траекторий. Кроме него, действуют другие второстепенные факторы — возмущения от Солнца, планет и т. д.

В книге [2—1965] рассмотрено влияние сжатия Земли и возмущений от Солнца на геоцентрические траектории полета к Луне. Аналитически и с помощью численного интегрирования показано, что учет влияния сжатия вдоль невозмущенной траектории может дать на расстоянии Луны изменения времени полета и координат порядка  $10^3$  с и  $10^3$  км соответственно. Учет возмущений от Солнца дает изменения порядка 200 с и 200 км. Для большинства «точных» практических расчетов, в том числе проектных, можно ограничиться временами полета порядка 10 сут и точностями порядка 1 с и 1 км.

Примем такие ограничения. Тогда возмущениями от планет можно пренебречь, поскольку массы планет составляют  $10^{-3}$  и меньше от массы Солнца, а расстояние КА до них — порядка расстояния до Солнца и более.

Силовую функцию, т. е. потенциал гравитационного поля планеты, можно представить в виде [1—1971]

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n p_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (3.1)$$

где  $\mu = fM$  — гравитационный параметр планеты ( $f$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса планеты);  $R_0$  — средний радиус ее экватора;  $r$  — планетоцентрический радиус КА;  $\varphi$  — планетоцентрическая широта (склонение КА над экватором планеты);  $\lambda$  — долгота КА;  $p_{nm}$  — присоединенные функции Лежандра;  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  — постоянные коэффициенты, определяемые экспериментально.

Первое слагаемое в (3.1) соответствует сферически симметричному распределению масс планеты. Член  $C_{n=2, m=0}$  во втором слагаемом представляет влияние сжатия (рассмотренное для Земли в книге [3—1965]), члены с другими значениями  $n$ ,  $m$  — влияние других отличий распределения масс от сферически симметричного. Так как коэффициент  $C_{20}$  для Земли на три порядка превосходит другие коэффициенты [1—1971, стр. 433], то для принятых ограничений члены с  $n > 2$ ,  $m > 0$  можно не учитывать. Пренебрегая этими членами, получим силовую функцию гравитационного поля Земли в виде

$$U_G = \frac{\mu_G}{r} \left[ 1 + \frac{A}{3r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right], \quad A = \frac{3C_{20}R_0^2}{2} \quad (3.2)$$

(так называемый гравитационный потенциал нормально-го земного эллипсоида [1—1933]).

Для Луны коэффициент  $C_{20}$  оказывается почти на порядок меньше, чем для Земли [1—1971, стр. 154]. Если учесть, что масса Луны на два порядка меньше массы Земли, то можно пренебречь и несферичностью распределения масс Луны для рассматриваемых времен полета и точностей расчета. Тогда получим силовую функцию

гравитационного поля Луны в виде

$$U_L = \frac{\mu_L}{\rho}. \quad (3.3)$$

Заметим, что в  $\text{grad } U_0$  компонента, обусловленная сжатием, убывает с ростом  $r$  как  $1/r^4$ , а ее отношение к

Таблица 1.1

Наименование возмущений	Вековой уход элементов лунной орбиты (угл. сек)	
	перигея	узла
Влияние Солнца	+14 642 692	-5 967 204
Влияние несферичности Земли	+641	-600
Прямое действие планет	+269	-142
Косвенное действие планет *)	-16	+5

\*) Через изменение движения Земли относительно Солнца.

ускорению, вызываемому сферически симметричным телом с массой Земли, убывает как  $1/r^2$ . Это отношение у поверхности Земли составляет около  $1/600$ , а на расстоянии Луны — менее  $1/2 \cdot 10^6$ . Поэтому для рассматриваемых времен движения (до 10 сут) и точностей расчета влиянием сжатия Земли на движение Луны можно пренебречь.

Возмущение геоцентрического движения Луны Солнцем, конечно, необходимо учитывать, однако возмущениями от планет можно пренебречь, поскольку они на движение Луны влияют меньше, чем несферичность Земли, как показывает табл. 1.1 [2—1968].

Кроме гравитационных сил, на движение КА по траекториям перелета между Землей и Луной влияют силы светового давления, электромагнитные силы, аэродинамические силы (в земной атмосфере). Действием первых двух сил для рассматриваемых времен полета (до 10 сут) можно пренебречь. Однако при значительном увеличении времени перелета КА между Землей и Луной результат действия этих сил может накапливаться, и тогда их необходимо учитывать в расчетах. Более подробные сведения о влиянии сил светового давления и элект-

ромагнитных сил приведены в [3—1965]. Влиянием аэродинамических сил тоже можно пренебречь, рассматривая траектории лишь вне земной атмосферы на высоте 200 км и выше. Таким образом, при «точном» расчете пассивного участка траектории движения КА следует учитывать, кроме притяжения Земли и Луны, лишь влияние сжатия Земли и возмущения от Солнца.

На активном участке траектории необходимо, конечно, учитывать реактивное ускорение

$$j_P = \frac{P}{m(t)}, \quad P = -u_P \frac{dm}{dt}, \quad (3.4)$$

где  $m(t)$  — масса КА,  $u_P$  — скорость истечения реактивной струи,  $P$  — тяга двигателя (принимаемая в расчетах величиной порядка веса КА). Точный расчет выполняется обычно на ЭВМ одним из методов численного интегрирования.

Для рассматриваемых двигателей время активного полета мало по сравнению со временем пассивного перелета между Землей и Луной. Это позволяет применять аналитические приближенные методы в задачах анализа движения на активном и пассивном участках, существенно сокращая машинное время расчета траекторий.

## § 1.4. Уравнения движения

Дифференциальные уравнения движения запишем в прямоугольной невращающейся геоцентрической экваториальной системе координат  $m_0x, y, z_0$ . Ось  $m_0x$  этой системы направим в точку  $\Upsilon$  весеннего равноденствия (например, эпохи 1970.0), ось  $m_0z_0$  направим вдоль вектора угловой скорости вращения Земли  $\omega_0$ , а осью  $m_0y_0$  дополним систему осей координат до правой тройки.

Векторное уравнение движения КА на пассивном участке траектории в данной системе координат имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S) = \text{grad } U_G + \mu_L \left( \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} \right) + \mu_S \left( \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \quad (4.2)$$

где  $U_G$  — силовая функция гравитационного поля Земли, определяемая формулой (3.1);  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_L$ ,  $\mathbf{r}_S$  — радиусы-векторы КА, Луны и Солнца;  $\mu_L$  и  $\mu_S$  — гравитационные параметры Луны и Солнца. В (4.2) первый член представляет влияние Земли, второй — Луны, третий — Солнца.

Аналогично записывается векторное уравнение движения в селеноцентрической системе координат  $m_L \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ , оси которой параллельны осям системы  $m_G x_0 y_0 z_0$ :

$$\ddot{\rho} = \Phi(\rho, \mathbf{r}, \mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \rho, \quad (4.3)$$

$$\Phi(\rho, \mathbf{r}, \mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S) = -\mu_L \frac{\rho}{\rho^3} + \mu_G \left( \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \mu_S \left( \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_L|^3} \right). \quad (4.4)$$

При переходе в эту систему из системы  $m_G x_0 y_0 z_0$  кинематические параметры и, в частности, начальные данные получаются по формулам  $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_L$ ,  $\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_L$ . Радиусы-векторы  $\mathbf{r}_L$ ,  $\mathbf{r}_S$  могут быть взяты из таблиц Астрономического ежегодника или найдены с помощью ЧИ уравнений задачи трех тел Земля — Луна — Солнце в геоцентрической системе координат:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_L &= -\frac{\mu_G + \mu_L}{r_L^3} \mathbf{r}_L + \mu_S \left( \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_L|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_S &= -\frac{\mu_S + \mu_G}{r_S^3} \mathbf{r}_S + \mu_L \left( \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_S|^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{r_L^3} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

На активном участке траектории в правую часть уравнений движения КА (4.1)–(4.3) будет входить еще реактивное ускорение (3.4). К уравнениям (4.1)–(4.3) в связи с этим добавляются уравнения изменения массы  $m$  КА и затрат  $W$  характеристической скорости. Полная система уравнений в геоцентрической системе координат примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S) + \frac{\mathbf{P}}{m}, \quad \frac{dm}{dt} = f_m(t), \quad \frac{dW}{dt} = \frac{P}{m}, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{P}$  — тяга двигателя КА,  $f_m(t)$  — секундный расход массы КА (заданная функция).

Заметим, что при использовании двигателей, работающих на химических топливах, активный участок имеет

продолжительность порядка 10 мин и менее (при близком к оптимальному соотношению между тягой и начальным весом КА). Поскольку активные участки расположены на концах траектории перелета, то вдоль них расстояние до ближайшего притягивающего тела ( $m_G$  или  $m_L$ ) гораздо меньше  $r_L$ . Поэтому в уравнениях движения КА на активном участке (4.6) можно пренебречь влиянием возмущений (от Луны и Солнца в случае маневра у Земли и от Земли и Солнца в случае маневра вблизи Луны).

Если на пассивном участке пренебречь влиянием Солнца и несферичности Земли, то из уравнений (4.1) — (4.3) получатся уравнения *ограниченной задачи трех материальных точек*. Если дополнительно предположить, что орбита Луны — круговая, то получим уравнение *ограниченной круговой задачи трех точек*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_G}{r^3} \mathbf{r} + \mu_L \left( -\frac{\rho}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}_L}{a_L^3} \right). \quad (4.7)$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}_L$  равномерно обходит окружность радиуса  $r_L = a_L = 384$  тыс. км за сидерический месяц,  $a_L$  — большая полуось лунной орбиты. В селеноцентрической системе координат уравнения этой задачи получим в виде

$$\ddot{\rho} = -\mu_L \frac{\rho}{\rho^3} + \mu_G \left( -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}_L}{a_L^3} \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \rho. \quad (4.8)$$

В правых частях (4.7), (4.8) вторые члены (назовем их  $F_L$ ,  $F_G$ ) представляют возмущения, а притяжения центрального тела выражаются первыми членами (назовем их  $g_G$  и  $g_L$ ). Если пренебрегать возмущениями, то при  $F_L/g_G < F_G/g_L$  точнее будет счет по уравнениям (4.7); при обратном неравенстве точнее будет счет по уравнениям (4.8).

**Определение.** Область пространства около массы  $m_L$ , в которой  $F_G/g_L < F_L/g_G$ , называется *сферой действия* (СД) массы  $m_L$  относительно массы  $m_G$ .

Эту сферу (sphere d'activite) ввел в небесную механику Лаплас [1—1805]. Она близка к  $m_L$ -центрической сфере радиуса  $\rho_* = r_L \cdot \mu^{2/5}$ , где  $\mu = \mu_L/\mu_G$ . На ее поверхности [2—1937, стр. 194]

$$F_G/g_L = F_L/g_G \leq (4\mu)^{1/5}.$$

Эти отношения убывают вместе с  $\mu$ , так что в случае полного пренебрежения возмущениями при переходе значения  $|\rho|$  через  $\rho_*$  смена центрального тела тем выгоднее для точности счета, чем меньше отношение  $\mu_L/\mu_G$  притягивающих масс.

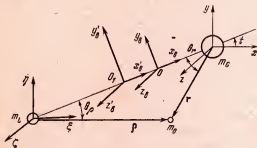


Рис. 1.1. Основные системы координат.  $O$  — центр масс системы Земли ( $m_G$ ) — Луна ( $m_L$ ).

Иногда удобно исследовать траектории в *барицентрической вращающейся вместе с прямой  $m_G m_L$  системе координат  $Ox_y z_y$* . Начало  $O$  этой системы (рис. 1.1) расположено в барицентре (центре масс) пары точек  $m_G m_L$ . Ось  $Ox_y$  направлена из начала координат в центр  $m_G$  Земли, ось  $Oy_y$  противоположна скорости Луны  $V_L$ . В этой системе координат уравнения круговой ограниченной задачи трех точек (КА — Земля — Луна) имеют наиболее простой вид:

$$\ddot{x}_y = 2\dot{y}_y + \frac{\partial J}{\partial x_y}, \quad \ddot{y}_y = -2\dot{x}_y + \frac{\partial J}{\partial y_y}, \quad \ddot{z}_y = \frac{\partial J}{\partial z_y}, \quad (4.9)$$

$$J = \frac{1}{2}(x_y^2 + y_y^2) + \frac{\mu_G}{r} + \frac{\mu_L}{\rho}. \quad (4.10)$$

Здесь  $r$  и  $\rho$  — расстояния КА от  $m_G$  и  $m_L$ . За единицу длины выбрано постоянное расстояние  $a_L$  между центрами Земли и Луны, за единицу времени — величина  $T_L/2\pi$ , где  $T_L$  — сидерический месяц. Заметим, что по третьему закону Кеплера в принятых единицах измерения получается

$$\mu_G + \mu_L = a_L^3 \left( \frac{T_L}{2\pi} \right)^{-2} = 1.$$



## Глава 2

### МЕТОДЫ ТОЧНОГО РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ

#### § 2.1. О решении задачи Коши для уравнений движения

Системы дифференциальных уравнений движения (1.4.1)—(1.4.6) приходится решать на ЭВМ одним из методов численного интегрирования (ЧИ). На ЭВМ наиболее часто применяется (поскольку относительно легко реализуется) метод Рунге — Кутты, хотя некоторые другие методы требуют меньше машинного времени (например, методы Адамса, Штермера, Коуэлла [2—1937, стр. 146]). Для использования метода Рунге — Кутты система дифференциальных уравнений второго порядка преобразуется путем введения новой переменной в систему уравнений первого порядка. Минимального порядка (шестого) система

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = f \quad (1.1)$$

получается из (1.4.1), если движение Луны и Солнца задается таблицами Астрономического ежегодника.

С точки зрения техники программирования целесообразно в программе ЧИ системы (1.1) выделить следующие блоки, вычисляющие правые части дифференциальных уравнений: терминальные условия; оскулирующие элементы орбит КА, Луны, Солнца; кинематические параметры КА; параметры движения КА относительно поверхности Земли и Луны; управляющую часть программы.

При программировании основное внимание обычно уделяется повышению точности расчета траектории и

уменьшению времени решения задачи Коши для исследуемой системы дифференциальных уравнений. Требования, определяющие точность и скорость вычисления, обычно являются противоречивыми, поэтому приходится принимать компромиссные решения. Особое внимание следует обращать на быстроту работы блока вычисления правых частей, так как при использовании метода Рунге — Кутта вычисление правых частей уравнений движения на каждом шаге интегрирования производится несколько раз (обычно четыре).

Рассмотрим основные пути повышения точности и скорости численного расчета траектории КА в гравитационном поле Земли, Луны и Солнца. Точность и скорость здесь определяются главным образом величиной шага интегрирования и качеством составления программы вычисления правых частей. Излишнее уменьшение шага интегрирования может снизить точность вычисления из-за увеличения числа  $n$  шагов, так как ошибки в координатах для систем уравнений типа (1.4.1) — (1.4.8) после  $n$  шагов численного интегрирования пропорциональны  $n^{3/2}$  [1—1971]. Однако чрезмерное увеличение шага интегрирования также снижает точность из-за роста методической ошибки.

Опыт вычисления пассивного участка спутниковой траектории вблизи поверхности Земли и Луны методом ЧИ в декартовых координатах показывает, что при точности счета координат порядка  $10^{-4}$  км увеличение шага интегрирования сверх 60 с недопустимо. Этот шаг и определяет скорость вычисления на ЭВМ спутниковых траекторий методом ЧИ (в прямоугольных координатах).

Шаг интегрирования активного участка траектории зависит от тяговооруженности  $v_0$  (отношение тяги двигателя к начальному весу КА) и составляет примерно 1—2 с для  $0,3 \leq v_0 \leq 1$ .

По мере удаления КА от притягивающего центра выгодно увеличивать шаг интегрирования для увеличения скорости расчета (при заданной его точности). Поэтому траектории перелета КА между Землей и Луной рассчитываются с переменным шагом интегрирования, причем на отдельных участках пассивного полета выбор шага интегрирования целесообразно осуществлять автоматически, используя различные алгоритмы выбора шага [3—

1970]. Такая автоматизация выбора шага может существенно увеличить скорость расчета.

Целесообразно, например, траекторию полета КА с орбиты ИСЗ на орбиту ИСП разбить на пять участков, на каждом из которых шаг интегрирования выбирается по-своему. На участке I разгона с орбиты ИСЗ шаг интегрирования постоянен и лежит в пределах от 1 до 2 с при точности счета  $10^{-4}$  км. На пассивном участке II полета до  $|r| \leq 100$  тыс. км шаг интегрирования переменен и выбирается автоматически, исходя из обеспечения точности счета координат, равной  $10^{-4}$  км. На участке III, удаленном от Земли и Луны от  $|r| > 100$  тыс. км до  $|p| = 100$  тыс. км, шаг интегрирования переменен и выбирается также автоматически, только с другими константами выбора шага. На участке IV  $|p| < 100$  тыс. км, шаг интегрирования выбирается автоматически с теми же константами выбора шага, что и на участке II. На активном участке V у Луны шаг интегрирования постоянен и равен 1—2 с. При интегрировании уравнений движения в другой системе координат участки и константы для изменения шага интегрирования могут быть другими.

Для сохранения точности вычисления необходимо соблюдение известных [2—1969, стр. 75—90] правил программирования (особенно при составлении программы вычисления правых частей):

1) при сложении и вычитании последовательности чисел необходимо начинать с наименьших чисел;

2) необходимо избегать вычитания двух почти равных чисел. Формулы, содержащие такое вычитание, нужно преобразовать так, чтобы избежать подобной операции. Если числа в разности, которая умножается или делится, почти равны друг другу, то вычитание производится ранее умножения или деления;

3) в любом случае необходимо свести к минимуму число арифметических операций и в полной мере использовать циклические возможности программирования. В частности, целесообразно в блоке правых частей выявить наибольшее число групповых операций и запрограммировать их в виде циклической программы. Использование стандартных программ и обращений к внешней памяти ЭВМ в блоке правых частей нецелесообразно, так как может резко увеличить машинное время ЧИ.

Желательно использование только оперативной памяти ЭВМ при предельном сокращении выдачи промежуточных результатов.

Выполнение указанных правил программирования помогает сохранить скорость ЧИ при заданной точности. Например, при точности координат порядка  $10^{-4}$  км удастся решить задачу Коши на ЭВМ с быстродействием около 20 тыс. оп./с за 30 с (для траекторий с временем перелета между Землей и Луной от 3 до 4 суток). Время решения подобной задачи Коши на ЭВМ БЭСМ-6 составляет 10 с при использовании программы на языке Фортран.

При расчете траекторий КА методом ЧИ следует предусмотреть возможность выхода из программы интегрирования при выполнении заданного терминального условия, например условия достижения заданного расстояния от Земли (или от Луны) или другого условия. Блок терминальных условий должен быть обособленным и должен обеспечивать возможность включения в него любого нового терминального условия.

Блок расчета оскулирующих элементов орбит КА, Луны, Солнца по декартовым компонентам векторов радиуса и скорости использует известные формулы (см. [1—1968] и Приложение 8).

Блок расчета кинематических параметров движения КА по заданным кеплеровым элементам орбиты также использует соотношения из [1—1968] (см. Приложение 7).

Блок вычисления азимута, склонения и вектора угловой скорости КА относительно заданного наблюдательного пункта на поверхности Земли и Луны работает по формулам, приведенным в Приложении 9.

В задаче Коши для системы дифференциальных уравнений (1.4.1)—(1.4.5) пассивного движения необходимо задать начальные данные — время  $t$ , координаты и компоненты скорости КА  $r(x, y, z)$ ,  $V(x, y, z)$ , Луны  $r_L(x_L, y_L, z_L)$ ,  $V_L(x_L, y_L, z_L)$  и Солнца  $r_s(x_s, y_s, z_s)$ ,  $V_s(x, y_s, z_s)$ . Начальные значения векторов  $V_L$  и  $V_s$  задаются таблицами Астрономического ежегодника на ноль часов эфемеридного времени. Поэтому интегрирование системы уравнений (1.4.1)—(1.4.5) ведется по эфемеридному времени от начала даты старта. Интегрируются сначала

уравнения движения Луны и Солнца до заданного момента начала движения КА. С этого момента уравнения движения КА (активного или пассивного) добавляются к прежним уравнениям. Соответственно уменьшается шаг ЧИ. Полученная полная система интегрируется до конца, т. е. до момента выполнения одного из заданных

Т а б л и ц а 2.1

№ п/п	Наименование задачи	Время в секундах	
		М-222	БЭСМ-6
1	Перелет с орбиты ИСЗ на поверхность Луны (активный участок — только у Земли)	45	20
2	Перелет с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ или мягкая посадка на поверхность Луны (два активных участка)	55	25
3	Возвращение от Луны к Земле (один активный участок)	45	20
4	Семисуточный облет Луны с возвращением в земную атмосферу	95	1 50

терминальных условий. Более подробное описание процесса решения задачи Коши для системы (1.4.1) дано в Приложении 6. Продолжительность решения задачи Коши на ЭВМ М-222 и БЭСМ-6 для траекторий с временем перелета 3—4 сут приведена в табл. 2.1.

## § 2.2. Метод многих конических сечений

Существенного уменьшения времени расчета траектории перелета между Землей и Луной вряд ли удастся достичь только путем совершенствования методов численного интегрирования и повышения качества программирования. Результаты табл. 2.1, по-видимому, следует считать близкими к предельным для рассматриваемых задач, решаемых на указанных классах ЭВМ. Ускорения точного расчета траекторий можно ожидать, по-видимому, от новых методических подходов.

Интересным в этом отношении представляется *метод многих конических сечений* (МКС) (19—1970). Идея его состоит в том, что искомая траектория в нем рассмат-



те на промежутке времени  $[t_0, t_1]$ , где  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . Вычисляются по эфемеридам и запоминаются векторы состояния Солнца и Луны в момент  $t_1$  (они затем рассматриваются как начальные для следующего промежутка).

Находятся средние ускорения, соответствующие третьему (лунному) и четвертому (солнечному) членам уравнения (2.1):

$$j_L = -\mu_L \frac{r_L}{r_L^3}, \quad r_L = \frac{r_L(t_0) + r_L(t_1)}{2}, \quad (2.2)$$

$$j_S = -\frac{\mu_S}{2} \left\{ \left[ \frac{r - r_S}{|r - r_S|^3} + \frac{r_S}{r_S^3} \right]_{t_0} + \left[ \frac{r - r_S}{|r - r_S|^3} + \frac{r_S}{r_S^3} \right]_{t_1} \right\}. \quad (2.3)$$

Состояние  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{V}$  КА в момент  $t_1$  на дуге  $M_0\tilde{M}$  корректируется поправками

$$\Delta V = (j_L + j_S) \Delta t, \quad \Delta r = \frac{1}{2} (j_L + j_S) \Delta t^2, \\ r_1 = \tilde{r}_1 + \Delta r, \quad V_1 = \tilde{V}_1 + \Delta V \quad (2.4)$$

(на рис. 2.1 скорректированное положение отмечено точкой  $\tilde{N}$ ).

В момент  $t_1$  скорректированное состояние  $r_1$ ,  $V_1$  преобразуется к соответствующему состоянию  $\rho$ ,  $U$  в селеноцентрической системе координат, где из него в обращенном времени строится прямолинейная траектория  $\tilde{N}N_0$  (без учета гравитации) до начального момента  $t_0$ .

Из полученного состояния  $\rho_0$ ,  $U_0$  строится селеноцентрическое коническое сечение  $N_0M_1$  до момента  $t_1$ . Полученное в этот момент состояние преобразуется к геоцентрической системе для использования затем в качестве начального состояния на следующем промежутке  $\Delta t$ . Описанная последовательность расчетов повторяется на каждом элементарном промежутке времени. Таким образом, в методе МКС пренебрегается несферичностью Земли; кроме того, для получения селеноцентрического состояния в момент  $t_0$  используется состояние геоцентрического движения в момент  $t_1$ , а не в промежуточный момент, как следовало бы (по теореме о среднем в силу непрерывности движения). Погрешностью, происходящей

от этого, пренебрегается. Пренебрегается также взаимодействием возмущений с невозмущенным движением внутри интервала  $\Delta t$  (осредненное их влияние учитывается лишь в конце интервала  $\Delta t$ ).

При расчете облетных траекторий или траекторий возвращения от Луны к Земле алгоритм модифицируется

Таблица 2.2

№ п/п	Наименование метода	Время расчета в секундах
1	Численное интегрирование	45
2	Метод МКС	10
3	Метод ИВ	2

на участках движения КА от Луны так, что геоцентрическая и селеноцентрическая системы координат меняются ролями. Эти вопросы подробно рассматриваются в [9—1970].

Достоинством метода является его простота и единообразие для всех участков траектории независимо от того, далеко или близко они проходят от Луны или Земли. Дополнительные предположения, основанные на близости к тому или иному притягивающему центру, лишь незначительно повышают его эффективность, нарушая в то же время его единообразие.

Было обнаружено [8—1970], что погрешность от пренебрежения несферичностью Земли гораздо больше, чем все остальные погрешности, вместе взятые. Для уменьшения этой ошибки можно при вычислении влияния возмущений учесть второй член разложения геопотенциала в виде (1.3.2). При этом следует иметь в виду, что эффект несферичности существен лишь до расстояний порядка нескольких радиусов от центра Земли.

Результаты расчетов траекторий КА в гравитационном поле Земли и Луны, приводимые в работах [8, 9—1970], показывают, что скорость вычисления траектории данным методом больше скорости численного интегрирования на порядок. Она всего лишь в пять-шесть раз меньше, чем при вычислении методом ИВ (§ 4.1).



Данные о сравнении метода МКС с численным интегрированием и методом ИВ приведены в табл. 2.2 для условий расчета на ЭВМ М-222 траектории перелета с орбиты ИСЗ к Луне (время перелета  $\sim 4$  суток).

Поскольку метод МКС аппроксимирует малые переменные гравитационные возмущения постоянными на элементарном промежутке  $\Delta t$ , то он может учитывать и другие возмущения (малая реактивная тяга, давление солнечных лучей, магнитные силы и пр.). Время вычислений траектории при этом соответственно возрастает.

### § 2.3. Численное решение краевых задач

Задача Коши, которая рассматривалась в § 2.1, обычно входит составной частью в краевую задачу, т. е. задачу с заданными: граничными условиями, дифференциальными уравнениями типа (1.4.1)—(1.4.8) и, возможно, некоторыми дополнительными требованиями (связанными, например, с научным назначением и технической реализацией полета). Поэтому можно считать, что в дифференциальных уравнениях (1.4.6) движения на активном участке  $r, V$  — фазовые координаты из заданного множества  $B_r$ , а  $P$  — трехмерный вектор управления из заданного множества  $U_r$ . Множество  $B_r$  определяется научно-техническими ограничениями на траекторию и различно для разных конкретных задач.

Пусть заданы множества  $Y_1$  и  $Y_2$  конечных данных  $y_1$  и  $y_2$  соответственно на околоземном и окололунном концах траектории:

$$y_1 \in Y_1, \quad y_2 \in Y_2. \quad (3.1)$$

Элемент  $y_1$  может быть парой географических координат на поверхности Земли, может дополнительно содержать азимут направления запуска, может быть набором части (или всех шести) кеплеровых элементов орбиты ИСЗ и т. д. В случае, когда задано число элементов  $n < 6$ , имеем в качестве  $y_1$   $(6-n)$ -параметрическое семейство орбит ИСЗ. Аналогично элемент  $y_2$  может быть парой селеноцентрических (или селенографических) координат точки на поверхности Луны, либо набором части (или всех) элементов орбиты ИСЛ и т. д.

Пусть для каждой пары  $y_1, y_2$  граничных данных  $y_1 \in Y_1$  и  $y_2 \in Y_2$  имеется непустое множество  $D_0$  допустимых траекторий, т. е. таких, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.4.6), граничным условиям  $Y_1$  и  $Y_2$  (3.1) и вдоль которых фазовые координаты и управления принадлежат множествам  $B_1$  и  $U_1$  соответственно.

Каждая траектория из множества  $D_0$  ее точкой на СД делится на два участка — геоцентрический и селеноцентрический. Считается, что активные участки на траекториях из  $D_0$  располагаются вблизи Земли и Луны (на максимальных расстояниях  $r_1, r_2$  порядка тысячи километров, т. е.  $r_1 \ll r_L, r_2 \ll r_L$ ). Рассмотрим краевую задачу интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.4.6) при краевых условиях  $y_1 \in Y_1$  и  $y_2 \in Y_2$  [1—1963, 4—1966]. При перелете КА между орбитами ИСЗ и ИСЛ и обратно в роли множеств  $Y_1$  и  $Y_2$  в краевых условиях выступают элементы спутниковых орбит у Земли и Луны. В задаче достижения поверхности Луны множествами  $Y_1$  и  $Y_2$  являются элементы орбиты ИСЗ и координаты точки посадки на Луне. В задаче возвращения с орбиты ИСЛ к Земле этими множествами будут:  $Y_1$  — элементы геоцентрических орбит КА с заданными параметрами в условном перигее и  $Y_2$  — заданные элементы орбиты ИСЛ. В задаче возвращения к Земле с поверхности Луны  $Y_2$  — координаты точки на поверхности Луны,  $Y_1$  — элементы геоцентрической орбиты с заданными параметрами в условном перигее.

В задачах облета Луны, кроме обычных условий на концах, требуется еще, чтобы расстояние пролета КА от поверхности Луны было не меньше заданного. Поэтому задача облета Луны более трудоемка, чем предыдущие задачи.

Пусть в краевой задаче, кроме начальных условий  $Y_1$  и конечных  $Y_2$  соответственно, заданы еще фиксированные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Пусть при  $t = t_1$  имеется  $k$  параметров задачи — аргументов  $a_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ), которые можно выбирать свободно, не нарушая граничных условий из множества  $Y_1$ . Пусть при  $t = t_2$  выполнение условия  $y_2 \in Y_2$  эквивалентно заданию связей между  $r_k, V_k$  вида  $F_i(a_j) = \bar{F}_i$ , или  $F(a) = \bar{F}$ , где  $k$ -мерные векторы  $F = \{F_i\}$ ,  $a = \{a_j\}$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ , а чертой сверху

отмечено заданное значение вектора  $F$ . Тогда путем решения задачи Коши для системы (1.4.6) каждому набору аргументов  $\tilde{a}$  ставится в соответствие в момент  $t' = t_k$  какое-то значение функции  $F(\tilde{a}) = \tilde{F}$ . Для удовлетворения граничных условий из  $Y_k$  необходимо при окончании интегрирования системы (1.4.6) в момент времени  $t_k$  получить равенства

$$\tilde{F}_i - \bar{F}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2)$$

Таким образом, решение краевой задачи эквивалентно решению системы нелинейных уравнений (3.2), заданной через решения задачи Коши для системы (1.4.6). Число  $k$  уравнений в системе (3.2) в разных задачах перелета между Землей и Луной может быть различно:  $1 \leq k \leq 4$ .

Заметим, что для рассматриваемых краевых задач установить заранее существование решения не всегда возможно. Решение краевой задачи является нередко сложной проблемой, и, по-видимому, не существует в настоящее время универсальных регулярных алгоритмов, гарантирующих решение подобных задач.

Численные методы решения нелинейных краевых задач являются обычно итерационными [3—1970]. Наиболее распространены итерационные методы Ньютона, Эйткена — Стеффенсена и различные методы градиентного спуска [1—1962], [3—1970]. Для их сходимости требуется задание начальных значений аргументов  $a_i$ , достаточно близких к искомому решению.

В каждой конкретной краевой задаче выбор аргументов  $a_i$  и функций  $F_i$  делается так, чтобы улучшить сходимость краевой задачи. Основные трудности решения краевых задач для перелетов КА между Землей и Луной обычно вызываются нелинейностью функций  $F(a)$ . В задаче облета Луны при неудачном выборе функций  $F_i$  незначительное отклонение вектора  $a$  от искомого может нарушить сходимость краевой задачи.

Поэтому для рассматриваемых краевых задач актуальным является вопрос о разработке способов расчета начальных значений аргументов краевой задачи. Существующие приближенные методы расчета траекторий позволяют построить различные алгоритмы вычисления на-

чальных значений аргументов для задач перелета между Землей и Луной. В некоторых наиболее трудных краевых задачах приходится получать начальные приближения для аргументов путем решения предварительной краевой задачи (построенной для упрощенной модели движения),

Таблица 2.3

№ п/п	Наименование задачи	Время в минутах	
		М-222	ВЭСМ-6
1	Перелет с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ или достижение поверхности Луны (активный участок только у Земли)	10	5
2	Перелет с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ или мягкая посадка на поверхности Луны (два активных участка)	15	7
3	Возвращение от Луны к Земле (один активный участок)	10	5
4	Семисуточный облет Луны с возвращением в земную атмосферу	25	15

что приводит к дополнительным затратам машинного времени.

Таким образом, численное решение краевой задачи перелета между Землей и Луной в точной постановке сводится к проведению следующих расчетов: определение начальных приближений аргументов; решение задачи Коши для системы (1.4.6) (по крайней мере одно решение на каждой итерации); решение системы нелинейных уравнений (3.2), осуществляемое в лучшем случае за  $2k$  итераций.

При использовании методов ТСД и ИВ для расчета начальных значений аргументов время численного решения краевой задачи методом Ньютона в описанной постановке для траекторий со временем перелета в один конец от 3 до 4 суток приведено в табл. 2.3.

## Глава 3

### НЕОБХОДИМЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ СКОРОСТИ И НЕВОЗМОЖНОСТЬ ЗАХВАТА В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТОЧЕК

Определение минимальных начальных скоростей, обеспечивающих достижение Луны, стало практически актуальным в конце 50-х годов. В это же время возник интерес и к вопросу о возможности захвата КА Луной, т. е. о возможности создания ИСЛ без помощи двигателя. Эти вопросы были рассмотрены в работах [1; 2—1957; 1—1959].

Для теоретического решения вопросов о минимальных скоростях, необходимых для достижения Луны, и о возможности захвата КА Луной используются уравнения ограниченной круговой задачи трех точек и энергетический подход (аналогичный примененному Хиллом [1—1877]).

#### § 3.1. Теоретическое решение вопроса о минимальных начальных скоростях

Рассмотрим круговую ограниченную задачу трех материальных точек:  $m_0$  — КА,  $m_e$  — Земля,  $m_L$  — Луна. Уравнения этой задачи (1.4.9), записанные в барицентрической вращающейся системе координат  $Ox_zy_z$ , имеют известный [2—1937] интеграл Якоби

$$\frac{1}{2} V^2 = J + \tilde{h}, \quad (1.1)$$

где  $V$  — скорость КА в системе координат  $Ox_zy_z$ ,  $\tilde{h} = \text{const.}$

Движение при фиксированном значении  $\tilde{h}$  ограничено поверхностями нулевой скорости, введенными

Хиллом:

$$J = -\tilde{h}. \quad (1.2)$$

С помощью исследования уравнения (1.2) можно показать [2—1937], что при больших отрицательных значениях  $\tilde{h}$  движение возможно только внутри неосприкасающихся поверхностей  $S_G$  и  $S_L$ , близких к сферам с центрами  $m_G$  и  $m_L$ , да еще вне охватывающей  $S_G$  и  $S_L$  овальной поверхности  $S$ . Сечение каждой из поверхностей  $S$ ,  $S_G$ ,  $S_L$  плоскостью  $x, y$ , близко к кругу. При начальной скорости  $V_0 = 0$  поверхность проходит через начальную точку пассивного участка траектории, а с ростом  $V_0$  эта поверхность увеличивается в размерах, удаляясь от тела  $m_G$ . Поскольку пассивный участок траектории начинается на расстояниях, много меньших расстояния до Луны, то при малых значениях начальной скорости  $V_0$  движение может происходить только внутри поверхности  $S_G$  и сближение с Луной невозможно.

С увеличением начальной скорости  $V_0$  величина  $\tilde{h}$  растет, поверхности  $S_G$  и  $S_L$  расширяются, сближаясь, а поверхность  $S$  сужается. При некотором  $V_0 = V_0^{(1)}$  функция  $\tilde{h}(V_0)$  достигнет такого значения  $\tilde{h} = \tilde{h}_1$ , что поверхности  $S_G(\tilde{h}_1) \equiv S_G^{(1)}$  и  $S_L(\tilde{h}_1) \equiv S_L^{(1)}$  будут иметь одну общую точку  $L_1$ . При малом значении разности  $\tilde{h} - \tilde{h}_1$  они образуют одну поверхность  $S_{LG}$  с горловиной около точки  $L_1$ . Становится возможным проникновение траектории, начавшейся вблизи тела  $m_G$ , в область вокруг тела  $m_L$ , что необходимо для сближения КА с Луной.

Половина сечения плоскостью  $x, y$ , поверхностей  $S^{(1)}$ ,  $S_G^{(1)}$ ,  $S_L^{(1)}$ , соответствующих значению  $\tilde{h} = \tilde{h}_1$  (кривые  $S^{(1)}$ ,  $S_G^{(1)}$ ,  $S_L^{(1)}$ ), представлена на рис. 3.1. Другая половина симметрична представленной относительно оси  $x$ .

При дальнейшем росте начальной скорости  $V_0$  до значения  $V_0^{(2)}$  функция  $\tilde{h}(V_0)$  достигает критического значения  $\tilde{h}_2 > \tilde{h}_1$ , отвечающего соприкосновению поверхностей  $S(\tilde{h}_2) \equiv S^{(2)}$  и  $S_{LG}(\tilde{h}_2) \equiv S_{LG}^{(2)}$  в точке  $L_2$  (кривые  $S^{(2)}$  и  $S_{LG}^{(2)}$  на рис. 3.1), так что становится возможным уход КА от Земли в бесконечность через горловину вбли-

зи точки  $L_2$ . Следовательно, минимальная скорость, необходимая для достижения Луны, равна  $V_0^{(1)}$ , а минимальная скорость, при которой КА может уйти в бесконечность, равна  $V_0^{(2)}$ .

Кроме критических значений  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$ , существуют критические значения  $\tilde{h}_3 > \tilde{h}_2$  и  $\tilde{h}_4 > \tilde{h}_3$ . Значение  $\tilde{h}_3$  соответствует возможности ухода КА в бесконечность

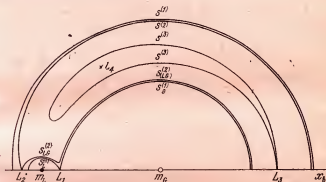


Рис. 3.1. Сечение критических поверхностей нулевой скорости для системы Земля — Луна плоскостью лунной орбиты.

через горловину вблизи точки  $L_3$  (см. кривую  $S^{(3)}$  на рис. 3.1).

Значение  $\tilde{h}_4$  отрицательно и отвечает исчезновению кривых нулевой скорости на плоскости  $x, y$  в симметричных относительно оси  $x$  точках  $L_4$  и  $L_5$  (точка  $L_4$  отмечена на рис. 3.1 крестиком), т. е. соответствует возможности ухода КА в бесконечность по любому направлению в плоскости  $x, y$ . Исчезновение поверхностей, ограничивающих пространственное движение, происходит при  $\tilde{h} = 0$ .

Точки  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) — так называемые *точки либрации* — расположены в плоскости орбиты Луны и могут быть найдены как особые точки поверхностей (1.2). Значение  $\tilde{h}$  находится из интеграла Якоби (1.1) при  $V = 0$  по координатам точек  $L_i$ , а соответствующие критические начальные скорости  $V_0^{(i)}$  находятся из того же

интеграла при  $\tilde{h} = \tilde{h}_i$  по координатам заданной начальной точки.

Заметим, что величина критической начальной скорости  $V_0^{(i)}$  получается одной и той же независимо от ее направления, хотя она изменяется от точки к точке. Однако из выражений (1.4.9) и (1.1) следует, что на сфере малого радиуса  $r$  скорости  $V_0^{(i)}$  от точки к точке меняются мало.

Таблица 3.1

Точка либрации	$r_i$	$\rho_i$	$\tilde{h}_i$	$V_0^{(i)}$ ед $2\pi a_L/T_L$	$V_0^{(i)}$ км/с
$L_1$	0,8491539	0,1508461	-1,594067	10,60335	10,84890
$L_2$	1,1677237	0,1677237	-1,585991	10,60411	10,84968
$L_3$	0,9929263	1,9929263	-1,506062	10,61165	10,85738
$L_{4,5}$	1	1	-1,494001	10,61278	10,85854

Оказывается, на сфере, соответствующей высоте 200 км над земной поверхностью, изменение скоростей  $V_0^{(i)}$  будет порядка  $5 \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi a_L/T_L$ , где  $a_L = 384\,400$  км, так что практически скорости  $V_0^{(i)}$  не зависят от положения начальной точки на сфере. (Здесь, как и при расчете кривых на рис. 3.1, принималось  $m_a: m_L = 81,45$ .)

Результаты расчета расстояний  $r_i$  и  $\rho_i$  точек либрации соответственно от Земли и Луны, критических энергий  $\tilde{h}_i$  и критических скоростей  $V_0^{(i)}$  приведены в табл. 3.1 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Высота начальной точки траектории принята равной 200 км. Такая начальная высота выбрана потому, что рассчитанные для нее траектории действительны и для больших начальных высот. Из табл. 3.1 видно, что отличие первой критической скорости от четвертой составляет величину менее 10 м/с, причем отличие первой скорости от второй и третьей от четвертой — всего лишь порядка 1 м/с. Расстояние точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  от Луны равны соответственно 58 тыс. км и 65 тыс. км, т. е. обе эти точки находятся внутри СД Луны, довольно близко от ее границы.



Интересно выяснить, что представляют собой траектории минимальной скорости и можно ли вблизи Земли сообщить КА такую начальную скорость, чуть большую минимальной, чтобы он по восходящей траектории поднялся к точке либрации  $L_1$ , прошел с малой скоростью горловину и затем достиг Луны. Это можно узнать, находя траектории методом ЧИ на ЭВМ, причем проще это сделать для случая движения КА в плоскости орбиты Луны.

В связи с неограниченным возрастанием правых частей уравнений (1.4.9) при сближении КА с Луной в плоской задаче было использовано известное преобразование Тиле [1—1936]. Для его применения начало системы координат помещается в середину  $O$  отрезка  $m_G m_L$ , а за единицу измерения длины вместо  $a_L$  берется величина  $a_L/2$  (рис. 1.1). Тогда можно написать:

$$x'_B = c + 2x_B, \quad y'_B = 2y_B, \quad c = \frac{m_G - m_L}{m_G + m_L} = 0,9757478. \quad (1.3)$$

Получаются уравнения движения из (1.4.9))

$$\ddot{x}'_B = 2 \frac{dy'_B}{dx'_B} + \frac{\partial J'}{\partial x'_B}, \quad \ddot{y}'_B = -2 \frac{dx'_B}{dt} + \frac{\partial J'}{\partial y'_B}, \quad (1.4)$$

а интеграл Якоби принимает вид

$$V^2 = 2J' + H, \quad (1.5)$$

где

$$J' = \frac{1}{2} [(x'_B)^2 + (y'_B)^2] - cx'_B + \frac{8\mu_G}{r} + \frac{8\mu_L}{\rho}, \quad H = \text{const.}$$

Преобразование Тиле состоит в переходе к новым переменным  $\tau$ ,  $u(\tau)$  и  $v(\tau)$  по формулам

$$x'_B + iy'_B = \cos(u + iv), \quad dt = r\rho d\tau.$$

Это преобразование действительно приводит к уравнениям с правыми частями, регулярными по всей конечной плоскости  $u, v$ .

Численные результаты, приводимые ниже, были получены с помощью решения системы уравнений движения в переменных  $\tau, u, v$ . Удобным средством контроля точности оказался интеграл Якоби (1.5).

Была вычислена траектория полета с первой критической скоростью  $V_0 = V_0^{(1)}$ , направленной перпендикулярно начальному геоцентрическому радиусу  $r$  в сторону вращения Луны. Для этого направления геоцентрическая начальная скорость КА, как видно из рис. 1.1, была максимальной. Траектория начиналась на высоте 200 км

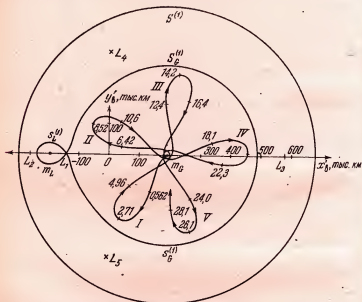


Рис. 3.2. Траектория полета КА с минимальной критической начальной скоростью, вычисленная во вращающихся координатах. Критическая кривая  $S_6^{(1)}$  не достигается в течение месяца.

при  $r = a_L$ . Оказалось, что эта траектория возвращается к Земле, не доходя до критической точки  $L_1$  примерно на 30 тыс. км. Были прослежены еще пять оборотов указанной траектории на интервале, превышающем месяц, но апогейное расстояние практически не изменилось.

Вычисленная во вращающейся системе координат  $Ox_8'y_8'$  траектория приведена на рис. 3.2 (траектория

шестого оборота не показана, так как она пересекается с траекторией первого, время полета здесь и далее отмечено вдоль кривых в сутках). В невращающейся геоцентрической системе  $m_0xy$  (ось  $x$  параллельна оси  $x_0$  в момент  $t = 0$ , рис. 1.1) виткам типа восьмерки на рис. 3.2 отвечают кривые, обходящие  $m_0$  в том же направлении и лежащие почти на один и тот же эллипс с фокусом  $m_0$ , рост апогейного радиуса хотя и заметен, но мал (рис. 3.3).

Если для какой-либо траектории полета КА с начальной скоростью  $V_0 = V_0^{(1)}$  поверхность  $S_G^{(1)}$  рано или поздно достигается, то из приведенного расчета следует, что это произойдет лишь через достаточно большое количество оборотов вокруг центра Земли  $m_0$ .

Были вычислены также траектории, отличающиеся от рассмотренной направлением начальной скорости. Оказалось, что для апогейного расстояния первого витка выбор направления начальной скорости не безразличен, а именно, апогейное расстояние оказывается тем больше, чем больше величина геоцентрической начальной скорости.

Заметим, что первые витки всех вычисленных траекторий с  $V_0 = V_0^{(1)}$  в невращающейся геоцентрической системе координат оказываются очень близки (как и кривые на рис. 3.3)

к эллипсам с фокусом в центре Земли. То же относится и к траекториям с  $V_0 = V_0^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4$ . На первом обороте эти траектории не только не достигают поверхностей  $S_{LG}^{(2)}$ ,  $S^{(3)}$ , но даже не доходят до поверхности  $S_G^{(1)}$  (рис. 3.1).

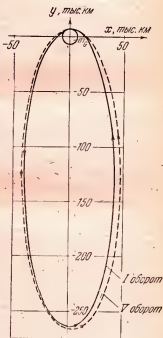


Рис. 3.3. Представление в геоцентрических координатах траектории на рис. 3.2. Заметно увеличение орбиты под действием лунных возмущений.

Для траекторий с минимальной начальной скоростью, не лежащих в плоскости лунной орбиты, влияние возмущений от Луны не больше, чем для рассмотренных траекторий в плоскости лунной орбиты. Поэтому полученные для плоской задачи результаты справедливы и для пространственной задачи.

Таким образом, минимальные скорости, полученные теоретическим путем с помощью интеграла Якоби, для достижения Луны на первом обороте вокруг Земли (что как раз наиболее интересно) оказываются недостаточными.

### § 3.2. Траектории с минимальной геоцентрической начальной скоростью

Из факта, что траекторий полета с минимальными скоростями в геоцентрических координатах оказались на первом обороте очень близкими к соответствующим эллипсам с фокусом в центре Земли, следует, что для таких траекторий влияние Луны на первом обороте практически несущественно. Это наводит на мысль попытаться найти приближенные значения минимальных скоростей для достижения Луны на первом обороте, полностью пренебрегая влиянием Луны. В этом случае движение будет определяться начальной скоростью  $V_1$  в невращающейся геоцентрической системе координат  $m_0xy$  (рис. 1.1).

Пусть ось  $x$  направлена от  $m_L|_{t=0}$  к  $m_0|_{t=0}$ , ось  $y$  — против  $V_L|_{t=0}$ . Минимальная геоцентрическая начальная скорость  $V_1$ , как нетрудно понять, должна находиться из условия достижения апогейного радиуса  $r_a$ , равного расстоянию до Луны, если задан угол  $\alpha_1$  между направлением  $V_1$  и начальным геоцентрическим радиусом  $r_1$ . Выражение для большой полуоси  $a$  эллипса, достигающего орбиты Луны с минимальной начальной скоростью, имеет вид

$$a = \frac{a_L^2 - r_1^2 \sin^2 \alpha_1}{2(a_L - r_1 \sin^2 \alpha_1)}. \quad (2.1)$$

Его можно получить, используя условие, что радиус точки 2 встречи с Луной  $r_2 = a_L = r_a$ , где  $r_a = a(1 + e)$  есть

апогейный радиус. По теореме косинусов

$$(2ae)^2 = r_1^2 + (2a - r_1)^2 - 2r_1(2a - r_1) \cos(\pi - 2\alpha_1)$$

для треугольника  $m_0 A_1 F$  (рис. 3.4), где  $F$  — «пустой» фокус искомого эллипса, а угол  $2\alpha_1$  между фокальными радиусами по свойству эллипса делится пополам направлением скорости  $V_1$  в начальной точке  $A_1$ ; исключая

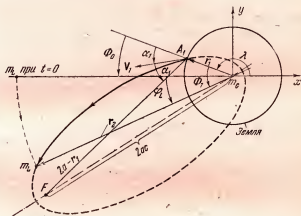


Рис. 3.4. Расчет попадания в Луну без учета ее возмущающего действия.

эксцентриситет  $e$  эллипса из полученных двух уравнений, с помощью геоцентрического интеграла энергии найдем  $a$  и минимальную начальную скорость  $V_1(r_1, \alpha_1)$ :

$$V_1^2 = \frac{2\mu_G}{r_1} - \frac{\mu_G}{a}. \quad (2.2)$$

Для высоты 200 км и вертикального направления ( $\alpha = 0$ ) величина минимальной начальной скорости  $V_1 = 10,90525$  км/с. Эта величина примерно на 60—50 м/с превышает геоцентрические скорости, отвечающие соответственно первой — четвертой критическим скоростям при  $\alpha_1 = 0$ .

Из выражений (2.1) и (2.2) следует, что с изменением направления начальной скорости от вертикального до

горизонтального, т. е. при изменении значения угла  $\alpha_1$  от 0 до  $\pi/2$ , величина начальной скорости  $V_1$  монотонно растет. Следовательно, приведенное значение начальной скорости, соответствующее вертикальному ее направлению, — наименьшее из минимальных для разных значений  $\alpha_1$ . Однако его отличие от значения, отвечающего горизонтальному направлению, невелико. Например, при начальной высоте 200 км это отличие составляет всего лишь 1,6 м/с.

Положение начальной точки пассивного участка попадающей траектории рассчитывается достаточно просто. По величине  $V_1$  и направлению  $\alpha_1$  начальной скорости находятся параметры эллипса с помощью формул [1—1968, стр. 46, 47]

$$p = 2r_1\beta \sin^2 \alpha_1, \quad e = \sqrt{1 + 4\beta(\beta - 1) \sin^2 \alpha_1},$$

$$\cos \vartheta(r) = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right), \quad \beta = \left[ \frac{V_1}{V_\pi(r_1)} \right]^2,$$

где параболическая скорость  $V_\pi(r_1) = \sqrt{2\mu_G/r_1} \approx 11$  км/с для высоты 200 км, угловое расстояние  $\Phi_1 = \vartheta(r_L) - \vartheta(r_1)$  и время  $T_{1,2}$  полета между начальной  $A_1$  и конечной  $m_L$  точками пассивного участка траектории. Начальное положение, соответствующее достижению Луны, находится из условия встречи КА с Луной в упрежденной точке.

В случае полета в плоскости орбиты Луны начальное положение определяется только углом  $\lambda$  начального радиуса с осью  $x$ . При условии, что в начальный момент времени вращающаяся ось  $x_2$  совпадает с невращающейся осью  $x$ , имеем (рис. 3.4)

$$\varphi_L \equiv \omega_L T_{1,2}; \quad \Phi_0 \equiv \Phi_1 \operatorname{sign} \alpha_1 - \varphi_L; \quad \lambda = \pi \operatorname{sign} \alpha_1 - \Phi_0, \quad (2.3)$$

где  $\omega_L$  — угловая скорость обращения Луны. Для отсчета всех углов здесь и в дальнейшем положительным считается направление против часовой стрелки.

Траектории, определяемые уравнениями (1.4) и начальными данными, получаемыми из формул (2.1)–(2.3), были найдены численным интегрированием регуляризованных уравнений для значений  $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2}$  и

ряда близких значений. Одна из траекторий представлена на рис. 3.5. Оказалось, что условие  $r_a = a_L$  дает минимальную скорость, необходимую для достижения центра Луны, достаточно точно (с точностью порядка 0,02 м/с),

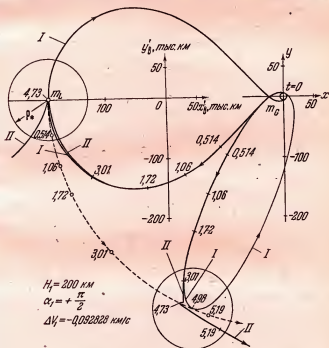


Рис. 3.5. Отличие попадающей траектории II от соответствующего эллипса I при минимальной начальной скорости.

так что соответствующие начальные данные действительно можно рассчитывать, полностью пренебрегая влиянием Луны.

Полученный результат означает, в частности, что для попадания в Луну недостаточно достигнуть удаления, на котором притяжения Земли и Луны равны (соответствующее отличие начальной скорости  $V_1$  от местной параболической  $\Delta V_1 = -107 \text{ м/с}$ ). Это подтвердили расчеты соответствующих траекторий с учетом притяжения Луны

для  $\alpha_1 = -\pi/2, 0, +\pi/2$  (см., например, на рис. 3.6 траекторию для  $\alpha_1 = +\pi/2$ ).

Заметим, что даже в случаях, изображенных на рис. 3.5 и 3.6, когда КА и Луна до сближения обходят Землю в одном направлении и влияние Луны особенно сильно, траектории с учетом влияния Луны (жирные

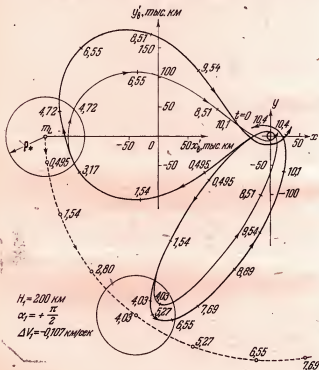


Рис. 3.6. Возмущение Лунной эллипса, достигающего в момент  $t = 4,03$  сут точки равенства притяжений Земли и Луны.

кривые) и без учета (тонкие кривые) до входа в СД Луны (круг радиуса  $\rho = \rho_*$ ) практически совпадают. При скоростях, больших минимальных, влияние возмущений сказывается еще меньше.

Теперь можно получить простое объяснение, почему в системе  $Ox_2y_2$  при начальной скорости, несколько боль-



шей первой критической скорости  $V_0^{(1)}$  (§ 3.1), КА не может на первом обороте траектории подняться к точке  $L_1$  либрации, пройти горловину с очень малой скоростью и достигнуть Луны. Действительно, геоцентрическая константа площадей  $C(L_1)$ , соответствующая относительно покою в точке  $L_1$ , превосходит начальную константу площадей  $C(A_1)$  по меньшей мере в 3,9 раза, и возмущения от Луны не могут свести эту разницу к нулю в течение одного оборота.

Оценим количество оборотов, необходимое для достижения критической кривой  $S_G^{(1)}$  (рис. 3.1) при первой критической начальной скорости.

Поскольку для траектории, представленной на рис. 3.2, при начальной величине константы площадей  $C(A_1) = 71\,300 \text{ км}^2/\text{с}$  за шесть оборотов накопилась величина изменения секториальной скорости  $\Delta C = 6810 \text{ км}^2/\text{с}$ , то можно ожидать, что для достижения кривой  $S_G^{(1)}$  потребуется количество оборотов

$$\frac{C(L_1) - C(A_1)}{\Delta C_1} \cdot 6 = \frac{282\,000 - 71\,300}{6810} \cdot 6 \approx 186,$$

т. е. порядка 200 оборотов.

Заметим, что отличие геоцентрической энергии КА, находящегося в относительном покое в точке  $L_1$ , от геоцентрической энергии КА, имеющего критическую начальную скорость  $V_0^{(1)}$ , ничтожно по сравнению с его начальной кинетической энергией. Поэтому возмущающее действие Луны при начальных скоростях КА, близких к  $V_0^{(1)}$ , в основном сводится к изменению геоцентрической секториальной скорости  $C_1$ .

### § 3.3. Невозможность захвата КА меньшей из притягивающих масс при достаточно малом отношении этих масс

#### О п р е д е л е н и я.

1. *Захватом в общей проблеме трех материальных точек* называется явление, при котором три точки, находясь первоначально на бесконечно больших взаимных расстояниях, сближаются таким образом, что после сближения

одно из взаимных расстояний навсегда остается ограниченным (ср. [1—1961]).

2. *Захватом в ограниченной круговой задаче трех точек* можно назвать явление, при котором точка нулевой массы, приблизившись из бесконечности к системе конечных масс, не удаляется от нее снова в бесконечность, а навсегда остается на ограниченном расстоянии.

3. *Захватом точки  $m_0$  нулевой массы меньшей притягивающей массой  $m_L$*  можно назвать явление, при котором точка  $m_0$  приходит в  $m_L$ -центрическую сферу радиуса  $\rho_n = a_L(\mu/3)^n$ ,  $n > 1/3$ , с расстояния  $\rho^0 > \rho_1$  и навсегда в ней остается. Здесь  $a_L$  и  $\rho_1$  суть  $m_L$ -центрические расстояния массы  $m_s$  и первой точки либрации  $L_1$ ,  $\mu = m_L/(m_s + m_L)$ . Заметим, что на критической поверхности  $S_L^{(1)}$  нулевой скорости (рис. 3.1)  $\max \rho$  реализуется

в точке  $L_1$ , так что при изменении  $\rho$  вдоль траектории от  $\rho^0 > \rho_1$  до  $\rho_n$  имеем для этой траектории  $\tilde{h} > \tilde{h}_1$ .

Невозможность захвата Луной КА, запущенного с Земли, на первом витке его траектории была доказана в [1—1959]. Там же для произвольных траекторий в ограниченной круговой задаче трех тел была доказана теорема о невозможности захвата точки  $m_0$  меньшей массой  $m_L$  для случая достаточно малых отношений притягивающих масс (меньших  $10^{-4}$ ). Однако решение задачи о захвате для отношения массы Луны к массе Земли и для произвольного отношения притягивающих масс до сих пор не получено.

Рассматривая траектории движения точки  $m_0$  в фазовом пространстве, т. е. в пространстве координат и скоростей, Хопф показал [1—1930], что при ограниченных значениях начальных данных точка  $m_0$  с беспредельным возрастанием времени, вообще говоря, либо стремится сколь угодно близко подойти к границе области возможного движения, либо многократно проходит сколь угодно малую окрестность начальных данных. Пришедшая же из бесконечности точка нулевой массы, вообще говоря, со временем снова удаляется в бесконечность. Слова «вообще говоря» понимаются здесь в том смысле, что множество начальных данных, для которых характер движения является иным, имеет лебегову меру нуль.

Интересен вопрос, существуют ли вообще подобные исключительные начальные данные. Ведь среди траекторий именно с такими начальными данными должны, очевидно, находиться траектории захвата, а также траектории превращения КА из спутника одной притягивающей массы в спутник другой массы (если, конечно, и те и другие траектории существуют).

Последние траектории, очевидно, представляют интерес для создания искусственных спутников Луны и планет без помощи двигателя. Действительно, хотя исключительные начальные данные таких траекторий невозможно реализовать в точности, все же, реализуя достаточно близкие к ним данные, можно было бы получать траектории, делающие достаточно большое количество обращений вокруг Луны (или планеты), прежде чем удалиться от нее.

Докажем теорему, согласно которой в ограниченной круговой задаче трёх точек в случае, когда одна притягивающая масса достаточно мала по сравнению с другой, захват точки нулевой массы невозможен. Доказательство проведем, заменив сначала в определении 3 захвата сферу  $\rho = \rho_*$  сферой притяжения  $\rho = \rho_*$ .

*Сферой притяжения меньшей массы по отношению к большей* называется область пространства, в которой притяжение меньшей массы сильнее притяжения большей. Приравнивания притяжение меньшей массы  $m_L$  притяжению большей  $m_G$ , можно получить уравнение границы сферы притяжения с радиусом

$$a_L \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{1}{1-2\mu} + \frac{\mu}{(1-2\mu)^2}}, \text{ где } \mu \equiv \frac{\mu_L}{\mu_G + \mu_L},$$

и с центром, смещенным из точки  $m_L$  по прямой  $m_G m_L$  в сторону, противоположную  $m_G$ , на расстояние  $\mu/(1-2\mu)$ . Здесь и далее в гл. 3 используются единицы из § 3.1, в которых  $a_L = 1$ ,  $\mu_G + \mu_L = 1$ ,  $\mu = \mu_L$ . Так как для малых  $\mu$  радиус сферы притяжения с точностью до  $\mu^{3/2}$  равен  $\sqrt{\mu}$ , а смещение ее центра из точки  $m_L$  мало по сравнению с радиусом, то для малых  $\mu$  отличим радиуса от  $\sqrt{\mu}$  и смещением центра можно пренебречь по сравнению с  $\sqrt{\mu}$ , считая сферой притяжения точки  $m_L$  сферу радиуса  $\rho_* = \sqrt{\mu}$  с центром в точке  $m_L$ .

Для доказательства того, что пришедшая издалека точка не может навсегда остаться в сфере притяжения меньшей массы, рассматривается оскулирующее  $m_L$ -центрическое коническое сечение. Доказательство состоит из двух частей. Сначала докажем для малых  $\mu$  вспомогательную лемму, а затем при ее помощи для случая, когда оскулирующее коническое сечение есть эллипс, и не прибегая к ней — для других случаев докажем, что при достаточно малых  $\mu$  точка нулевой массы должна неизбежно выйти из сферы притяжения меньшей массы относительно большей.

**Лемма.** Если при достаточно малом  $\mu$  точка нулевой массы пришла с расстояния  $\rho^0 > \rho_1$  в сферу притяжения  $\rho = \rho_r$  массы  $m_L$ , то, пока она находится в этой сфере, большая полуось оскулирующего  $m_L$ -центрического эллипса  $a' > 2\rho_r$ .

При рассмотрении поверхностей Хилла (см. § 3.1) указывалось на существование точек либрации  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) как особых точек этих поверхностей. Соответствующие значения  $\tilde{h}_i$  постоянной интеграла Якоби находятся из (3.1.2) по координатам  $r_i, \rho_i$  точек  $L_i$ . В частности, для  $i = 1, 2$  находим, что

$$-\tilde{h}_i = J_i = \frac{[(1-\mu) + (-1)^i \rho_i]^2}{2} + \frac{1-\mu}{1 + (-1)^i \rho_i} + \frac{\mu}{\rho_i}.$$

При малых  $\mu$  для  $i = 1, 2$ , используя результаты [1—1937], можно получить

$$\begin{aligned} \rho_i &= \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{(-1)^i}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3}, \\ -2\tilde{h}_i &= 3 + 9\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - [3 + (-1)^i 2] \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

с точностью до  $(\mu/3)^{4/3}$ . Так как величины  $\rho_i$  — порядка  $\mu^{1/3}$ , а величина  $\rho_r = \mu^{1/2}$ , то для достаточно малых  $\mu$  имеем  $\rho_r < \rho_i$  ( $i = 1, 2$ ). Из анализа эволюции поверхностей нулевой скорости с изменением постоянной  $\tilde{h}$  следует, что если точка  $m_0$  приходит в сферу притяжения по траектории, начинающейся на расстоянии  $\rho^0 > \rho_1$ , т. е. вне области  $S_L^{(1)}$  (рис. 3.1), то  $\tilde{h} > \tilde{h}_1$  (а если, в частности,  $m_0$  приходит из бесконечности, то  $\tilde{h} > \tilde{h}_2$ ).

Сделаем теперь преобразование интеграла Якоби к  $m_L$ -центрическим кеплеровым оскулирующим элементам  $a', p', i'$  (подобное преобразование используется при выводе известного условия Тиссерана [2—1937]). Для этого перейдем сперва от вращающейся системы координат  $x_n y_n z_n$  к перемещающейся поступательно  $m_L$ -центрической системе координат  $\xi\eta\zeta$ , плоскость  $\xi\eta$  которой совпадает с плоскостью  $x_n y_n$ , а ось  $\xi$  в момент  $t=0$  совпадает с осью  $x_n$  (рис. 1.1). Интеграл Якоби в переменных  $\xi\eta\zeta$  примет вид

$$-w^2 + \frac{2\mu}{\rho} + 2\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) + (1-\mu)^2 - \\ - 2(1-\mu)\left[(\xi \cos t + \eta \sin t) - \frac{1}{r}\right] = -2\tilde{h},$$

где  $w$  — скорость в системе  $\xi\eta\zeta$ . Используя теперь формулы теории конических сечений [2—1937, стр. 140]

$$w^2 = \frac{2\mu}{\rho} - \frac{\mu}{a'}, \quad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\mu p'} \cos i'$$

( $p', i'$  — параметр и наклонение конического сечения) и очевидную из рис. 1.1 формулу  $\xi \cos t + \eta \sin t = \rho \cos \theta_p$ , где  $\theta_p$  — угол между вектором  $\rho$  и осью  $x_n$ , получим

$$\frac{\mu}{a'} + 2\sqrt{\mu p'} \cos i' = -2\tilde{h} - (1-\mu)\left[(1-\mu) - 2\rho \cos \theta_p + \frac{2}{r}\right]. \quad (3.2)$$

Предполагая, что стало  $\rho < \rho_r$ , и используя разложение по степеням  $\rho$  согласно выражению

$$r^2 = 1 - 2\rho \cos \theta_p + \rho^2,$$

с учетом неравенства  $-2\tilde{h} < -2\tilde{h}_1$  получим неравенство

$$\frac{\mu}{a'} + 2\sqrt{\mu p'} \cos i' < 9\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \mu F, \quad (3.3)$$

где

$$F = \frac{11}{3} + \frac{\rho^2}{\mu} (1 - 3 \cos^2 \theta_p) (1 - \mu) + \mu^{1/3} F_1, \quad (3.3')$$

а функция  $F_1$  конечна. В силу условия  $\rho < \sqrt{\mu}$  функция  $F$  тоже конечна.

Будем теперь вести доказательство от противного. Если предположить, что  $a' < 2\rho_r$ , но неравенство (3.3) можно усилить, положив  $\cos i' = -1$ ,  $p' = a' = 2\rho_r$ ; тогда получим

$$\frac{1}{2} \mu^{1/2} - 2 \sqrt{2} \mu^{3/4} < 9 \left( \frac{\mu}{3} \right)^{2/3} + \mu F_1. \quad (3.4)$$

Так как младшая степень  $\mu$  слева меньше, чем справа, то при достаточно малых  $\mu$  последнее неравенство противоречиво. Это означает, что при  $\rho < \rho_r$  имеем  $a' > 2\rho_r$ . Тем самым лемма доказана.

Докажем теперь, что если отношение притягивающих масс достаточно мало, то пришедшая с расстояния  $\rho^0 > \rho_1$  (или из бесконечности) точка нулевой массы, войдя в сферу притяжения  $\rho = \rho_r$  меньшей массы относительно большей, неизбежно выйдет из этой сферы. Иначе говоря, докажем, что если начальное расстояние  $\rho^0$  точки  $m_0$  от меньшей массы удовлетворяет неравенству  $\rho^0 < \rho_r$ , то со временем неизбежно достигается расстояние  $\rho > \rho_r$ .

Это утверждение может показаться очевидным при  $a' < \rho_r$ , но на самом деле оно нуждается в доказательстве. Действительно, при отсутствии возмущений точка  $m_0$  после входа в сферу притяжения и сближения с центром притяжения  $m_L$  удалилась бы от него благодаря условию  $a' > \rho_r$  на максимальное расстояние  $\rho_m > \rho_r$ . Однако при наличии возмущений максимальное и минимальное расстояния на оскулирующем эллипсе иногда вообще могут не достигаться. Например, при движении спутника по круговой орбите в экваториальной плоскости сжатого земного эллипсоида апогейный радиус оскулирующего эллипса никогда не достигается (см. [3—1957]). Точно так же при движении кругового спутника в экваториальной плоскости вытянутого эллипсоида вращения никогда не достигается перигейный радиус. Хотя в рассматриваемой задаче возмущения кеплеровского движения массой  $m_0$  отличны от возмущений, производимых несферичностью в приведенных примерах, все же заранее не очевидно, что после входа точки  $m_0$  в сферу притяжения массы  $m_L$  расстояние  $\rho(t)$  не будет со временем асимптотически монотонно приближаться к некоторому предельному расстоянию  $\rho < \rho_r$  или не будет осциллировать, не достигая значения  $\rho_r$ . Если же будет доказано,

что ни тот, ни другой характер изменения не возможен, то точка  $m_0$ , действительно, со временем удалится от массы  $m_L$  на расстояние, превышающее радиус сферы притяжения.

Чтобы получить уравнение, определяющее изменение  $\rho$  со временем, воспользуемся уравнениями  $m_L$ -центрического движения [2—1937], линеаризованными для малых  $\rho$  и записанными в векторной форме:

$$\ddot{\rho} = -\frac{\mu}{\rho^3} \rho - (1 - \mu) \rho + [3(1 - \mu) \rho \cos \theta_\rho] (-r_L).$$

Первый член правой части здесь выражает тяготение массы  $m_L$ , а остальные члены — возмущающее влияние массы  $m_G$ . Точки над буквами здесь и далее обозначают дифференцирование по времени. Уравнение, определяющее  $\rho(t)$ , получим из последнего векторного уравнения при помощи скалярного умножения на вектор  $\rho$  и применения известного тождества

$$\rho \ddot{\rho} = \rho \ddot{\rho} + (w^2 - \dot{\rho}^2),$$

где  $w = |\dot{\rho}|$ .

Уравнение для определения  $\rho$  примет вид

$$\rho \ddot{\rho} = -\frac{\mu}{\rho} - (1 - \mu) \rho^2 + 3(1 - \mu) \rho^2 \cos^2 \theta_\rho + w^2 - \dot{\rho}^2.$$

Поскольку в каждый момент по определению оскулирующей большой полуоси  $a'(t)$  имеем

$$w^2 = \frac{2\mu}{\rho} - \frac{\mu}{a'(t)},$$

то после приведения подобных членов получим

$$\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu}{a'(t)} - (1 - \mu)(1 - 3 \cos^2 \theta_\rho) \rho^2 \quad (3.5)$$

или, после умножения на  $2\rho \dot{\rho}$  и интегрирования,

$$\begin{aligned} (\rho \dot{\rho})^2 - (\rho_0 \dot{\rho}_0)^2 &= \\ &= 2\mu(\rho - \rho_0) - \int_{\rho_0^2}^{\rho^2} \frac{\mu d(\rho^2)}{a'(\rho^2)} - \frac{(1 - \mu)}{2} \int_{\rho_0^4}^{\rho^4} (1 - 3 \cos^2 \theta_\rho) d\rho^4, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где  $\rho_0 < \rho$  (нулем отмечены начальные значения).

При помощи уравнения (3.5), пользуясь малостью возмущений для малых  $\mu$ , можно доказать (от противного), что  $a' > 2\rho_\tau$  и величина  $\rho(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  не может неограниченно и монотонно приближаться к константе  $\rho_c < \rho_\tau$ . Действительно, если уравнение (3.5) умножить на  $\rho$ , заменить в правой части  $\rho$  на  $k\rho_\tau = k\sqrt{\mu}$ , где  $k < 1$ , и перейти к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , то, поскольку предел левой части равен нулю, получим после сокращения на  $\mu$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{\rho}{a'} - (1 - \mu)(1 - 3 \cos^2 \theta_\rho) k^3 \sqrt{\mu} \right].$$

Разность двух первых членов в квадратных скобках в силу условия  $\rho < \rho_\tau$  и доказанного выше утверждения  $a' > 2\rho_\tau$  всегда превосходит  $1/2$ , а третий член сколь угодно мал для достаточно малых  $\mu$ . Следовательно, рассматриваемое равенство противоречиво, и расстояние  $\rho(t)$  не может с ростом времени  $t$  неограниченно приближаться к константе  $\rho_c < \rho_\tau$ . Из доказанного факта следует, что точка  $m_0$ , приблизившись к массе  $m_L$  на некоторое минимальное расстояние, начнет от нее удаляться (как и при отсутствии возмущений). Если допустить, что точка  $m_0$  не выходит со временем из сферы притяжения  $\rho = \rho_\tau$ , то должно достигаться в некоторый момент  $t_M$  максимальное расстояние  $\rho'_M < \rho_\tau$ . Покажем, что при  $a' > 2\rho_\tau$  это невозможно.

Положив в уравнении (3.6)  $\rho = \rho_M$ , используя условие  $\rho(t_M) = 0$  и применяя теорему о среднем, получим уравнение для определения  $\rho_M$ :

$$-(\rho_0 \dot{\rho}_0)^2 = 2\mu(\rho_M - \rho_0) - \frac{\mu}{a'_{\text{ср}}}(\rho_M^2 - \rho_0^2) - \frac{1-\mu}{2}(1 - 3 \cos^2 \theta_{\text{ср}})(\rho_M^4 - \rho_0^4), \quad (3.7)$$

где  $a'_{\text{ср}}$  и  $\theta_{\text{ср}}$  — некоторые средние на интервалах  $[\rho_0^2, \rho_M^2]$  и  $[\rho_0^4, \rho_M^4]$  значения функций  $a'(\rho^2)$  и  $\theta_\rho(\rho^4)$ . Поскольку согласно доказанному  $a'(t) > 2\rho_\tau$ , то и  $a'_{\text{ср}} > 2\rho_\tau$ . Корень  $\rho_M$  этого уравнения четвертой степени можно найти точно, но для наших целей достаточно доказать, что  $\rho_M > \rho_\tau$ .

Допустим противное, т. е. предположим, что  $\rho_M < \rho_\tau$ . Заменяя в (3.7) левую часть нулем, получим неравенство,



которое делением на  $\mu(\rho_M - \rho_0) > 0$  приводится к виду

$$2 < \frac{\rho_M + \rho_0}{a'_{\text{ср}}} + \frac{1-\mu}{2\mu} (1 - 3 \cos^2 \theta_{\text{ср}}) (\rho_M + \rho_0) (\rho_M^2 + \rho_0^2). \quad (3.8)$$

При помощи соотношений  $\rho_M < \rho_T$ ,  $\rho_0 < \rho_T$  и  $a'_{\text{ср}} > 2\rho_T$  каждый член правой части неравенства (3.8) можно увеличить и получить

$$2 < 1 + \frac{1}{2\mu} \cdot 1 \cdot 2\rho_T \cdot 2\rho_T^2. \quad (3.9)$$

Поскольку  $\rho_T^2 = \mu$ , то для достаточно малых  $\mu$  последнее неравенство противоречиво. Значит,  $\rho_M > \rho_T$ , и теорема для случая, когда оскулирующее коническое сечение является эллипсом, доказана.

В случае, когда оскулирующее коническое сечение является параболой или гиперболой, доказательство неизбежности выхода точки  $m_0$  из сферы притяжения почти тривиально. Действительно, в случае параболы  $a' = \infty$ , в случае гиперболы  $a' < 0$ , и доказательство того, что расстояние точки  $m_0$  от массы  $m_L$  после входа в сферу притяжения не может асимптотически приближаться к константе  $\rho_c < \rho_T$ , остается в силе. В отличие от случая эллипса в данном случае после прохождения минимального расстояния радиальная скорость  $\rho$  не может обратиться в нуль на конечном расстоянии  $\rho$  от центра притяжения, и поэтому точка  $m_0$  со временем выйдет из сферы притяжения. Следовательно, теорема доказана и для случаев, когда оскулирующее коническое сечение является параболой или гиперболой.

Возможен еще случай, когда при удалении точки  $m_0$  от массы  $m_L$  тип оскулирующего конического сечения меняется один раз или более. Доказательство в этом случае, очевидно, является простой комбинацией предыдущих доказательств.

Таким образом, полностью доказана следующая

**Теорема.** Если в круговой ограниченной проблеме трех точек отношение притягивающих масс достаточно мало, то точка нулевой массы, пришедшая с расстояния  $\rho^0 > \rho_1$  (или из бесконечности) в сферу притяжения меньшей массы, обязательно выйдет из этой сферы.

### § 3.4. Замечания

1. Если вместо сферы притяжения пользоваться сферой действия массы  $m_L$ , то доказательство проводится аналогично. Для малых  $\mu$  сфера действия по форме близка к  $m_L$ -центрической сфере, радиус которой в наших единицах выражается формулой  $\rho = \mu^{2/5}$  [2—1937].

Доказательство теоремы при замене  $\rho_t$  на  $\rho$  проходит потому, что младшие степени  $\mu$  в левых частях (3.4) и (3.9) по-прежнему оказываются меньше, чем в правых. Степени выравниваются и противоречие исчезает тогда и только тогда, когда вместо  $\rho_t$  используется величина порядка  $\mu^{1/3}$ , т. е. порядка расстояния  $\rho_1$  точки либрации  $L_1$  от  $m_L$ . Если вообще размеры окрестности точки  $m_L$  определяются величиной порядка  $\mu^n$ , то доказательство остается справедливым при  $n > 1/3$ . Если  $n \leq 1/3$ , то вопрос остается открытым.

2. Если, обобщая [1—1946], принять определение 3 захвата, то доказанная выше теорема утверждает, что захват точки нулевой массы  $m_0$  меньшей массой  $m_L$  невозможен. Однако эта теорема не означает, что захват точки  $m_0$  системой масс  $m_G m_L$  вообще невозможен. Действительно, из нее не следует, что пришедшая из бесконечности точка не может навсегда стать спутником системы масс  $m_G m_L$ , иногда удаляющимся от массы  $m_L$  на расстояние, превышающее, например, расстояние  $\rho_1$  от  $m_L$  до точки либрации  $L_1$ .

3. Так как доказательство теоремы проводилось одновременно для значений  $\tilde{h} = \tilde{h}_2$  и  $\tilde{h} = \tilde{h}_1$ , то из него следует, что при достаточно малых  $m_L$  невозможен и захват массой  $m_L$  точки, пришедшей в сферу тяготения массы  $m_L$  (или в ее сферу действия) не из бесконечности, а из области с границей  $S_G^{(1)}$ , окружающей массу  $m_G$ . В частности, если у массы  $m_G$  имеется спутник с орбитой, охватывающей  $m_L$  в системе координат  $x_L y_L$ , то он не может быть захвачен массой  $m_L$  при достаточно малом  $\mu$ .

4. Наибольшие значения  $\mu$ , при которых неравенства типа (3.4), (3.9) противоречивы, имеют порядок  $10^{-4}$ , как можно непосредственно проверить, считая, что функция  $F_1$  в уравнении (3.4) есть величина порядка единицы. Поэтому для большинства планет Солнечной системы

захват планетой частиц малой массы представляется невозможным. Для Юпитера, масса которого составляет около 0,001 массы Солнца, вопрос о возможности захвата частиц малой массы остается открытым.

5. Доказанная выше теорема неприменима к системе Земля — Луна ( $\mu_L > 0,01$ ), однако важный вопрос о возможности захвата Луной КА, запущенного с Земли по облетной траектории, может быть приближенно решен весьма просто. Для такой траектории можно, пренебрегая возмущениями от Луны вне ее СД и от Земли — внутри СД, получить приближенные оценки селеноцентрической скорости входа в СД  $U = V_2 - V_L$ , где  $V_2$  и  $V_L$  — геоцентрические скорости КА и Луны в момент входа. Захват КА Луной для таких траекторий представляется невозможным, потому что их участки, расположенные внутри СД Луны, в перемещающейся поступательно селеноцентрической системе координат всегда близки к гиперболам. При этом на СД селеноцентрическая скорость  $U$  превосходит местную параболическую скорость  $U_{\pi}^* = \sqrt{2\mu_L/\rho_*} = 0,383 \text{ км/с}$  весьма существенно — более чем вдвое, так что облетная траектория является (согласно определению § В.1) траекторией сближения и должна выйти из СД на первом же обороте вокруг Луны. Проверку неравенства  $U > 2U_{\pi}^*$  проведем в три этапа.

Первый этап. Покажем, что при начальных скоростях, меньших параболической для Земли, т. е. при геоцентрических энергиях  $h_1 < 0$ , тангенциальная компонента  $V_{2\tau}$  входной геоцентрической скорости  $V_2$  не превосходит 0,22 км/с. Из геоцентрических интегралов энергии и площадей

$$V_{\pi} = \sqrt{\frac{2\mu_G}{r_{\pi}} + h_1}, \quad V_{2\tau} = \frac{r_{\pi} V_{\pi}}{r_2},$$

где перигейный радиус  $r_{\pi} \leq r_{\gamma} \approx \frac{a_L}{60}$  и входной геоцентрический радиус  $r_2 \geq a_L - \rho_*$  ( $a_L$  — расстояние  $m_G m_L$ ,  $r_1$  — радиус верхнего слоя атмосферы Земли), получим

$$V_{2\tau} \leq \frac{\sqrt{2\mu_G r_{\pi}}}{a_L - \rho_*} \leq \frac{\sqrt{2\mu_G r_{\gamma}}}{a_L - \rho_*},$$

или  $V_{2r} \leq \sqrt{2\mu_G/(a_L - \rho_*)} \sqrt{v_M}$ , где  $v_M = r_1/(a_L - \rho_*)$  мало. Имеем  $\sqrt{2\mu_G/(a_L - \rho_*)} = 1,55$  км/с,  $v_M \approx 1/50$ ,  $\sqrt{v_M} \approx 1/7$ ,  $V_{2r} \leq 0,22$  км/с.

Второй этап. Покажем что для  $h_1 < 0$  одна лишь проекция  $U_l = V_{2r} - V_{Ll}$  вектора  $U$  на направление  $l$ , перпендикулярное вектору  $r_2$  и параллельное плоскости лунной орбиты, превосходит  $U_n^*$  более чем вдвое. Для этого в невращающейся правой системе координат  $m_0xyz$ , направления осей  $xy$  которой получаются фиксацией вращающихся направлений  $x_ny_n$  (§ 1.4) в момент  $t_2$  входа в СД, оценим компоненты вектора  $r_2$ :

$$|r_{2x}| \geq a_L - \rho_*, \quad |r_{2y}| \leq \rho_*.$$

Скорость Луны  $V_L = (0, -V_L, 0)$ , а направление  $l$  имеет косинусы  $(r_{2y}/r_{xy}, -r_{2x}/r_{xy}, 0)$ , где

$$r_{xy} = \sqrt{r_{2x}^2 + r_{2y}^2} = |r_{2x}| \left[ 1 + \left( \frac{r_{2y}}{r_{2x}} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Имеем  $V_{Ll} = V_L \frac{|r_{2x}|}{r_{xy}} \leq V_L \left[ 1 + \left( \frac{\rho_*}{a_L - \rho_*} \right)^2 \right]^{1/2} \approx 0,98V_L \approx \approx 1$  км/с,  $V_{2l} \leq V_{2r}$  (так как  $l \perp r_2$ ), так что  $U_l \geq \geq 0,78$  км/с  $> 2U_n^*$ .

Третий этап. Покажем, что при  $h_1 > 0$  величина  $|U_r| > 2U_n^*$ , где  $U_r$  — радиальная компонента вектора  $U$ . Для этого покажем, что угол  $\alpha_2$  между векторами  $V_2$  и  $r_2$  невелик:  $\sin \alpha_2 < 1/7$ . Действительно, из интегралов энергии и площадей

$$V_1^2 = 2\mu_G/r_1 + V_2^2 - 2\mu_G/r_2, \quad \sin \alpha_2 = r_1 V_1 \sin \alpha_1 / (r_2 V_2),$$

где  $V_1$  и  $\alpha_1$  — величина геоцентрической скорости и угол ее с начальным радиусом  $r_1$ ,  $r_1 = r_1$ , имеем

$$\sin \alpha_2 \leq \frac{r_1}{r_2} \sqrt{1 + \frac{2\mu_G/r_1 - 2\mu_G/r_2}{V_2^2}}.$$

Правая часть с ростом  $V_2$  убывает, поэтому при  $V_2^2 \geq \geq \frac{2\mu_G}{r_2}$  имеем  $\sin \alpha_2 \leq \sqrt{v_M} \approx 1/7$ ;  $\cos \alpha_2 \geq 0,98$ . Проектируя вектор  $U$  на направление  $r_2$ , получим  $U_r = V_{2r} - V_{Lr}$ ,

где  $V_{2r} = V_2 \cos \alpha_2 \geq 0,98V_2 \geq 0,98 \sqrt{2\mu_G/(a_L + \rho_*)} \approx$   
 $\approx 1,3 \text{ км/с},$

$$|V_{Lr}| \leq \frac{V_L |r_{2v}|}{r_2} \leq V_L \frac{\rho_*}{a_L - \rho_*} = \frac{1}{5} V_L \approx 0,2 \text{ км/с},$$

т. е.  $U_r \geq (1,3 - 0,2) \text{ км/с} = 1,1 \text{ км/с} > 2U_n^*$ , что и требовалось доказать.

Из § 3.2 следует, что влияние возмущения геоцентрического движения Луной вне ее СД на первом обороте траектории вокруг Земли несущественно даже при эллиптической начальной скорости  $V_1$ . При гиперболической скорости  $V_1$  это влияние еще меньше. По определению СД (§ В.1) столь же несущественно влияние возмущений от Земли внутри СД. Другими словами, возмущения от Земли, хотя и достигают на СД величины порядка 0,5 от притяжения Луны, все же не смогут заметно изменить гиперболический характер движения внутри СД. Поэтому КА, войдя в СД, выйдет из нее на первом же обороте вокруг Луны (если только не разрушится от удара о лунную поверхность).

6. Аналогичным образом для системы планета — Солнце, пренебрегая возмущениями, можно показать, что захват планетой КА, запущенного с Земли, на первом его обороте вокруг Солнца не может иметь места. При этом погрешности от неучета возмущений, т. е. влияния планеты вне ее СД и влияния Солнца в СД планеты, будут гораздо меньше, чем в задаче о полете к Луне. Гиперболичность скоростей КА, запущенного с Земли, в СД планеты оказывается гораздо большей, чем в СД Луны. Скорости входа КА, запущенного с Земли, в СД планеты назначения будут наименьшими для Марса и Венеры. Но и они приблизительно втрое превосходят местные планетоцентрические параболические скорости на СД планеты. Таким образом, захват планетой КА, запущенного с Земли, на первом его обороте вокруг Солнца также представляется невозможным.

7. Если в методе ИВ минимизировать относительную погрешность расчета  $m_L$ -центрической скорости  $U$  на малой  $m_L$ -центрической сфере  $\rho = \rho_* \ll r_L$  выбором радиуса  $\rho_*$ , то получается оптимальное значение  $\rho_* = r_L \mu^{1/3}$  (см. Приложение 10).

## Глава 4

### ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ СБЛИЖЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТОЧЕК

#### § 4.1. Применение метода игнорирования возмущений к траекториям сближения

В § В.2 было дано следующее

**О п р е д е л е н и е.** *Траекторией сближения (ТС) в ограниченной круговой задаче трех точек  $m_s$ ,  $m_L$ ,  $m_0$  называется траектория, входящая в сферу действия массы  $m_L$  с существенно гиперболической  $m_L$ -центрической скоростью.*

Слово «существенно» здесь означает, что возмущение  $m_L$ -центрического движения внутри СД массой  $m_s$  не может нарушить гиперболичности этого движения, так что ТС, войдя в СД, должна выйти из нее. Оно означает также, что окрестности границы СД проходятся достаточно быстро, так что возмущения движения вне СД (массой  $m_L$ ) тоже не успевают накопиться.

Начинаться ТС может в бесконечности или на конечном расстоянии  $\rho_0$  от  $m_L$ , причем далее предполагается, что  $\rho_0 \gg \rho_1$ , где  $\rho_1$  — расстояние от  $m_L$  до первой точки либрации  $L_1$ .

Поскольку ТС, войдя в СД, обязательно выходит из нее, то ТС можно разбить на три участка  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\Gamma_{2,3}$  и  $\Gamma_{3,\infty}$ , по которым соответственно движение происходит к СД, внутри СД и от СД.

Возмущение  $m_s$ -центрического движения массой  $m_L$  вне СД невелико, и столь же мало сказывается и возмущение  $m_L$ -центрического движения массой  $m_s$  внутри СД (как следует из определения СД); поэтому всюду возмущениями по сравнению с притяжением центрального

тела в приближенных расчетах можно пренебрегать. Тогда получается простой метод анализа движения по ТС, который назовем *методом игнорирования возмущений* (ИВ).

Пренебрегая возмущениями, получаем, что участки  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,4}$  вне СД, отнесенные к  $m_G$ -центрической системе  $m_Gxyz$ , суть конические сечения с фокусом  $m_G$ , а участок  $\gamma_{2,3}$  внутри СД, отнесенный к  $m_L$ -центрической системе  $m_L\xi\eta\zeta$ , есть гипербола с фокусом  $m_L$  (см. рис. 4.1, отвечающий случаю движения в плоскости  $\Pi_L$   $m_G$ -центрической орбиты массы  $m_L$ ).

Участок  $\Gamma_{1,2}$  от начальной точки 1 до точки 2 входа в СД (входной точки) в зависимости от  $m_G$ -центрической начальной скорости может быть эллипсом, гиперболой или параболой.

Расчет параметров движения к СД в любой точке  $r(t) \in \Gamma_{1,2}$  производится по  $m_G$ -центрическим начальным данным  $r_1V_1$  в точке 1 с помощью  $m_G$ -центрических интегралов энергии и площадей.

По отношению к массе  $m_G$  направление радиальной скорости  $V_{2r}$  движения КА во входной точке 2 может быть либо восходящим ( $V_{2r} > 0$ , перелет происходит по дуге конического сечения, не содержащей апогея), либо нисходящим ( $V_{2r} < 0$  — пройден апогей эллипса), либо трансверсальным ( $V_{2r} = 0$  — точка входа является апогеем эллипса, рис. 4.2).

В точке 2  $m_G$ -центрические радиус-вектор  $r_2$  и скорость  $V_2$  ( $m_G$ -центрические входные данные) пересчитываются в  $m_L$ -центрическую невращающуюся систему координат  $m_L\xi\eta\zeta$  путем вычитания соответственно радиуса  $r_L(t_2)$  и скорости  $V_L(t_2)$  массы  $m_L$ , где  $t_2$  — момент входа в СД. В результате получаются  $m_L$ -центрические входные данные (рис. 4.1)

$$\rho_2 = r_2 - r_L(t_2), \quad (4.1)$$

$$U_2 = V_2 - V_L(t_2). \quad (4.2)$$

Движение внутри СД в любой точке  $\rho(t) \in \gamma_{2,3}$  определяется с помощью  $m_L$ -центрических интегралов энергии и площадей. В точке 3 выхода из СД (в выходной точке)  $m_L$ -центрические радиус-вектор  $\rho_3$  и выходная скорость  $U_3$  ( $m_L$ -центрические выходные данные) пересчитываются (рис. 4.1) в  $m_G$ -центрические выходные

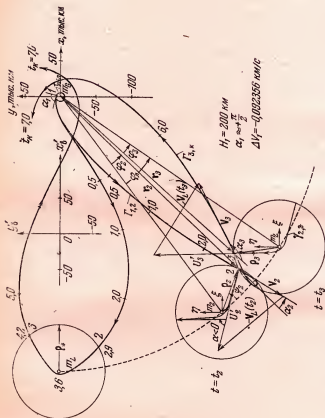


Рис. 4.1. Приближенный расчет движения: вне сферы действия Луны пренебрегается возмущениями от Луны, а внутри — возмущениями от Земли.



данные:

$$r_3 = \rho_3 + r_L(t_3), \quad (1.3)$$

$$V_3 = U_3 + V_L(t_3), \quad (1.4)$$

определяющие участок  $\Gamma_{3,k}$  движения от выходной точки 3 до конечной рассматриваемой точки  $k$ . Здесь  $t_3$  — момент выхода из СД.

После выхода из СД движение рассчитывается в любой точке  $r(t) \in \Gamma_{3,k}$  с помощью  $m_G$ -центрических интегралов энергии и площадей при новых значениях постоянных, вычисленных по компонентам векторов  $r_3$ ,  $V_3$ . Движение КА после его выхода из СД может быть, вообще говоря, эллиптическим, параболическим или гиперболическим. По отношению к  $m_G$  оно может быть либо восходящим, либо нисходящим соответственно положительному или отрицательному знаку радиальной скорости.

Если одно из конических сечений  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\gamma_{2,3}$ ,  $\Gamma_{3,k}$  лежит в плоскости  $\Pi_L$ , то и остальные два конических сечения лежат в плоскости  $\Pi_L$ , поскольку в ней лежат векторы радиуса  $r_L$  и скорости  $V_L$  массы  $m_L$ , участвующие в пересчетах (1.1)–(1.4). Множество плоских облетных ТС было проанализировано в [2–1957] путем рассмотрения пересчетов (1.2), (1.4) в плане скоростей, т. е. в двумерном пространстве компонент скорости. В трехмерной задаче представляющие одну ТС три конических сечения лежат в трех разных плоскостях, не совпадающих с плоскостью  $\Pi_L$ .

Рассмотрим в трехмерном пространстве компонент скоростей  $uvw$  пересчет скоростей во входной 2 и выходной 3 точках для одной ТС, заданной начальными гео-

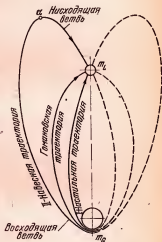


Рис. 4.2. Два класса траекторий полета с Земли, достигающих Луны: I — на восходящей ветви, т. е. до прохождения апогея (настильные); II — на нисходящей ветви, т. е. после прохождения апогея (навесные).

центрическими энергией  $h_1$ , кинетическим моментом  $C_1$  и наклонением  $i$  к плоскости  $\Pi_L$ . Примем направление  $-\xi = -r_L^0$  за первую ось  $u$  (рис. 4.3), перпендикулярное вектору  $C_L$  кинетического момента массы  $m_L$  направление  $\eta$  в той полуплоскости плоскости  $\Pi_L$ , которая не содержит скорости  $V_L(t_2)$  массы  $m_L$ , примем за вторую ось

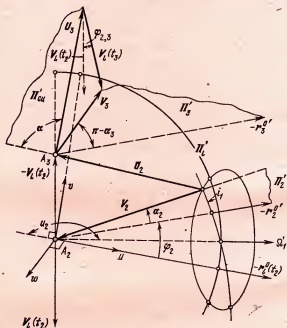


Рис. 4.3. Входные и выходные скорости в пространстве или компонент скоростей.

$v$ , и направление  $\xi = u \times v$  — за третью ось  $w$  системы координат  $A_2uvw$  (рис. 4.3). Тогда скорость  $V_L(t)$  в любой момент  $t$  будет лежать в плоскости  $\Pi'_L = \{uv\}$  — образе плоскости  $\Pi_L$ .

Зададимся долготой  $\bar{\alpha}_{сц}$  и широтой  $\bar{\delta}_{сц}$  точки  $\rho_2$ , знаком  $s_2 = \text{sign } V_{2r}$  и моментом  $t_2$  входа в СД. Так как радиус  $|\rho_2| = \rho_*$  известен, то долготу  $\bar{\alpha}_{сц}$ , широту  $\bar{\delta}_{сц}$  и момент  $t_2$  входа можно реализовать соответствующим вы-

бором элементов  $\Omega_1, \omega_1, \tau_1$  траектории  $\Gamma_{1,2}$ . Пусть такой выбор сделан. Тогда находится аргумент  $u_2$  широты  $m_G$ -центрического входного радиуса  $r_2 = r_L(t_2) + \rho_2$ ,

$$p_1 = \frac{C_1^2}{\mu_G}, \quad a_1 = -\frac{\mu_G}{h_1}, \quad e_1 = \sqrt{1 - \frac{p_1}{a_1}},$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{1}{e_2} \left( \frac{p_1}{r_2} - 1 \right), \quad \text{sign} \sin \vartheta_2 = s_2,$$

$$u_2 = \omega_1 + \vartheta_2(r_2).$$

Входная  $m_G$ -центрическая скорость  $V_2$  находится по  $r_2$  из интеграла энергии, а ее угол  $\alpha_2$  с радиусом  $r_2$  находится из интеграла площадей:

$$V_2^2 = \frac{2\mu_G}{r_2} + h_1, \quad \sin \alpha_2 = \frac{C_1}{r_2 V_2}, \quad \text{sign} \cos \alpha_2 = s_2. \quad (1.5)$$

По аналогу  $w_2 = u_2 + \alpha_2$  аргумента широты для вектора скорости  $V_2$ , углам  $\Omega_1, i_1$  и модулю  $V_2$  находятся компоненты вектора  $V_2$  вдоль осей  $\xi\eta\zeta$  так же, как находятся  $\xi\eta\zeta$  по  $u, \Omega, i, r$  (см. Приложение 7).

Построим в пространстве  $uvw$  (рис. 4.3) образ  $\Pi'_2$  плоскости  $\Pi_2$   $m_G$ -центрического движения по дуге  $\Gamma_{1,2}$ , учитывая, что плоскость  $\Pi'_2$  пересекается плоскостью  $\Pi'_L$  по образу  $\Omega'_1$  оси  $\Omega_1$  под углом  $i_1$  и содержит образ  $r_2^{0'}$  направления  $r_2^0$ , радиуса  $r_2$ . В плоскости  $\Pi'_2$  под углом  $\alpha_2$  к направлению  $r_2^0$  проведем вектор  $V_2$  (рис. 4.3). Проведем из конца его вектор  $-V_L(t_2)$ . Суммарный вектор  $U_2$  будет входной  $m_L$ -центрической скоростью (согласно (1.2)). Движение в невращающейся системе  $m_L\xi\eta\zeta$  происходит в плоскости  $\Pi_{\text{св}}$  векторов  $\rho_2, U_2$  по гиперболе  $\gamma_{2,3}$ . Так как величина выходного  $m_L$ -центрического радиуса  $|\rho_3| = \rho_*$ , то вектор  $U_3$  выходной  $m_L$ -центрической скорости имеет величину  $|U_2|$ . Эту общую величину будем обозначать через  $U$ .

Векторами  $\rho_2, U_2$  определяются элементы  $p', e'$  гиперболы  $\gamma_{2,3}$  (Приложение 8), а из ее уравнения по радиусу  $\rho_3 = \rho_*$  находится истинная аномалия  $\vartheta'_3 = \Phi'/2$  точки 3, где  $\Phi'$  — угловая дальность полета внутри СД (см. рис. 4.4).

Угол  $\alpha$  изменения направления  $m_L$ -центрического движения притяжением массы  $m_L$  за время пребывания точки  $m_0$  в СД находится в плоскости  $\Pi_{сц}$  по угловой дальности  $\Phi'$ , углу  $\alpha'_2$  между векторами  $U_2$  и  $\rho_2$  и углу

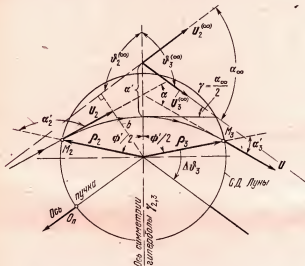


Рис. 4.4. Характеристики селеноцентрического движения в его плоскости  $\Pi_{сц}$ .

$\alpha'_3 = \pi - \alpha'_2$  между векторами  $U_3$  и  $\rho_3$  (рис. 4.4):

$$\alpha = \Phi' - \alpha'_2 + \alpha'_3. \quad (1.6)$$

Проведем в пространстве  $uvw$  в плоскости  $\Pi'_{сц}$  — образе плоскости  $\Pi_{сц}$  — вектор  $U_3$ , образующий с направлением вектора  $U_2$  угол  $\alpha$ , и из конца его проведем вектор  $V_L(t_3)$ , где  $t_3 = t_2 + T_{2,3}$ , а время  $T_{2,3}$  полета внутри СД находится по углу  $\Phi'$  и параметрам гиперболы  $\gamma_{2,3}$  из уравнения Кеплера. Вектор  $V_L(t_3)$  образует известный

угол  $\varphi_{2,3} = \int_{t_2}^{t_3} \omega_L dt$  с вектором  $V_L(t_2)$  в плоскости, парал-

лельной плоскости  $\Pi_L$  (см. рис. 4.3), где образ  $\Pi'_L$  плоскости  $\Pi_L$  содержит часть окружности, пересекающей на-

правления  $u$ ,  $\Omega_1^0$ ,  $v$ ,  $-V_L(t_2)$ . Вектор  $V_3 = U_3 + V_L(t_3)$  согласно (4.4) есть вектор выходной геоцентрической скорости.

Вектор  $\rho_3$  в плоскости  $\Pi_{\text{сн}}$  находится поворотом вектора  $\rho_2$  на угол  $\Phi'$ , и из (1.3) находится выходной  $m_\sigma$ -центрический радиус  $r_3$ , который вместе с вектором  $V_3$  определяет плоскость  $\Pi_3$  (на рис. 4.3 представлен ее образ  $\Pi'_3$  в пространстве  $uvw$  углом  $\pi - \alpha_3$  между векторами  $r_3^{0'}$  и  $V_3$ ) и все параметры движения от СД по  $m_\sigma$ -центрическому коническому сечению  $\Gamma_{3, \kappa}$ .

Заметим, что в пространственной задаче расчета прохождения КА через СД методом ИВ приходится рассматривать 8 плоскостей: три плоскости  $\Pi_2$ ,  $\Pi_{\text{сн}}$ ,  $\Pi_3$  конических сечений, две плоскости треугольников скоростей (1.2) и (1.4), две плоскости треугольников положений (1.1) и (1.3) и основную плоскость  $\Pi_L$  (вместо одной последней плоскости в плоской задаче).

## § 4.2. Анализ скоростных многообразий и переход к методу точечной сферы действия

С помощью методики, описанной в § 4.1, можно рассчитать и построить любую ТС в ограниченной круговой задаче трех точек. Представляет интерес проанализировать хотя бы приближенно совокупность движений по всем возможным ТС. Рассмотрим для этого характеристики совокупности ТС в начале и в конце каждого из последовательных участков движения  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\Gamma_{2,3}$ ,  $\Gamma_{3,\kappa}$ . Одновременно будем производить соответствующие построения в пространстве скоростей. При этом для определенности будем считать, что начальный радиус  $r_1 < r_L$  и что сближение происходит на восходящей ветви ТС ( $V_{2r} > 0$ ). (Чертеж будем строить для облетных ТС в системе  $m_\sigma$  — Земля,  $m_L$  — Луна,  $m_0$  — КА.)

Участок  $\Gamma_{1,2}$  движения к СД определяется выбором точки 2 входа на СД и начальными данными  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$ . Заданием начальных  $m_\sigma$ -центрических энергии  $h_1$  и кинетического момента  $C_1$  задаются форма и размеры участка  $\Gamma_{1,2}$  и, в частности, перицентрический радиус  $r_\pi$ . Пусть  $C_1 < C_1^{(M)}$ , где  $C_1^{(M)}$  — заданная константа. Соответствующую величинам  $h_1$  и  $C_1^{(M)}$  максимальную высоту

перигентрия  $H_{\pi}^{(M)}$  участка  $\Gamma_{1,2}$  будем считать фиксированной и в расчетах примем ее равной 200 км (результаты расчетов будут пригодны и для высот  $H_{\pi}^{(M)}$ , превышающих рассматриваемую вдвое или даже в несколько раз, так как изменения этой высоты невелики по сравнению с начальным геоцентрическим радиусом). При уменьшении  $r_{\pi}$  или  $C_1$  от их максимумов  $r_{\pi}^{(M)} \equiv r_G + H_{\pi}^{(M)}$ ,  $C_1^{(M)}$  до нуля угол  $\alpha_1$  начальной скорости с радиусом на фиксированном расстоянии  $r_1 = r_{\pi}^{(M)}$  уменьшается в диапазоне  $90^\circ > \alpha_1 > 0^\circ$ . Энергия (или скорость  $V_1$  на фиксированном расстоянии  $r_1$ ) будет основным параметром.

Будем считать, что начальное  $m_G$ -центрическое наклонение  $i_1$  изменяется в диапазоне  $(-180^\circ, 180^\circ)$ ; для этого условимся долготу  $\Omega_1$  узла брать более чем на  $\pi/2$  отличной от долготы точки встречи с  $m_L$  (см. Приложение 1).

Рассмотрим совокупность возможных величин  $m_G$ -центрических входных данных при фиксированных значениях  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$  и переменной точке 2 входа. В частности, рассмотрим входную  $m_G$ -центрическую скорость  $V_2$  и ее угол  $\alpha_2$  со входным  $m_G$ -центрическим радиусом  $r_2$  для среднего значения величины этого радиуса  $r_2 = r_L$ . Тогда, согласно интегралу энергии, входная скорость будет зависеть только от начальной энергии  $h_1$  или, что то же, от избытка  $\Delta V_1$  скорости над местной параболической  $V_{\pi}(r_1)$  (на фиксированном расстоянии  $r_1$  от центра  $m_G$ ). Функция  $V_2(h_1)$  является монотонно возрастающей (рис. 4.5). Угол  $\alpha_2$  зависит не только от  $h_1$ , т. е. от начальной скорости, но и от  $C_1$ , т. е. от угла  $\alpha_1$  скорости  $V_1$  с радиусом  $r_1$ . Функция  $\alpha_2(h_1)$  является монотонно убывающей и представлена для  $C_1 = C_1^{(M)}$ , т. е. для начального угла  $\alpha_1 = 90^\circ$  (на высоте  $H_{\pi} = 200$  км), на рис. 4.5. При уменьшении начального угла  $\alpha_1$  соответствующая кривая  $\alpha_2(h_2)$ , начинаясь по-прежнему с ординаты  $90^\circ$ , будет всюду проходить под представленной.

Для определения возможных диапазонов изменения входных данных (в системе Земля — Луна — КА) при изменении входного радиуса  $r_2$  вычислены аналогичные рассмотренным пары кривых  $\hat{V}_2(h_1)$ ,  $\hat{\alpha}_2(h_1)$  и  $\check{V}_2(h_1)$ ,  $\check{\alpha}_2(h_1)$  (рис. 4.5), соответственно для  $r_2^{(M)} = r_L + \rho_*$  и  $r_2^{(m)} = r_L - \rho_*$ , где  $\rho_*$  — радиус СД.

Видно, что для начальных энергий, не близких к минимальным, изменения вектора  $V_2$  входной  $m_G$ -центрической скорости внутри интервала  $|r - r_L| < \rho_*$  малы по сравнению с  $|V_L|$ . Для таких начальных энергий можно

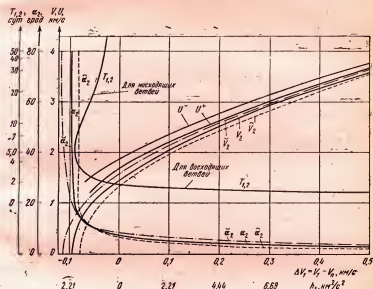


Рис. 4.5. Изменение характеристик в точке входа в сферу действия в зависимости от избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости  $V_1$  над параболической  $V_{II}$ ,  $\hat{V}_2$ ,  $V_2$  и  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2$  — крайние значения входной геоцентрической скорости  $V_2$  и ее угла  $\alpha_2$  со входным геоцентрическим радиусом.  $U^+$  и  $U^-$  — значение входной селеноцентрической скорости для наклонений  $i_1^+ = 0^\circ$ ,  $i_1^- = 180^\circ$ .  $T_{1,2}$  — время полета до орбиты Луны.

приближенно считать [2—1957, стр. 91, 97] — предположение 1, — что при фиксированных параметрах  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$  величина и направление входной  $m_G$ -центрической скорости не зависят от точки входа и имеют средние значения  $V_2(r_2) = V_2(r_L)$  и  $\alpha_2(r_2) = \alpha_2(r_L)$ .

При фиксированных элементах  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$  положение точки 2 входа полностью определяется переменными долготой узла  $\Omega_1$  и аргументом широты перигея  $\omega_1$  конического сечения  $\Gamma_{1,2}$  (и обратно). Поэтому будем задавать вместо  $\Omega_1$  и  $\omega_1$ , как и в § 4.1, долготу  $\alpha_{сд}$  и широту  $\delta_{сд}$

$m_L$ -центрического радиуса  $\rho_2$ . Тогда, фиксируя как-либо момент входа  $t_2$ , найдем, как и в § 4.1,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_L(t_2) + \rho_2$ . Меняя точку входа, будем выбирать элемент  $\tau_1$  траектории  $\Gamma_{1,2}$  так, чтобы сохранить  $t_2$  (при ранее заданных элементах  $h_1, C_1, i_1$ ), независимо от выбора точки 2 входа.

Времена  $T_{1,2}(h)$  полета от Земли до орбиты Луны представлены на рис. 4.5. Они для вертикального и горизонтального направлений начальной скорости оказались весьма близкими. Этот факт, а также резкость изменений функций на рис. 4.5 при энергиях, близких к минимальным, объясняется вытянутостью облетных конических сечений  $\Gamma_{1,2}$  (их эксцентриситеты близки к единице).

При достаточном возрастании начальной скорости кривые  $V_2(h_1)$ ,  $\alpha_2(h_1)$  и  $T_{1,2}(h_1)$  приближаются соответственно к асимптотам

$$V_2 = V_1, \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{r_1 \sin \alpha_1}{r_2}, \quad T_{1,2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — начальный и входной радиусы. Асимптотический характер этих кривых для системы Земля — Луна — КА заметен уже при начальных скоростях, лишь на 0,5 км/с превышающих параболическую (рис. 4.5).

Перейдем к анализу движения внутри СД. Определим  $m_L$ -центрическую начальную (входную) скорость  $U_2$  из (1.2), допустив [2—1957, стр. 92] — предположение 2, — что малым углом  $\varphi_2$  (рис. 4.1 и 4.3) между  $m_G$ -центрическими радиусами точки  $m_L$  и точки входа в СД можно пренебречь (этот угол для системы Земля — Луна — КА не может превосходить  $10^\circ$ ).

Тогда в (1.2) скорость  $V_L(t_2)$  точки  $m_L$  будет ортогональна входному радиусу (рис. 4.3), линия узлов  $\delta'_1$  совпадет с направлением  $(-\mathbf{r}_L(t_2))$ , а величина и направление входной  $m_L$ -центрической скорости  $U_2$  в пространстве скоростей будут одними и теми же для всех рассматриваемых ТС (рис. 4.3—4.6, а). Это значит, что начальные участки  $m_L$ -центрических ТС  $\gamma_{2,3}$  внутри СД все параллельны при фиксированных значениях  $h_1, C_1, i_1$ , а точки входа покрывают половину СД (рис. 4.6, б и 4.7).



Найдем выражение величины  $U_2$  через начальные данные  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $i_1$ ,  $\alpha_1$  и  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$ . Компоненты скорости  $V_2$  по осям  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , определенным в § 4.1 (рис. 4.6, а),

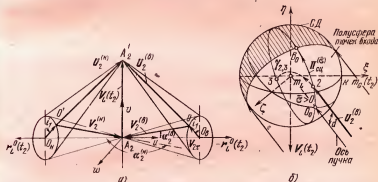


Рис. 4.6. Картины входа траекторий в сферу действия (а) в пространстве  $uvw$  компонент входных скоростей и (б) в пространстве  $\xi\eta\zeta$  селеноцентрических координат при фиксированных геоцентрических энергиях, кинетическом моменте и наклоне  $i_1$ .

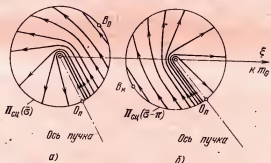


Рис. 4.7. Селеноцентрические траектории в сфере действия Луны в одной плоскости  $\Pi_{сц}$ , проходящей через ось пучка  $O_{п}$ . Точки входа занимают примерно половину сечения сферы действия плоскостью  $\Pi_{сц}$

с учетом предположений 1 и 2 имеют вид

$$-V_2 \cos \alpha_2, \quad -V_2 \sin \alpha_2 \cos i_1, \quad -V_2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_1. \quad (2.2)$$

Из (4.1.2), учтя, что  $V_L = (0, -V_L, 0)$ , получим компоненты вектора  $U_2$ :

$$-V_2 \cos \alpha_2, \quad V_L - V_2 \sin \alpha_2 \cos i_1, \quad -V_2 \sin \alpha_2 \sin i_1. \quad (2.3)$$

С помощью  $m_G$ -центрических интегралов энергии и площадей  $V_1^2 - \frac{2\mu_G}{r_1} = V_2^2 - \frac{2\mu_G}{r_2} = h_1, r_2 V_2 \sin \alpha_2 = r_1 V_1 \sin \alpha_1 = C_1$ , причем  $r_2 \approx r_L$ , вычислим из (2.3)  $U^2$  и преобразуем его к различным видам:

$$\begin{aligned} U^2 &= V_L^2 + V_2^2 - 2V_L V_2 \sin \alpha_2 \cos i_1 = \\ &= V_L^2 + V_1^2 + 2\mu_G \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) - 2 \frac{r_1}{r_2} V_L V_1 \cos i_1 \sin \alpha_1 = \\ &= V_L^2 + \left( \frac{2\mu_G}{r_2} + h_1 \right) - 2V_L \frac{C_1}{r_2} \cos i_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Видим, что при  $i_1 = \text{const}$  и  $C_1 = \text{const}$  величина  $U_2$  есть монотонно возрастающая функция от  $h_1$  (рис. 4.5). При фиксированных  $h_1, C_1$  и переменном  $i_1$  векторы  $U_2(i_1)$  образуют конус с вершиной  $A_2$  (рис. 4.6, а). Из выражений (2.4) следует, что значения  $U^+$  и  $U^-$ , отвечающие оба углу  $\alpha_1 = 90^\circ$  и соответственно наклонениям  $i_1^+ = 0^\circ$  и  $i_1^- = 180^\circ$ , ограничивают снизу и сверху диапазон возможных значений  $U(i_1, \alpha_1)$ . Функции  $U^+(h_1)$  и  $U^-(h_1)$  приведены для облетных ТС на рис. 4.5, из которого видно, что разность  $|U^- - U^+|$  невелика по сравнению с  $U$  и быстро стремится к нулю с ростом начальной скорости. Так, уже при  $h_1 > 10 \text{ км}^2/\text{с}^2$ , т. е. при  $\Delta V_1 \geq 0,5 \text{ км/с}$  разность составляет менее 3% от полусуммы этих скоростей. При произвольных начальных энергиях селеноцентрическая скорость на границе СД превосходит входную геоцентрическую скорость, т. е.  $U_2(h_1) > V_2(h_1)$  (рис. 4.5).

Рассмотрим при фиксированных элементах  $h_1, C_1, i_1$  пучок  $m_L$ -центрических траекторий  $\gamma_{2,3}$  (рис. 4.6, б и 4.7) в невращающейся системе  $m_L \xi \eta \zeta$  (где оси  $\xi \eta \zeta$  параллельны осям  $x_y z_x$  в момент  $t = t_2$ ). Пусть  $O_\Pi$  — точка входа полупрямой — оси пучка, — т. е. траектории  $\gamma_{\text{оп}}$ , проходящей через центр  $m_L$ . Сферические координаты  $\alpha_{\text{оп}}, \delta_{\text{оп}}$  точки  $O_\Pi$  в системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$  (рис. 4.6, б) будут такими же, что и координаты направления вектора  $(-U_2)$  в пространстве скоростей  $uvw$  на рис. 4.6, а, поскольку оси этих систем параллельны. Выразим через углы  $\alpha_{\text{оп}}, \delta_{\text{оп}}$  направляющие косинусы  $\xi_{\text{оп}}^0, \eta_{\text{оп}}^0, \zeta_{\text{оп}}^0$  вектора  $m_L O_\Pi$ :  $\xi_{\text{оп}}^0 = \cos \delta_{\text{оп}} \cos \alpha_{\text{оп}}, \eta_{\text{оп}}^0 = \cos \delta_{\text{оп}} \sin \alpha_{\text{оп}}, \zeta_{\text{оп}}^0 = \sin \delta_{\text{оп}}$ .

С другой стороны, их можно выразить через компоненты (2.3) и модуль  $U$  (2.4) вектора  $U_2$ . Приравнявая эти выражения, получим

$$\begin{aligned}\sin \delta_{\text{оп}} &= \frac{V_2 \sin \alpha_2 \sin i_1}{U}, \quad \cos \delta_{\text{оп}} > 0, \\ \sin \alpha_{\text{оп}} &= \frac{V_2 \sin \alpha_2 \cos i - V_L}{U}, \\ \cos \alpha_{\text{оп}} &= \frac{V_2 \cos \alpha_2}{U \cos \delta_{\text{оп}}}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Условимся задавать азимутом  $\sigma$  в точке  $O_{\pi}$  плоскость  $\Pi_{\text{сц}}$  каждой  $m_L$ -центрической ТС пучка. Угол  $\sigma$  будем отсчитывать в точке  $O_{\pi}$  от плоскости  $m_L O_{\pi} \xi$  по часовой стрелке, если смотреть против направления  $m_L O_{\pi}$  (рис. 4.6, б) в диапазоне  $-\pi < \sigma < \pi$ .

Будем точку 2 входа характеризовать еще прицельным расстоянием, т. е. расстоянием  $d$  вектора скорости  $U_2$  в ней от оси пучка. Тогда для точек входа траекторий, лежащих в каждой полуплоскости  $\Pi_{\text{сц}}$ , имеем диапазон расстояний  $0 < d < \rho_*$ . При изменении азимута в диапазоне  $-\pi < \sigma < 0$  траектории обходят центр  $m_L$  по часовой стрелке, а при изменении  $\sigma$  в диапазоне  $0 < \sigma < \pi$  — против (рис. 4.6, б и 4.7), если смотреть против направления оси  $\xi$ .

Рассмотрим угол  $\alpha$  (рис. 4.4) между входной и выходной  $m_L$ -центрическими скоростями. Поскольку для всех траекторий рассматриваемого пучка направление и величина входной скорости  $U_2$  одни и те же, то угол  $\alpha$  в плоскости  $\Pi_{\text{сц}}$  каждой траектории определяется только расстоянием  $d$  линии действия вектора  $U_2$  от центра  $m_L$ . Притяжение массы  $m_L$  тем сильнее изменяет направление движения, т. е. угол  $\alpha$  тем больше, чем меньше величина  $U$  и чем ближе к  $m_L$  начальное направление движения, т. е. чем меньше  $d$  (см. рис. 4.8, полученный по формуле (1.6) с учетом того, что в ней  $\sin \alpha_2 = \sin \alpha'_2 = d/\rho_*$ ).

Рассмотрим подробнее изменение скорости  $U(\sigma, d)$  для траекторий  $\gamma_{2,3}$  в СД с фиксированными  $m_G$ -центрическими элементами  $h_1, C_1, i_1$  при смещении точки входа в двух противоположных направлениях. При этом уча-

сток движения  $\Gamma_{1,2}$  к СД как целое поворачивается вокруг центра  $m_\sigma$  (за счет изменения только элементов  $\Omega_1, \omega_1$ ). При переходе точки 2 через точку  $O_\pi$  азимут скачком меняется от значения  $\sigma = \bar{\sigma} > 0$  к значению  $\sigma = \bar{\sigma} - \pi$ . Пусть восходящая относительно  $m_\sigma$  траектория  $\Gamma_{1,2}$  сперва лишь касается СД в точке  $B_0$ , обходя ее в полуплоскости  $\Pi_{сд}(\bar{\sigma})$  против часовой стрелки, если смотреть

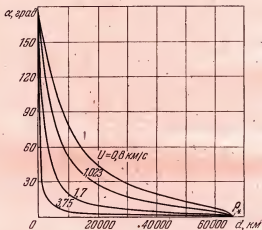


Рис. 4.8. Угол  $\alpha$  между касательными к гиперболе во входной и выходной точках сферы действия, как функция расстояния  $d$  касательной к траектории по входной точке от центра Луны.  $U$  — величина входной (выходной) селеноцентрической скорости.

против направления  $\rho(O_\pi) \times \rho(B_0)$  (рис. 4.6, б, 4.7, а). Имеем  $d = \rho_*$ ,  $\alpha = 0$  и  $U_3|_{\alpha=0} = U_2$ . Если за счет соответствующего изменения углов  $\omega_1, \Omega_1$  траектория  $\gamma_{2,3}$ , оставаясь в плоскости  $\Pi_{сд}(\bar{\sigma})$ , будет приближаться к центру  $m_L$ , а момент  $t_2$  входа не будет изменяться (за счет соответствующего изменения элемента  $\tau_1$ ), то будет происходить уменьшение  $d$  и рост  $\alpha$ , т. е. поворот вектора  $U_3$  против часовой стрелки. Когда станет  $d = 0$ , то  $\alpha$  достигнет  $180^\circ$ , и будет иметь место попадание точки  $m_0$  в точку  $m_L$  по оси пучка  $O_\pi$  (рис. 4.7, а, б). При переходе точки 2 входа через точку  $O_\pi$  в плоскости  $\Pi_{сд}(\bar{\sigma} - \pi)$

изменяется на обратное направление обхода центра  $m_L$  (рис. 4.7, б). Однако точка 3 выхода из СД и конец вектора выходной скорости  $U_3$  обходят соответствующие окружности в пространствах  $m_L\xi\eta\zeta$  и  $A_2uvw$  непрерывно, причём всюду против часовой стрелки. Когда вектор  $U_3$  обойдет полный круг, то становится снова  $\alpha = 0$ ,  $U_3|_{\alpha=0} = U_2$  (в точке  $B_\pi$  на рис. 4.7, б), а при больших чем  $\rho_*$  значениях  $d$  сближение перестает иметь место. Решения с  $U_3 = U_2$  можно назвать *тривиальными*.

Покажем, что для малых  $d$  и любых  $m_L$ -центрических скоростей на СД расстояние  $\rho_\pi$  траектории от центра  $m_L$  является малой порядка  $d^2$  (для попадания в Луну это важно). Действительно, из  $m_L$ -центрических интегралов площадей и энергии

$$\rho_\pi U_\pi = dU, \quad U_\pi^2 = \frac{2\mu_L}{\rho_\pi} + U_\infty^2,$$

где  $U_\infty^2 = U^2 - 2\mu_L/\rho_*$ , получим

$$\left(U^2 - \frac{2\mu_L}{\rho_*}\right)\rho_\pi^2 + 2\mu_L\rho_\pi - d^2U^2 = 0,$$

откуда

$$\rho_\pi = \frac{d^2U^2}{\mu_L + \sqrt{\mu_L^2 + d^2U_\infty^2}}, \quad (2.6)$$

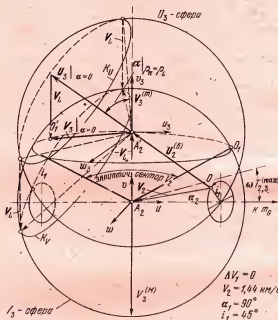
т. е.  $\rho_\pi \approx \frac{(d \cdot U)^2}{2\mu_L}$  для малых  $d$ . Заметим, что при ма-

лых  $d$  траектория в СД изгибается так круто, что по внешнему виду приближается к углу, образуемому соответствующими ей скоростями  $U_2$  и  $U_3$  на  $m_L$ -центрическом плане скоростей — плоскости  $\Pi_{сц}$  в пространстве  $uvw$  (рис. 4.3), соответствующей плоскости  $\Pi_{сц}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ .

Выше для траекторий в любой полуплоскости  $\Pi_{сц}(\sigma)$ , проходящей через ось пучка, показано, что соответствующие векторы  $U_3$  своими концами заполняют полукруг радиуса  $U$  (в пространстве скоростей). Если при этом брать все азимуты  $-\pi < \sigma < \pi$ , то векторы  $U_3$  выходных селеноцентрических скоростей в пространстве скоростей  $u, v, w$  сплошь заполнят сферу радиуса  $U$  с

центром  $A_2'$  (верхняя сфера на рис. 4.9). Таким образом, при фиксированных  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$  многообразие выходных  $m_L$ -центрических скоростей  $U_3$  является сферой; будем ее кратко называть  $U_3$ -сферой.

Интересны зависимости от  $U$  функций  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\Phi'$  для траекторий с фиксированным расстоянием  $\rho_\pi$  от центра



Угол  $\alpha$  поворота направления движения Луной для этих траекторий превышает  $90^\circ$  (рис. 4.10) лишь для скоростей  $U$ , близких к минимальным, и с ростом  $U$  приближается к нулю. На рис. 4.9 векторы  $U_3$ , отвечающие траекториям касания и параллельные плоскости лунной орбиты, проведены пунктиром. Траекториям сближения, не соударяющимся с Луной, могут отвечать лишь векторы, заключенные в конусе с осью  $A_1A_2$  и углом раствора, равным  $\alpha|_{\rho_\pi=\rho_L}$ .

Времена полета внутри СД  $T_{2,3} = t_3 - t_2$  как функции расстояния  $|d|$  для фиксированных значений селеноцентрической скорости  $U$  входа в СД представлены на рис. 4.11. Покажем, что для фиксированного значения  $U$  максимум функции  $T_{2,3}(d)$  достигается при таком значении  $d$ , для которого  $\Phi' = 180^\circ$ . Соответствующее значение  $d = \rho_* U_\pi^* / U \sqrt{2}$ , где  $U_\pi^* = \sqrt{2\mu_L / \rho_*}$  есть  $m_L$ -центрическая параболическая скорость на границе СД. Действительно, приравнявая нулю производную по  $d$  от времени полета в СД

$$T_{2,3} = \frac{2(a')^{3/2}}{\sqrt{\mu_L}} (e' \operatorname{sh} F' - F'),$$

получим уравнение

$$\frac{\partial e'}{\partial d} \operatorname{sh} F' + (e' \operatorname{ch} F' - 1) \frac{\partial F'}{\partial d} = 0, \quad (2.7)$$

где  $F'$  — гиперболический аналог эксцентрической аномалии:  $\rho_* = a'(e' \operatorname{ch} F' - 1)$ . Величина  $a'$  не дифференцируется, так как рассматриваемый пучок траектории явля-

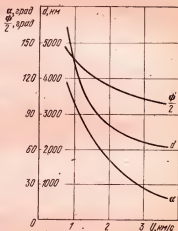


Рис. 4.10. Характеристики селеноцентрических траекторий, проходящих у поверхности Луны:  $\Phi'$  — селеноцентрический угол проходимый КА внутри сферы действия;  $\alpha$  — угол между касательными к траектории во входной и выходной точках;  $d$  — расстояние входной (выходной) касательной от центра Луны;  $U$  — входная селеноцентрическая скорость.

ется изоэнергетическим:

$$a' = \mu_L \left( U^2 - \frac{2\mu_G}{\rho_*} \right)^{-1} = \text{const.}$$

Приравнявая нулю производную от  $\rho_*$ , получим

$$\frac{\partial e'}{\partial d} \operatorname{ch} F' + e' \operatorname{sh} F' \frac{\partial F'}{\partial d} = 0. \quad (2.8)$$

Исключая  $\partial F'/\partial d$  из полученных уравнений, имеем (учитывая, что  $e' \neq 0$ ):  $e' \operatorname{sh} F' = (e' \operatorname{ch} F' - 1) \operatorname{ch} F'$ , или  $e' =$

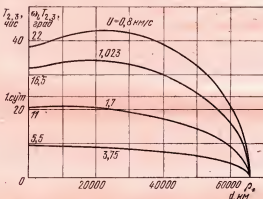


Рис. 4.11. Зависимость времени  $T_{2,3}$  полета в сфере действия от прицельного расстояния  $d$ . Заметна стабильность  $T_{2,3}$  при  $d < 40$  тыс. км.

$= \operatorname{ch} F'$ . Тогда  $\rho_* = a' (e'^2 - 1) = p'$ . Соответствующая истинная аномалия  $\theta'_* = 90^\circ$  и  $\Phi' = 2\theta'_* = 180^\circ$ . Замена  $p' = d^2 \frac{U^2}{\mu_L}$  дает  $d = \frac{\rho_* U_*^2}{U \sqrt{2}}$ .

Существование максимума следует из того, что  $T_{2,3}$  убывает при  $d \rightarrow 0$  за счет усиления ускоряющего действия массы  $m_L$  и при  $d \rightarrow \rho_*$  за счет сокращения длины дуги гиперболы внутри СД. Найденные максимумы слабо выражены, и для расстояний  $|d|$ , не близких к  $\rho_*$ , можно считать  $T_{2,3}$  постоянным и зависящим только от  $U$  (с учетом принятых допущений). Рассмотрим теперь  $m_\sigma$ -центрические выходные данные и построим выходные



$m_G$ -центрические скорости  $V_3(\sigma, d)$  в пространстве скоростей  $uvw$ . Эти скорости получаются из соответствующих  $m_L$ -центрических скоростей  $U_3(\sigma, d)$  прибавлением вектора  $V_L(t_3)$  скорости массы  $m_L$ . Он повернут относительно вектора  $V_L(t_2)$  на небольшой угол  $\varphi_L = \omega_L(t_3 - t_2)$  между направлениями  $m_G m_L$  соответственно в моменты  $t_2$  входа и  $t_3$  выхода (рис. 4.1 и 4.3). Для системы Земля — Луна угловая скорость  $\omega_L = 13,5$  град/сут, так что  $\varphi_L < \omega_L T_{2,3}^{(M)} \approx 24^\circ$ .

Будем считать [2—1957, стр. 96] — предположение 3, — что углом  $\varphi_L$  можно пренебречь в приближенном рассмотрении, т. е. что  $V_L(t_3) = V_L(t_2)$ . Тогда геометрическое место концов векторов  $m_G$ -центрических выходных скоростей  $V_3(d)$ , идущих из точки  $A'_2$ , будет сферой радиуса  $U$  с центром в точке  $A_2$  (нижняя сфера на рис. 4.9). Заметим, что в рассматриваемом приближении многообразие выходных скоростей  $V_3$  заполняет целиком эту сферу. Будем ее кратко называть  $V_3$ -сферой.

Рассмотрим далее участки  $\Gamma_{3,k}$  движения от массы  $m_L$  по  $m_G$ -центрическим коническим сечениям вне ее СД. Каждая такая траектория начинается в точке  $З$  на СД и продолжается под действием лишь притяжения массы  $m_G$ . При этом выходной  $m_G$ -центрический радиус  $r_3$  любой из этих траекторий образует с направлением  $r_L(t_3)$  малый угол  $\varphi_3$  (рис. 4.1) (не превышающий для системы Земля — Луна  $10^\circ$ , как и угол  $\varphi_2$ ). Будем считать [2—1957, стр. 104] — предположение 4, — что углом  $\varphi_3$  в приближенном рассмотрении можно пренебречь (так же, как пренебрегли углом  $\varphi_2$ ). Тогда  $m_G$ -центрические движения от СД по траекториям  $\Gamma_{3,k}$  будут начинаться на прямой  $m_G m_L$  со скоростями  $V_3$ , концы которых принадлежат рассмотренной выше  $V_3$ -сфере (рис. 4.9).

Допустим еще — предположение 5, — что выходной  $m_G$ -центрический радиус, как и входной, имеет среднее значение:  $r_3 = r_L$  (в [2—1957, стр. 104] роль  $r_L$  играет  $a$ ). Применение предположений 1—5 при использовании метода ИВ дает упрощенный вариант этого метода. Этот вариант был обоснован и применен к перелетам Земля — Луна в работах [1, 2—1957]. Его можно назвать также *методом точечной сферы действия* — ТСД, или методом «стягивания сферы действия в точку» [1—1976], поскольку

ку предположения 1, 2 и 4, 5 говорят о несущественности отличия входного  $r_2$  и выходного  $r_3$  радиусов-векторов частицы  $m_0$  от соответствующих радиусов-векторов  $r_L(t_2)$  и  $r_L(t_3)$  массы  $m_L$ ; предположение 3 говорит о несущественности времени пребывания частицы  $m_0$  в СД и связанного с ним различия векторов скорости  $V_L(t_2)$  и  $V_L(t_3)$ .

Заметим, что все предположения метода ТСД в точности реализуются в том случае ограниченной задачи трех тел, когда отношение  $\mu = m_L/m_0$  притягивающих масс бесконечно мало. В этом случае отношение радиуса  $\rho^*$  СД массы  $m_L$  к расстоянию  $r_L$  тоже бесконечно мало, и СД может при анализе движений вне ее считаться точкой.

Заметим, кроме того, что в случае очень малых  $\mu$  не только метод ТСД эквивалентен методу ИВ, но и последний эквивалентен точному методу ЧИ на участках  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\gamma_{2,3}$ ,  $\Gamma_{3,4}$ , так как отношение неучитываемых в методе ИВ возмущений к притяжению центрального тела стремится к нулю вместе с  $\mu$  [2—1937, стр. 194].

Представляет интерес проанализировать методом ТСД скоростные  $U_3$ - и  $V_3$ -многообразия и совокупность соответствующих ТС в рамках ограниченной круговой задачи трех точек  $m_0$ ,  $m_L$ ,  $m_0$ .

### § 4.3. Анализ множества траекторий сближения методом точечной сферы действия

В § 4.2 лишь для определенности считалось, что  $r_1 < r_L$  и что у  $m_0$ -центрической скорости  $V_2$  входа в СД радиальная компонента  $V_{2r} > 0$ . С теми же предположениями 1—5 приходим к методу ТСД и при  $r_1 > r_L$ . В случае  $V_{2r} < 0$ , т. е. при сближении на нисходящей по отношению к  $m_0$  ветви дуги  $\Gamma_{1,2}$  при тех же начальных данных  $h_1$ ,  $C_1$ ,  $i_1$  и при тех же пяти допущениях метода ТСД, что и для сближения на восходящей ветви, получим векторы

$$\overrightarrow{O'A_2} = V^{(n)} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{O'A_2} = U_2^{(n)} \quad (3.1)$$

(рис. 4.6, а), симметричные прежним  $V_2 \equiv V_2^{(n)}$  и  $U_2 \equiv U_2^{(n)}$  относительно плоскости  $vw$ . Рассматривая в слу-

чае сближения на нисходящей ветви точку входа на СД, симметричную точке входа восходящей ветви, получим внутри СД траекторию  $\gamma_{2,3}^{(n)}$ , симметричную траектории  $\gamma_{2,3}^{(B)}$ , получающейся при сближении на восходящей ветви. Следовательно, любому вектору  $U_3^{(n)}$  для нисходящей ветви соответствует симметричный относительно плоскости  $vw$  вектор  $U_3^{(B)}$  для восходящей ветви. Значит, многообразие скоростей  $U_3^{(n)}$  для нисходящих ветвей симметрично  $U_3^{(B)}$ -многообразию для восходящих ветвей; поскольку в (1.4) вектор  $V_L$  принадлежит оси  $v$  в плоскости  $vw$ , то  $V_3^{(n)}$ -многообразие тоже будет симметрично прежнему. Благодаря этому можно одновременно исследовать оба  $V_3$ -многообразия, что и делается ниже, причем для любых ТС (а не только облетных, для которых были построены рис. 4.1—4.11). Специфика облетных ТС не использовалась в рассуждениях и предположениях 1—5 в § 4.2.

При начальных скоростях, для которых  $U > V_L$ , из рис. 4.9 получаем максимальное и минимальное значения выходной  $m_c$ -центрической скорости:

$$V_3^{(m)} = U - V_L, \quad (3.2)$$

$$V_3^{(M)} = U + V_L. \quad (3.3)$$

При  $U > V_L$  существуют выходные  $m_c$ -центрические скорости  $V_3$  любого направления, каковы бы ни были величина и направление начальной скорости (если массу  $m_L$  считать точкой, а не телом). Так как величина  $U$  согласно (2.4) монотонно растет по мере роста угла  $i_1$  (причем этот рост тем больше, чем больше угол  $\alpha_1$  начальной скорости с радиусом), то при  $r_1 < r_2$  многообразие скоростей, построенные для угла  $i_1 = 0$ , будут иметь меньшие размеры, чем для угла  $i_1 = 180^\circ$ , а для промежуточных углов  $i_1$  все характеристики многообразий промежуточны. Поэтому интересно рассмотреть характеристики при  $\alpha_1 = 90^\circ$  в крайних случаях  $i_1^+ = 0^\circ$  и  $i_1^- = 180^\circ$ , отмечая их соответственно значками «+» и «-» (соответственно знаку  $\cos i_1$  в (2.4)).

Проследим кратко эволюцию скоростных многообразий с изменением начальной энергии  $h_1$ , начиная с боль-

ших энергий  $h_1$ . Так как согласно формуле (2.4) величина  $U$  растет вместе с  $h_1$  неограниченно, то при достаточно больших значениях  $h_1$  будет

$$U - V_L > V_\pi(r_L), \quad V_\pi(r_L) = \sqrt{2\mu/r_\alpha}, \quad (3.4)$$

так что все  $m_L$ -центрические скорости выхода из СД будут гиперболическими.

При уменьшении энергии  $h_1$  до такого значения  $h_\pi$ , при котором неравенство (3.4) обратится в равенство, на  $V_3$ -сфере появляется вектор  $(0, V_3^{(m)}, 0)$  с модулем

$$U^+ - V_L = V_\pi(r_L), \quad (3.5)$$

и при меньших значениях  $h_1$   $V_3$ -сфера содержит область эллиптических скоростей, которая является прямым круговым конусом с осью  $v$  и углом раствора  $\kappa_0$ , находимым по теореме косинусов для треугольника скоростей со сторонами  $V_\pi$ ,  $U$ ,  $V_L$  (рис. 4.9):

$$U^2 = V_L^2 + V_\pi^2 + 2V_L V_\pi \cos \kappa_0. \quad (3.6)$$

Значение  $h_\pi$  находится из (2.4) и (3.6) при  $\kappa_0 = 0$ ,  $r_2 = r_L$ :

$$h_\pi = 2V_L(V_\pi + C_1 \cos i_1/r_L). \quad (3.7)$$

Оно зависит от  $\cos i_1$  и заключено между

$$h_\pi^- = h_\pi|_{\cos i_1 = -1} \quad \text{и} \quad h_\pi^+ = h_\pi|_{\cos i_1 = 1},$$

так что с уменьшением  $h_1$  эллиптические скорости появляются сначала для  $i_1 = 0$ , а затем и для больших значений  $i_1$ .

При дальнейшем уменьшении  $h_1$  размеры  $U_3$ - и  $V_3$ -сфер уменьшаются, а сектор эллиптических скоростей  $V_3$  занимает все большую часть поверхности  $V_3$ -сферы. Этот сектор располагается на рис. 4.9 выше горизонтального малого круга, лежащего в плоскости  $v = v_\pi$ . Значение  $v_\pi$  можно найти из треугольника, у которого сторонами являются векторы  $-V_L$  и  $V_3$ , где  $V_3 = V_\pi(r_L)$ . Третьей стороной является их сумма длиной  $U$  (рис. 4.9). Условие, что плоскость  $v = v_\pi$  ортогональна вектору  $V_L$ , дает соотношение

$$V_\pi^2 - (V_L - v_\pi)^2 = U^2 - v_\pi^2, \quad (3.8)$$

которое вместе с (2.4) дает

$$v_n = V_L + \frac{h_1}{2V_L} - \frac{C \cos i_1}{r_L}. \quad (3.9)$$

С уменьшением  $U$  до значения  $V_n(r_L)$  рассматриваемый треугольник скоростей становится равнобедренным, так что становится  $v_n = V_L/2$ .

При переходе  $h_1$  от положительных значений к отрицательным в случае  $r_1 < r_L$  появляется возможность сбли-

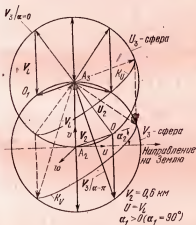


Рис. 4.12. Сферы выходных скоростей  $U_3$  и  $V_3$  в случае, когда величины входной селеноцентрической скорости  $U_2$  и скорости Луны  $V_L$  равны. Движение вне сферы действия возможно лишь в направлениях, отклоняющихся от  $V_L$  менее чем на  $90^\circ$ .

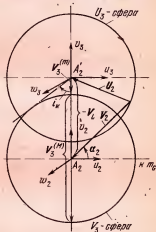


Рис. 4.13. Сферы выходных скоростей  $U_3$  и  $V_3$  в случае, когда  $U < V_L$ . Конус скоростей  $V_3$  тем уже, чем меньше  $(V_L - U)/V_L$ .

жения на нисходящей по отношению к  $m_a$  ветви траектории  $\Gamma_{1,2}$ . Когда с уменьшением энергии  $h_1$  входная  $m_L$ -центрическая скорость уменьшается до  $U = V_L$ , то появляется равная нулю выходная  $m_a$ -центрическая скорость:  $V_3^m$  (рис. 4.12). Соответствующее значение  $h_1 = h_*$  находится из (2.4) при  $U = V_L$ ,  $r_2 = r_L$ :

$$h_* = -V_n^2(r_L) + 2V_L C_1 \cos i_1 / r_L. \quad (3.10)$$

Это значение является критическим в том смысле, что при  $h_1 > h_*$  выходные  $m_0$ -центрические скорости  $V_3$  имеют любые направления, а при  $h_1 < h_*$  (рис. 4.13) они все направлены по одну (отрицательную) сторону от плоскости  $v = V_L$  в прямом круговом конусе с осью  $v$  и углом раствора

$$i_k = \arcsin \frac{U}{V_L}. \quad (3.14)$$

Однако выходные  $m_L$ -центрические скорости  $U_3$  для  $U_2 < U_L$  при выполнении предположений 1—5 метода ТСД по-прежнему могут иметь любые направления. Плоскость  $v = V_L$  удобно принять за основную  $u_3 v_3$  и рассматривать выходные скорости  $U_3$  и  $V_3$  в скоростном пространстве  $A_2 u_3 v_3 w_3$  (рис. 4.9, 4.13) (смысл  $A_2$  и  $A_3$  одинаков).

При  $h_1 < h_*$  как видно из рис. 4.13, модуль минимальной  $m_0$ -центрической скорости  $V_3^{(m)}$  следует считать по новой формуле (вместо (3.2)):

$$V_3^{(m)} = V_L - U, \quad (3.2')$$

а формула (3.3) для  $V_3^{(M)}$  остается справедливой. Когда  $h$  уменьшится настолько, что станет  $U + V_L < V_n(r_L)$ , тогда сектор эллиптических скоростей займет всю  $V_3$ -сферу. Соответствующее значение  $h_1 = h_*$  получается из (2.4) и (3.6) при  $\kappa_3 = \pi$ :

$$h_* = 2V_L(-V_n + C_1 \cos i_1/r_L). \quad (3.12)$$

При этом радиус  $U_n$  рассматриваемых сфер невелик:

$$U < V_n(r_L) - V_L = (\sqrt{2} - 1)V_L,$$

т. е. составляет менее половины  $V_L$ . Поскольку по определению  $U = |U_2| = |U_3|$ , а  $U_2 = V_2 - V_L$ , то  $m_0$ -центрические скорости точек  $m_0$  и  $m_L$  не сильно отличаются одна от другой.

С дальнейшим уменьшением  $h_1$  это отличие уменьшается, причем до нуля при  $U = 0$  (получить  $U = 0$  из (2.4) можно лишь при  $i = 0$ ,  $C_1 = C_L = r_L V_L$ , т. е.  $V_2 = V_L$ ). Соответствующее значение  $h = h_m = h_L = -\mu_0/r_L$ . Однако близкие к нулю значения  $U$  рассматривать не следует, так как не будет выполняться основное предположение

метода ИВ о достаточно сильной гиперболичности  $m_L$ -центрического движения. При этом окрестности границы СД будут проходиться долго, и возмущения накопятся настолько, что ими нельзя будет пренебречь. По-видимому, крайние значения  $h_1$ , при которых еще имеет смысл применять методы ИВ и ТСД, могут быть порядка  $h_3$ .

#### § 4.4. Метод скоростных многообразий

С помощью предположений 1—5 метода ТСД удается свести решение задачи о ТС к анализу только многообразий скоростей в характерных точках 2 и 3 каждой ТС на СД. Совокупность  $m_c$ -центрических скоростей в этих точках образует довольно простое (сферическое) «скоростное многообразие». Его анализ в конкретных задачах перелета между Землей и Луной позволяет судить о числе и свойствах решений, а также позволяет приближенно вычислить эти решения. Сведение анализа траекторий к анализу скоростей можно назвать *методом скоростных многообразий*, поскольку его реализация состоит в построении и изучении скоростных многообразий в характерных точках траектории. Этот метод может быть применен к различным задачам баллистики, например, к следующим.

1. Рассмотрим перелет КА между двумя заданными точками 1 и 2 в центральном гравитационном поле.

Пусть точки 1 и 2 заданы их радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а притягивающий центр  $M$  имеет гравитационный параметр  $\mu$ . Угол  $\Phi$  между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  задан. Как и в § 4.1, он является угловой дальностью перелета КА (рис. 4.14). Требуется найти геометрическое место  $\Sigma$  концов векторов скорости  $\mathbf{V}_1$  в точке 1, обеспечивающих перелет КА в точку 2, и указать минимальный по величине вектор  $\mathbf{V}_1^{(m)}$ .

Траектории перелета между точками 1 и 2 являются коническими сечениями в плоскости векторов  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  с фокусом  $M$ . Искомое геометрическое место будем строить в пространстве  $V_r$ ,  $V_\tau$  компонент скорости  $\mathbf{V}_1$  по радиусу  $r$  и трансверсали  $\tau$  (рис. 4.14).

Обозначим через  $\theta_1$  угол вектора  $\mathbf{V}_1$  с трансверсалью, тогда  $\operatorname{tg} \theta_1 = V_r/V_\tau$ ,  $V_1^2 = V_r^2 + V_\tau^2$ . Угловая дальность  $\Phi$ ,

угол  $\theta_1$  и скорость  $V_1$  связаны между собой формулой [1—1968, стр. 49]:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \Phi}{v \cos^2 \theta_1 - \cos \theta_1 \cdot \cos (\Phi + \theta_1)}, \quad (4.1)$$

где  $v = r_1/r_2$ ,  $\beta_1 = V_1^2/V_n^2(r_1)$ ,  $V_n^2(r_1) = 2\mu/r_1$ . Переходя в

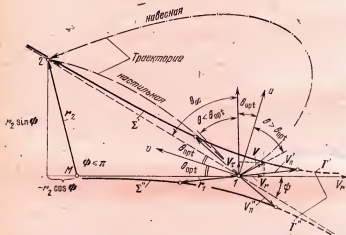


Рис. 4.14. Скоростные многообразия  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  (части гиперболы  $\Gamma$ ) начальных скоростей  $V_1$  множества траекторий перелета из точки 1 в точку 2 в центральном гравитационном поле.

формуле (4.1) от  $\cos \theta_1$  и  $\sin \theta_1$  к  $\operatorname{tg} \theta_1$  и вводя обозначения  $\Theta = \operatorname{tg} \theta_1$ ,

$$C_1 = \frac{v - \cos \Phi}{1 - \cos \Phi}, \quad C_2 = \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi}, \quad (4.2)$$

получим выражение

$$2\beta_1 = (1 + \Theta^2)/(C_1 + C_2 \cdot \Theta) \quad (4.3)$$

и уравнение гиперболы  $\Gamma$

$$C_1 V_\tau^2 + C_2 V_r V_\tau = V_n^2/2, \quad (4.4)$$

которую можно назвать гиперболой начальных скоростей. Одна ее асимптота  $V_\tau = 0$  имеет направление радиуса-вектора  $r_1$ . Другая асимптота  $C_1 V_\tau + C_2 V_r = 0$  отклонена



от оси  $V_\tau$  на угол  $\theta_{ac}$  такой, что

$$\operatorname{tg} \theta_{ac} = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{-r_1 + r_2 \cos \Phi}{r_2 \sin \Phi}, \quad (4.5)$$

т. е. вторая асимптота, как видно из треугольника  $1M2$ , имеет направление 1, 2. Мнимая ось  $v$  гиперболы делит пополам угол  $\psi$  (рис. 4.14) между направлениями асимптот (1, 2) и  $(-r_1)$ . Как видно из треугольника  $1M2$ , имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} 2\theta_{opt} = \frac{r_2 \sin \Phi}{r_1 - r_2 \cos \Phi}. \quad (4.6)$$

Для одной части  $\Sigma'$  гиперболы имеем угловые дальности  $\Phi' < \pi$ , для другой  $\Sigma''$  имеем  $\Phi'' = 2\pi - \Phi' > \pi$ , и направления отсчета углов  $\Phi'$  и  $\Phi''$  противоположны.

Теперь очевидно, что необходимая для перелета в точку 2 минимальная скорость в точке 1 направлена под углом  $\theta_{opt}$  к оси  $V_\tau$  и совпадает с направлением действительной оси гиперболы  $\Gamma$ . При  $\theta_1 > \theta_{opt}$  траектории являются навесными, а при  $\theta_1 < \theta_{opt}$  — настильными.

Заметим, что множеством  $\Sigma$  начальных скоростей  $V_1$  перелета КА из точки 1 в точку 2 с заданной угловой дальностью является не вся гипербола  $\Gamma$  (4.4), а лишь ее часть, не содержащая векторы  $V_1$  с проекцией  $V_{\pi} < 0$  и модулем  $V_1 \geq V_{\pi}(r_1)$  (пунктир на рис. 4.14), так как КА по соответствующим этим векторам траекториям не приходит в точку 2, а уходит в бесконечность.

Время полета  $T_{1,2}$  вдоль каждой из частей  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  гиперболы меняется монотонно от нуля до бесконечности. При этом  $T_{1,2} \rightarrow 0$ , когда начальная скорость неограниченно возрастает, приближаясь по направлению к асимптоте — полупрямой (1, 2) или (1,  $M$ );  $T_{1,2} \rightarrow \infty$ , когда начальная скорость  $V$  приближается к двум векторам  $V'_\pi, V''_\pi$  параболической скорости с проекцией  $V_{\pi} < 0$ . Из рис. 4.14 видно, что вдоль каждой из ветвей гиперболы  $\Gamma$  параметр  $\Theta = \operatorname{tg} \theta_1$  (как и угол  $\theta_1$ ) меняется монотонно. Пределы  $\Theta^\pm$  для  $\Theta$  со стороны больших  $T$  найдем, приравняв  $\beta_1 = 1$  в (4.3). Получим квадратное уравнение с корнями

$$\Theta^\pm = C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + 2C_1 - 1}. \quad (4.7)$$

Из рис. 4.14 видно, что  $\operatorname{tg} \theta_{ac} < \Theta < \Theta^+$ ,  $|\theta_1| < 90^\circ$  на части  $\Sigma'$  и  $+\infty > \Theta > \Theta^-$ ,  $|\theta_1| > 90^\circ$  на части  $\Sigma''$ .

Из этого анализа следует, что любому заданному времени  $T = \bar{T}$  перелета 1, 2 соответствует два вектора  $V_1$  — по одному на каждой из частей  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ . Если же задать направление обхода центра притяжения ( $|\theta_1| < 90^\circ$  или  $|\theta_1| > 90^\circ$ ), то задача Ламберта — задача о перелете 1, 2 за заданное время при заданных  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\Phi$  — имеет единственное решение. Найти соответствующие  $\Theta_1$ ,  $\theta_1$ ,  $V_1$  проще всего численно — итерациями по аргументу  $\theta_1$  (или  $\Theta$ ), уничтожающими невязку  $z = T(\Theta) - \bar{T}$ . Задав какое-либо значение  $\theta_1$ , из (4.1) находим  $\beta_1$  и  $V_1$ , затем находим параметр  $p$ , полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  конического сечения:

$$p = 2r_1\beta_1 \cos^2\theta_1, \quad a = \frac{-r}{2(\beta_1 - 1)}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \quad (4.8)$$

Находим истинную аномалию  $\vartheta$  точки 1 по

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_1} - 1 \right), \quad \sin \vartheta_1 = \frac{V_1 \sin \theta_1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad (4.9)$$

истинную аномалию точки 2

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Phi. \quad (4.10)$$

Эксцентрисические аномалии  $E_1$  и  $E_2$  точек 1 и 2 при  $e < 1$  или их аналоги  $E_1$  и  $E_2$  при  $e > 1$  находим по

$$\operatorname{tg} \frac{E_i}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2}; \quad (4.11)$$

далее находим [1—1968]

$$M_i = E_i - e \sin E_i, \quad e < 1, \quad (4.12)$$

$$M_i = e \operatorname{tg} E_i - \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{E_i}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad e > 1, \quad (4.13)$$

и

$$T = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (M_2 - M_1). \quad (4.14)$$

Меняя  $\theta_1$  так, чтобы стало  $|z| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность, получим  $T = \bar{T}$ .

В качестве начального приближения для  $\theta_1^0$  при  $\Phi < 180^\circ$  можно взять  $\theta_{\text{opt}}$  для эллиптических траекторий и  $\arctg \theta^-$  — для гиперболических; при  $\Phi > 180^\circ$  будет соответственно  $\theta_1^0 = -\theta_{\text{opt}}$  и  $\theta_1^0 = -\arctg \theta^+$ .

2. Теперь построим в пространстве скоростей многообразие  $\Sigma$ , точки которого являются концами векторов начальной скорости, позволяющих достигнуть из данной начальной точки  $B_0$  заданного расстояния  $R$  (пусть в точке  $B_n$ ) от притягивающей массы  $M$ . Траекториями будут конические сечения с фокусом в точке  $M$ , плоскости которых проходят через прямую  $MB_0$ . Построим в точке  $B_0$  систему координат  $uvw$ , в которой ось  $u$  направлена по начальному радиусу-вектору  $r_0$ , ось  $v$  — по трансверсали в плоскости траектории, а ось  $w$  образует с осями  $u, v$  правую тройку направлений.

Условие, что КА достигает в точке  $B_n$  заданного радиуса  $R$ , может быть получено из интегралов энергии и площадей в точках  $B_0$  и  $B_n$

$$u_0^2 + v_0^2 = 2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2a} \right), \quad u_n^2 + v_n^2 = 2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2a} \right),$$

$r_0 v_0 = R v_n$ , как условие  $u_n^2 \geq 0$ . Примем  $r_0$  за единицу длины. Тогда исключением большой полуоси  $a$  и компоненты  $v_n$  получим

$$u_n^2 = 2 \left( \frac{1}{R} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) v_0^2 + u_0^2 \geq 0.$$

Уравнение  $u_n^2 = 0$ , т. е. уравнение

$$\frac{v_0^2}{2R(1+R)^{-1}} + \frac{u_0^2}{2(R-1)R^{-1}} = 1 \quad (4.15)$$

выражает в пространстве  $u, v$  радиальной и трансверсальной скоростей искомое геометрическое место  $\Sigma$  — эллипс (при  $R > 1$ ), или гиперболу (при  $R < 1$ ) с полуосями

$$A = \sqrt{\frac{2R}{1+R}}, \quad B = \sqrt{\frac{2|R-1|}{R}}. \quad (4.16)$$

На рис. 4.15 с учетом симметрии представлены их четвертушки.

Условие  $u_n^2 \geq 0$  означает, что точка  $(u_0, v_0)$  не должна находиться (в плоскости скоростей) внутри эллипса (4.15) при  $R > 1$  и вне гиперболы (4.15) при  $R < 1$ . В пространстве скоростей соответственно имеем эллипсоид или гиперboloид вращения вокруг оси  $u$  (в силу симметрии и условий относительно радиального направления):

$$\frac{v^2 + w^2}{2R/(R+1)} + \frac{u^2}{2(R-1)/R} = 1 \quad (4.17)$$

или

$$\frac{u^2 + w^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1.$$

3. Если в точке  $B$  уже есть какая-то скорость  $V_0$ , то задача определения минимального импульса, необходимого для достижения траекторией расстояния  $R$ , сводит-

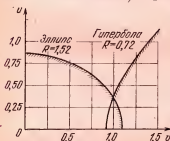


Рис. 4.15. Скоростные многообразия (эллипс или гипербола) начальных скоростей перелета из заданной точки  $g_0$  ( $r_0=1$ ) на заданное расстояние ( $R>1$  или  $R<1$ ) от центра тяготения.

ся к минимизации расстояния от точки  $V_0$  до многообразия  $\Sigma$  в пространстве скоростей. Таким способом можно решить задачу [4—1970] о нахождении траектории, начинающейся на орбите Земли вне ее СД и достигающей заданного расстояния от Солнца при наименьших затратах топлива для ее реализации.

Зададимся каким-либо наклонением  $i$  траектории к плоскости эклиптики и будем

относить гелиоцентрические начальные данные к центру Земли, пренебрегая размерами ее СД.

Выразим в системе координат  $uvw$  геоцентрическую выходную скорость  $V$  КА через гелиоцентрические скорости КА  $V_c(u_0, v_0, w_0)$  и Земли  $V_0(0, \cos i, -\sin i)$  (здесь скорость Земли принята за единицу скорости):

$$V = V_c - V_0, \quad V^2 = u^2 + (v - \cos i)^2 + \sin^2 i. \quad (4.18)$$

Задача состоит в нахождении такой точки  $V_c(u, v, 0) \in \Sigma$  (4.17), для которой расстояние  $V$  (в пространстве

скоростей) до заданной точки  $V_c(0, \cos i, -\sin i)$  минимально.

При  $R > 1$  оптимальную точку  $V_c$ , как видно из характера расположения эллипса (4.15) (рис. 4.15), следует искать на границе области ее возможных положений, т. е. на эллипсе (4.15).

Положив в случае эллипса  $v = A \cos \psi$ ,  $u = B \sin \psi$ , получим из (4.16)

$$V^2 = A^2 \cos^2 \psi + B^2 \sin^2 \psi - 2A \cos \psi \cos i + 1. \quad (4.19)$$

Значение  $\psi = 180^\circ$  отвечает максимуму  $V$ , значение  $\psi = 0$  — минимуму при  $d \cos i \geq 1$ , где  $d = A/(A^2 - B^2) \equiv r_\odot^2/A$ ,  $r_\odot$  — расстояние  $R$  от КА до Солнца.

При  $d \cos i < 1$  минимуму отвечают два значения  $\psi^\pm = \pm \arccos(d \cos i)$ , а значение  $\psi = 0$  отвечает локальному максимуму. Действительно, из (4.19) имеем

$$V^2(0) = A^2 - 2A \cos i + 1, \quad V^2(\psi^\pm) = B^2 - r_\odot^2 \cos^2 i + 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} V^2(0) - V^2(\psi^\pm) &= A^2 - B^2 - 2A \cos i + r_\odot^2 \cos^2 i \equiv \\ &= \frac{A^2}{r_\odot^2} (1 - d \cos i)^2 > 0. \end{aligned}$$

При  $d \cos i = 1$  оптимально одно направление  $\psi^\pm = 0$ . При  $R > 1$  вследствие монотонности возрастания функции  $d(R)$  имеем  $d \cos i < 1$  лишь для значений  $i$ , достаточно близких к  $90^\circ$ , что практически малоинтересно. Таким образом, при  $R > 1$  для практически интересных наклонений оптимальным направлением гелиоцентрической начальной скорости является трансверсальное.

При  $R < 1$  оптимальная точка в плоскости  $\Pi_r$  гиперболы (4.15) не всегда принадлежит этой гиперболе. Это связано с тем, что при росте наклонений  $i$  от нуля проекция  $P$  точки  $V_c$  на плоскости  $\Pi_r$  перемещается к центру гиперболы по действительной оси  $v$ , входит из запретной зоны (заштрихованной на рис. 4.15) в разрешенную область при  $\cos i = A < 1$  и находится внутри нее при  $|i| > i_* = \arccos A$ . Поэтому при  $|i| \geq i_*$  оптимальный вектор  $V = (0, 0, \pm \sin i)$ , а оптимальный вектор  $V_c$  трансверсален. При  $|i| < i_*$  оптимальную точку следует

искать на гиперболе (4.15). Положив вдоль гиперболы  $v = A \operatorname{ch} \psi$ ,  $u = B \operatorname{sh} \psi$ , получим из условия  $\frac{dV}{d\psi} = 0$  единственное решение  $\psi = 0$ . Оно, как непосредственно проверяется, соответствует минимуму.

Значит, при  $R < 1$  оптимальное направление гелиоцентрической начальной скорости, независимо от наклонения, трансверсально.

Оптимизируем теперь выбор наклонения. Поскольку уравнение (4.15) не зависит от наклонения  $i$  плоскости траектории, то при изменении наклонения кривая (4.15) опишет в пространстве поверхность вращения: эллипсоид при  $R > 1$  и гиперболоид вращения — при  $R < 1$ . Очевидно, что минимум расстояния от этой поверхности до конца вектора скорости Земли реализуется при  $i = 0$ ,  $\psi = 0$ . Таким образом, для достижения КА максимального удаления от Солнца ему следует сообщить при запуске от Земли геоцентрическую скорость в направлении движения Земли, а для достижения наибольшего приближения КА к Солнцу геоцентрическую скорость следует сообщать в обратном направлении.

4. Исследование скоростных многообразий оказалось результативным и в задаче оптимизации одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую с заданным вектором скорости  $U_\infty$  «на бесконечности» [1—1972]. В этой задаче на заданной эллиптической орбите спутника ищется такая точка, импульс перехода из которой на гиперболическую орбиту будет минимальным. В этой задаче в отличие от предыдущих построение скоростных многообразий производится во вращающемся евклидовом пространстве радиальной  $U_r$ , трансверсальной  $U_\tau$  и бинормальной  $U_b$  компонент скоростей. Метод скоростных многообразий сводит задачу минимизации переходного импульса к задаче минимизации некоторого расстояния в пространстве компонент скоростей  $U_r$ ,  $U_\tau$ ,  $U_b$ . Решение этой задачи дано в гл. 14.

Для получения точек основного скоростного многообразия в этой задаче была выведена [1—1972] формула зависимости угла между начальными скоростью  $U$  и радиусом  $\rho$  от угловой дальности  $\Phi$  полета (угол между  $\rho$  и  $U_\infty$ ). Дадим здесь вывод этой формулы, поскольку она пригодна во всех задачах, где необходимо связать пара-

метры в фиксированной точке гиперболы с параметрами в бесконечно удаленной точке.

Эта формула получается из (4.1) в предельном случае, когда отношение  $v \equiv \frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow 0$  вследствие неограниченного возрастания радиуса  $\rho_2$  при удалении точки 2 по асимптоте в бесконечность (рис. 4.14). Обозначив  $\rho_1 = \rho$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , предельным переходом получим из (4.1)

$$U^2 = -\frac{\mu_L}{\rho} \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \alpha \sin (\Phi - \alpha)}. \quad (4.20)$$

Отсюда, полагая  $\theta = \operatorname{tg} \Phi/2$ ,  $U_n^2 = 2\mu_L/\rho$ ,  $\beta_1 = U^2/U_n^2$ , получим:

$$(1 - \beta_1 \sin^2 \alpha) \theta^2 - 2\beta_1 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \theta + \beta_1 \sin^2 \alpha = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $\theta$ , находим

$$\theta = \sin \alpha \frac{\beta_1 \cos \alpha \pm \sqrt{\beta_1^2 - \beta_1}}{1 - \beta_1 \sin^2 \alpha} = \sin \alpha \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{1 - 1/\beta_1}}{\cos^2 \alpha - (1 - 1/\beta_1)}.$$

Знак плюс перед радикалом следует отбросить, так как он не имеет физического смысла. Предполагая  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - 1/\beta_1} \neq 0$  и сокращая, получим (используя интеграл энергии  $U^2 = U_n^2 + U_\infty^2$ ):

$$\operatorname{tg} \Phi/2 = \frac{\sin \alpha}{k + \cos \alpha}, \quad k \equiv \sqrt{1 - 1/\beta_1} = U_\infty/U \leq 1. \quad (4.21)$$

Из (4.21) находим

$$\sin(\alpha - \Phi/2) = k \sin \Phi/2.$$

Для получения выражения  $\alpha$  через  $\Phi$  рассмотрим возможные траектории при фиксированной плоскости  $\Pi$  движения. В этой плоскости  $0 < \Phi < 360^\circ$ ; соответственно  $0 < \Phi/2 < 180^\circ$ . Пусть  $q = k \sin \Phi/2$ . При фиксированной величине  $\Phi$  имеем два решения:

$$\text{I. } \alpha = \Phi/2 + \gamma, \quad \text{II. } \alpha = \Phi/2 + (\pi - \gamma),$$

где  $\gamma = \arcsin q < \pi/2$ . Более того, при  $0 < \Phi < \pi$  имеем  $\gamma < \Phi/2$ ; при  $\pi < \Phi < 2\pi$  будет  $\gamma < (2\pi - \Phi)/2$ , так как величина  $k < 1$  (рис. 4.16).





Оба случая  $\Phi = \Phi_1 < \pi$  и  $\Phi = \Phi_2 > \pi$  охватываются одной формулой

$$\alpha = \Phi/2 + \gamma, \quad \gamma = \arcsin(k \sin \Phi/2) < \pi/2. \quad (4.22)$$

Поскольку  $k \leq 1$ , то имеем  $\gamma \leq \Phi/2$ , так что в (4.22) второе слагаемое всегда меньше первого, причем намного меньше для  $\pi < \Phi < 2\pi$ . Особенно мало значение  $\gamma$  для значений  $\Phi$ , близких к 0 и  $2\pi$ .

Построение результирующих скоростных многообразий в каждой из рассмотренных задач составляет основу решения. Впервые анализ многообразий скоростей в характерных точках траекторий космического полета применил, по-видимому, Лоуден [1—1954, 1—1955].

Результаты Лоудена, приведенные примеры, а также результаты гл. 14 говорят о том, что рассмотрение скоростных многообразий позволяет в очень разных задачах получить простые геометрические формулы и конечные аналитические соотношения между параметрами движения и тем самым свести решение задачи к исследованию этих формул и соотношений.

#### § 4.5. Анализ линий постоянства наклонения, энергии, кинетического момента и радиуса перигения траекторий возвращения

Как показали проведенные расчеты [1—1957], метод ТСД пригоден для общего качественного исследования траекторий в ограниченной круговой задаче трех тел  $m_0$ ,  $m_L$ ,  $m_G$  при малых  $m_L/m_G$  и, в частности, траекторий в задаче облета Луны. Поскольку траектория — решение этой задачи — должна иметь на участке  $\Gamma_{3,k}$  возвращения заданное наклонение  $i_k$  к плоскости  $\Pi_L$  лунной орбиты и заданное перигейное расстояние  $r_{pk}$ , то интересно в ограниченной круговой задаче трех тел  $m_0$ ,  $m_L$ ,  $m_G$  рассмотреть с помощью метода ТСД все возможные линии  $i_k = \text{const}$ ,  $r_{pk} = \text{const}$  на  $V_3$ -сфере выходных  $m_G$ -центрических скоростей. Так как вне СД возмущения не учитываются, то  $i_k = i_3$ ,  $r_{pk} = r_{p3}$ . Интересно выяснить, всегда ли можно обеспечить заданные значения  $i_3$  и  $r_{p3}$  на участке  $\Gamma_{3,k}$ .

Построим в скоростной системе координат  $u_3 v_3 w_3$  (оси  $u_3, v_3$  которой соответственно направлены против радиуса и скорости массы  $m_L$  в момент  $t = t_*$  прохождения периселения — рис. 4.17)  $U_3$ - и  $V_3$ -сферы выходных  $m_L$ - и  $m_G$ -центрических скоростей (обе радиуса  $U = U_2 = U_3$ ). Построим векторы  $V_3^{(H)}$  и  $V_3^{(B)}$ , направленные соответственно к центру  $m_G$  и обратно, т. е. вдоль оси  $u$  (здесь, согласно

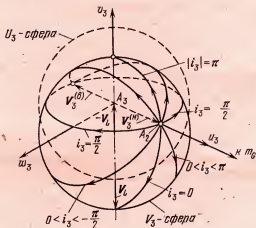


Рис. 4.17. Линии постоянства наклона  $i_3$  на сфере выходных скоростей в пространстве  $A_3 u_3 v_3 w_3$ , компонент выходных скоростей.

предположению 3 метода ТСД, пренебрегается поворотом направления  $\overrightarrow{m_G m_L}$  за время  $T_{2,3} = t_3 - t_2$  полета в СД).

Пренебрегая, как обычно в методе ТСД, размерами СД, заметим, что векторы  $V_3$ -сферы, отвечающие фиксированному наклону  $i_3$ , располагаются в полуплоскости этого наклона, проходящей через ось  $u_3$  (рис. 4.17). Концы их образуют дуги малых кругов на  $V_3$ -сфере, соединяющие две фиксированные точки — точки концов векторов  $V_3^{(B)}$  и  $V_3^{(H)}$ . Для этих точек наклонение является неопределенным, так как им соответствует кинетический момент, равный нулю. Линии постоянной энергии  $h_3$  (благодаря предположению 5  $r_3 = r_L$  в методе ТСД, см. § 4.2) оказываются в силу селеноцентриче-

ского интеграла энергии линиями постоянной величины  $V_3$ , а последние на  $V_3$ -сфере являются малыми кругами в плоскостях

$$v_3 = \text{const} \equiv v_3(h_3), \quad V_3^{(m)} = v_3(h_3^{(m)}) < V_3^{(M)} = v_3(h_3^{(M)}), \quad (5.1)$$

$$V_3^{(m)} = |U - 1|, \quad V_3^{(M)} = U + 1$$

(за единицу взята скорость  $V_L$ ), т. е. являются параллелями вокруг оси  $u$ . Из них на рис. 4.18 представлены

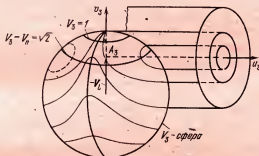


Рис. 4.18. Линии постоянства геоцентрического кинетического момента траектории возвращения на  $V_3$ -сфере в пространстве компонент  $u_3, v_3, w_3$  выходных геоцентрических скоростей.

две характерные линии:  $V_3 = 1$  круговых и  $V_3 = \sqrt{2}$  параболических скоростей (в пространстве  $u_3, v_3, w_3$ ).

Линии постоянного кинетического момента  $C_3 = r_3 V_{3\tau}$  на  $V_3$ -сфере (в силу того же предположения 5) суть линии  $V_{3\tau} = \text{const}$ , т. е. линии пересечения с  $V_3$ -сферой цилиндра

$$v_3^2 + w_3^2 = V_{3\tau}^2, \quad (5.2)$$

имеющего ось  $u_3$  и переменный радиус  $V_{3\tau}$ . Это пересечение симметрично относительно плоскости  $w_3 = 0$  и при  $0 < V_{3\tau} < V_3^{(m)}$  состоит из двух овалов, а при  $V_3^{(m)} < V_{3\tau} < V_3^{(M)}$  является одной замкнутой линией (рис. 4.18).

Построим теперь геометрическое место выходных геоцентрических скоростей  $V_3$ , обеспечивающих достиже-

ние заданного минимального расстояния  $\bar{r}_\pi$  от  $m_o$  после сближения с  $m_L$ . В каждой плоскости с наклоном  $i_3$ , проходящей через выходной радиус  $r_3 = r_L$ , геометрическое место векторов  $V_3$ , для которых минимальные или максимальные расстояния от  $m_o$  равны заданному  $R$ , есть согласно (4.4.7) гипербола при  $R < r_L$  и эллипс при  $R > r_L$ . При изменении  $i_3$  из (4.15) получается в пространстве  $u_3v_3w_3$  уравнение поверхности (4.17) соответственно гиперboloида или эллипсоида вращения вокруг оси  $u$  (в (4.15), (4.17) радиус  $r_L$  принят за единицу расстояния).

Искомое геометрическое место есть пересечение  $S$  этой поверхности с многообразием выходных геоцентрических скоростей  $V_3$  на  $V_3$ -сфере. В рассматриваемых координатах эта сфера имеет уравнение

$$u_3^2 + (v_3 + 1)^2 + w_3^2 = U^2. \quad (5.3)$$

Исключая  $w_3$  из (4.17) и (5.3), получим уравнение проекции  $S_{uv}$  пересечения  $S$  на плоскость  $u_3v_3$ :

$$v_3 = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2 - 1} + v_0, \quad v_0 = \frac{U^2 - 1 - A^2}{2}. \quad (5.4)$$

Это есть парабола с вершиной  $v_3 = v_0$  и осью, направленной по оси  $v_3$  при  $R > 1$  и против оси  $v_3$  при  $R < 1$ . В пространстве  $u_3v_3w_3$  эта парабола является направляющей цилиндра с образующими, параллельными оси  $w_3$ .

При  $R = 0$  имеем  $A = 0$ ,  $B = 0$ , соответствующее  $v_0 = v_\infty = (U^2 - 1)/2$ . В плоскости  $uv$  при  $U > 1$  и малом  $R = \epsilon_0$  имеем  $v_\infty > 0$ , и парабола (5.4) четыре раза пересекает окружность (рис. 4.19)  $(v_3 + 1)^2 + u_3^2 = U^2$ , т. е. в пространстве  $u_3v_3w_3$  параболоид (5.4) пересекает сферу (5.3) по двум овалам (рис. 4.19).

При  $A = V^{(m)}$  имеем  $U - 1 = A$ ,  $U + 1 = A + 2$ , т. е. из (5.4)  $v_0 = A = U - 1$ , и парабола касается той же окружности (на рис. 4.19) изнутри в точке  $(0, V_3^{(m)})$ .

Найдем проекцию  $S_{uv}$  пересечения гиперboloида (4.17)

$$\frac{2(R-1)}{R} \cdot \frac{v_3^2 + w_3^2}{A^2} + u_3^2 = \frac{2(R-1)}{R} \quad (5.5)$$

со сферой (5.3). Исключим  $u_3$ ; вычитая из уравнения

сферы почленно уравнение (5.5) и подставляя  $A^2 = 2R/(R+1)$ , получим после тождественных преобразований

$$\frac{v_3^2}{R^2} + 2v_3 + \frac{w_3^2}{R^2} = U^2 - \frac{3R-2}{R}. \quad (5.6)$$

Это есть уравнение окружности

$$(v_3 + R^2)^2 + w_3^2 = D^2, \quad D^2 = U^2 R^2 + R^4 - R(3R-2) \quad (5.7)$$

с центром  $(-R^2, 0)$  в плоскости  $v_3 w_3$ . При малых  $R/D \approx \sqrt{2R}$  — мало, а смещение  $v_{\text{ц}} = -R^2$  центра окружности

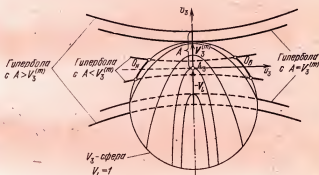


Рис. 4.19. Параболы  $S_{uv}$  — проекция пересечений  $V_3$ -сферы с гиперболами при различных величинах действительной полуоси  $A$  гипербоида.

из начала координат будет малой более высокого порядка.

При  $R = 1 - \epsilon$  ( $\epsilon$  — малая величина) будет  $D = U(1 - \epsilon)$ , а смещение  $v_{\text{ц}} = -(1 - 2\epsilon)$ , т. е.  $S_{uv}$  есть окружность с центром почти в центре сферы (5.3) и с радиусом, чуть меньшим  $U$ .

При  $R = 1 + \epsilon$  будет  $D = U(1 + \epsilon)$ ,  $v_{\text{ц}} = -(1 + 2\epsilon)$ . При  $R \rightarrow \infty$  будет  $v_{\text{ц}} \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow \infty$ , причем монотонно (так как  $dD/dR > 0$  при  $R \geq 1$ ). В пределе при  $R \rightarrow \infty$  окружность  $S_{uv}$  превратится в прямую  $v^2 = (U^2 - 3)/2$ , что, как непосредственно проверяется, соответствует  $V_3 = \sqrt{2}$ .

Рассмотрим эволюцию пересечения  $S$  при изменении  $R$  от 0 до  $\infty$ . При малых  $R \approx \epsilon$  будет  $A \approx \sqrt{2\epsilon}$ , т. е. мало, а  $B \approx \sqrt{2/\epsilon}$ , т. е. велико. Поверхность (4.15) есть сильно

вытянутый вдоль оси  $u_3$  гиперboloид, близкий при  $u < U$  к круговому цилиндру с осью  $u$  и радиусом  $A$ . Поскольку центр  $V_3$ -сферы (5.3) от оси  $u_3$  смещен по оси  $v_3$  на  $-V_L = -1$ , то этот цилиндр пересекается со сферой по двум овалам  $O_n$  и  $O_s$  (рис. 4.19 и 4.20). Последние суть основания конусов  $K_n$  и  $K_s$  скоростей  $V_3$ , для которых

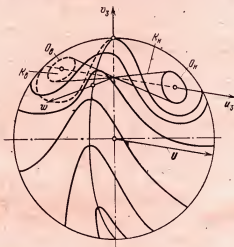


Рис. 4.20. Эволюция пересечения  $V_3$ -сферы с  $r_n^{(k)}$  гиперboloидом с изменением  $0 < r_n^{(k)} < r_L$ .

$r_n < R$ . Овалы  $O_n$  и  $O_s$  тем более вытянуты, чем ближе величина  $A$  к разности  $V_3^{(m)} \equiv U - V_L$ . С ростом  $R$  величина  $A$  монотонно растет, а с ростом  $A$  до  $V_3^{(m)}$  овалы, увеличиваясь, соединятся при  $A = V_3^{(m)}$  на оси  $v_3$  своими точками наибольшей кривизны, образуя восьмерку на  $V_3$ -сфере.

На рис. 4.19 пунктиром показаны три положения пересечения гиперboloида (4.15) с плоскостью  $w_3 = 0$  (при  $A \leq V_3^{(m)}$ ). С дальнейшим ростом  $R$  до 1 растет  $A$

до 1, убывает  $v_0$  в (5.4) до  $(U - 2)/2$ , убывает  $B$  до нуля, так что два раструба гиперboloида складываются в плоскость  $u_3 = 0$ , из которой вырезан круг с гра-

ницей  $u_3^2 + v_3^2 = 1$ . Картина рис. 4.19 в аксонометрии дана на рис. 4.20.

При  $R = 1 + \varepsilon > 1$  будет  $A \approx 1 + \frac{\varepsilon}{4}$ ,  $B \approx \sqrt{2\varepsilon}$ , т. е.  $B$  мало. Поверхность (4.15) есть сильно сжатый к плоскости  $u_3 = 0$  эллипсоид вращения (круглый «блин» на рис. 4.21, а и б). С ростом  $R$  растут монотонно  $A$  и  $B$ , так что  $\lim_{R \rightarrow \infty} A = \lim_{R \rightarrow \infty} B = \sqrt{2}$ , т. е. эллипсоид превращается в шар. Это естественно, так как  $V_L = 1$  и  $V_3 = \sqrt{2} = V_\pi(r_L)$ ,

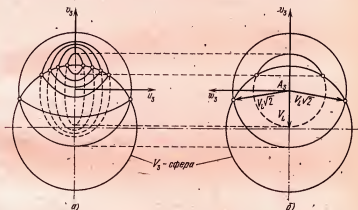


Рис. 4.21. Эволюция пересечения  $V_L$ -сферы с  $\gamma_\alpha^{(k)}$  — эллипсоидом при неограниченном росте радиуса  $r_\alpha^{(k)}$  апогея от  $r_\alpha^{(k)} = r_L$ .

т. е. скорость в каждой точке этого шара позволяет уйти в «бесконечность». Точки с  $V_3 > \sqrt{2}$  лежат ниже (по оси  $v$ ) точек с  $V_3 = V_\pi$  и дают уход в «бесконечность» с гиперболическими скоростями.

При  $U < 1$  эволюция (с изменением  $R$ ) пересечения  $S$  гиперboloида (4.15) и сферы (5.3) прослеживается проще, чем в случае  $U > 1$ . Поскольку сфера (5.3) расположена вся под осью  $u_3$  гиперboloида, то при малых  $R$  пересечения нет. При таком  $R$ , что  $A = V_3^{(m)} = 1 - U$ , имеет место наружное касание (а не внутреннее, как было при  $U > 1$ ) гиперboloида со сферой в точке  $0, -A, 0$ ; при

бóльших значениях  $R$  получается пересечение — одно-  
связная кривая  $S$ , как при  $A > V_3^{(m)}$  в случае  $U > 1$ , и  
дальнейшая эволюция  $S$  с ростом  $R$  аналогична рассмот-  
ренной при  $U > 1$ .

Заметим, что проведенный анализ изолиний  $i_3 = \text{const}$ ,  
 $h_3 = \text{const}$ ,  $C_3 = \text{const}$ ,  $r_{\pi 3} = \text{const}$  применим не только к  
ТС, но и к траекториям возвращения (ТВ) от  $m_L$  к  $m_\sigma$ ,  
если  $m_L$ -центрические скорости выхода из СД могут  
иметь любое направление и равны по величине. Именно  
такая ситуация имеет место для ТВ к Земле с поверх-  
ности Луны или с орбиты ИСЛ (см. раздел III).



## Глава 5

### УСЛОВИЕ СОПРЯЖИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ К СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ И ОТ СФЕРЫ ДЕЙСТВИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТОЧЕК

#### § 5.1. Критерий сопряжимости и динамический смысл условия сопряжимости Тиссерана

Приближенное необходимое и достаточное условие сопряжимости дает следующий

**Критерий I.** В предположениях метода ТСД траектории полета к  $m_L$  и от  $m_L$  с заданными элементами  $h_2, C_2, i_2; h_3, C_3, i_3$  и знаками  $s_2, s_3$  радиальных  $m_a$ -центрических скоростей на сфере действия сопряжимы в одну траекторию сближения с  $m_L$  в заданный момент  $t_*$  сближения тогда и только тогда, когда  $m_L$ -центрические скорости  $U_2$  входа и  $U_3$  выхода на сфере действия равны по величине

$$|U_2| = |U_3|. \quad (1.1)$$

Заметим, что знаки  $s_2$  и  $s_3$  радиальных  $m_a$ -центрических скоростей в точках  $M_2$  входа и  $M_3$  выхода на СД необходимо задать потому, что задание только двух троек кеплеровых элементов  $h, C, i$  не определяет того, на восходящей или на нисходящей (по отношению к  $m_a$ ) ветвях дуг  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  происходит вход в СД и выход из нее.

Доказательство проведем путем выбора положений точки  $M_2$  входа и  $M_3$  выхода на СД. Согласно предположениям метода ТСД, изменение этих положений не меняет векторов  $U_2$  и  $U_3$ , соответствующих траекториям  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  движения к  $m_L$  и от  $m_L$ . Поэтому можно считать, что точки  $M_2$  и  $M_3$  подобраны так, что пара фиксированных и равных по модулю векторов входной  $U_2$  и

выходной  $U_3$  скорости определяют  $m_L$ -центрическое движение в одной плоскости по одной и той же гиперболе в СД. Поскольку такое движение всегда существует и только одно, а при  $U_2 \neq U_3$  такой гиперболы не существует (как следует при  $\rho_2 = \rho_3$  из  $m_L$ -центрического интеграла энергии), то критерий 1 доказан \*).

Поскольку условия облета Луны согласно §§ 1.1, 1.2 задаются в основном в терминах, относящихся к геоцентрическому движению, то целесообразно условие (1.1) выразить через параметры  $m_G$ -центрического движения. Это можно сделать с помощью  $m_G$ -центрических интегралов энергии и площадей. Используя соотношения  $h_1 = -\mu/a$  и  $C = \sqrt{\mu p}$ , введем в эти интегралы на участках  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  соответствующие большие полуоси  $a_2$  и  $a_3$ , параметры  $p_2$  и  $p_3$  и, полагая, как обычно в методе ТСД,

$$r_2 \approx r_L, \quad r_3 \approx r_L, \quad (1.2)$$

получим из (4.2.4)

$$U_{2,3}^2 = V_L^2 + \left( \frac{2\mu_G}{r_L} - \frac{\mu_G}{a_{2,3}} \right) - \frac{2V_L}{r_L} \sqrt{\mu_G p_{2,3}} \cos i_{2,3}. \quad (1.3)$$

При такой записи здесь и далее индекс 2 относится к дуге  $\Gamma_{1,2}$ , а индекс 3 — к дуге  $\Gamma_{3,k}$ . Подставляя  $U_2$  и  $U_3$  в условие (1.1) и полагая в нем  $V_L = 1$ ,  $r_L = 1$ , получим искомое выражение

$$\frac{\mu_G}{a_2} + 2\sqrt{\mu_G p_2} \cos i_2 = \frac{\mu_G}{a_3} + 2\sqrt{\mu_G p_3} \cos i_3. \quad (1.4)$$

Заметим, что это условие похоже на условие Тиссерана [2—1937, стр. 130]

$$\begin{aligned} \frac{\mu_G}{a_1} + 2\sqrt{\mu_G p_1} \cos i_1 &= -2\tilde{h} + \delta_1, \\ \frac{\mu_G}{a_k} + 2\sqrt{\mu_G p_k} \cos i_k &= -2\tilde{h} + \delta_k, \end{aligned} \quad (1.5)$$

необходимое (но не достаточное) для сопряжимости участков  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  движения кометы  $m_0$  к Юпитеру  $m_L$

\*) Формульная реализация этого сопряжения движений дается в § 5.2.

и от него. В (1.5)  $\tilde{h}$  — постоянная (Якоби),  $\delta_1$  и  $\delta_k$  — величины порядка  $\mu \equiv \frac{\mu_L}{\mu_G}$ , причем предполагается, что элементы  $a_1, p_1, i_1, a_k, p_k, i_k$  вычислены в точках  $M_1$  и  $M_k$  по наблюдениям точки  $m_0$  (кометы) соответственно в моменты  $t_1$  и  $t_k$ , настолько удаленные от момента  $t_*$  наибольшего сближения с  $m_L$  (Юпитером), что влияние  $m_L$  на элементы орбиты является несущественным при изменении эпохи оскуляции в окрестности моментов  $t_1$  и  $t_k$ .

Пренебрегая для малых  $\mu$  членами  $\delta_1$  и  $\delta_k$  и возмущениями от массы  $m_L$  вне ее СД, получим  $a_1 = a_2, p_1 = p_2, i_1 = i_2; a_3 = a_k, p_3 = p_k, i_3 = i_k$ , т. е. (1.5) совпадает с (1.4). Используя (1.4), (1.3), (1.2), можно из (1.5) получить (1.1) и обратно. Таким образом, показано, что смысл условия Тиссерана состоит в равенстве  $m_L$ -центрических скоростей на границе СД для малых  $\mu$  и что это необходимое условие становится достаточным в предположениях метода ТСД, если заданы момент  $t_*$  сближения и знаки  $s_2$  и  $s_3$  радиальных  $m_0$ -центрических скоростей на СД массы  $m_L$ .

Попытаемся сформулировать точный критерий сопряжимости движений к  $m_L$  и от  $m_L$  в предположении, что  $m_L \ll m_0$ . Заметим, что условие (1.5) Тиссерана согласно его выводу [2—1937] есть приближенная запись выполнения интеграла Якоби в точках  $M_1$  и  $M_k$ , отстоящих от  $m_L$  на расстояниях порядка  $r_L = 1$ . Следуя Тиссерану, воспользуемся тем, что точный интеграл Якоби должен выполняться на всех частях траектории. В оскулирующих  $m_0$ -центрических элементах  $a_1, p_1, i_1$  он имеет вид [1—1959, стр. 7]

$$\frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{(1-\mu)p \cos i} + \mu \left( \mu - 2r \cos \theta_r + \frac{2}{\rho} \right) = -2\tilde{h}, \quad (1.6)$$

который получается и из (3.3.2) заменой:  $\mu \rightarrow 1-\mu$ ,  $r \rightarrow \rho$ ,  $a \rightarrow a'$ ,  $p \rightarrow p'$ ,  $i \rightarrow i'$ . Здесь  $\theta_r$  — угол между направлениями  $m_0 m_L$  и  $m_0 m_0$  (рис. 1.1). Перейдя от  $a, p$  к  $h, C$ , запишем (1.6) для любых точек  $M_1$  и  $M_k$  траектории. Получим формулы (1.5) с

$$\delta_{1,k} = \mu \left( \mu - 2r_{1,k} \cos \theta_{1,k} + \frac{2}{\rho_{1,k}} \right). \quad (1.7)$$

Исключая из них константу  $\tilde{h}$  Якоби, получим:

$$(h_1 - 2C_1 \cos i_1) = (h_k - 2C_k \cos i_k) + \Delta, \quad (1.8)$$

$$\Delta = \delta_1 - \delta_k = 2\mu \left[ \left( -\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{\rho_1} \right) + (-r_1 \cos \theta_1 + r_k \cos \theta_k) \right].$$

Заметим, что при малых  $\mu$ , конечных  $r_1, r_k$  и любых  $\rho_1 = \rho_k$ , как видно из (1.8), член  $\Delta$  будет порядка  $\mu$ . Однако при уменьшении  $\rho_1$  и  $\rho_k$  до  $\rho_* = \mu^{2/5}$  будет  $\rho_1 = \rho_2, r_1 = r_2, \theta_1 = \theta_2, \rho_k = \rho_3, r_k = r_3, \theta_k = \theta_3, |r_k \cos \theta_k - r_1 \cos \theta_1| \leq 2\rho_*$ , т. е. будет  $\Delta \leq 4\mu^{7/5}$  ( $\mu^{7/5} \approx 1/500$  для системы Земля — Луна). Если пренебречь в (1.8) такой величиной  $\Delta$ , то из (1.8) получится (1.4). Таким образом, приближенное условие (1.4) необходимо для сопряжимости движений к СД и от СД с погрешностью  $\Delta \approx \mu^{7/5}$ , меньшей, чем условие Тиссерана (1.3) (где  $\delta_1, \delta_k$  — величины порядка  $\mu$ ).

Перейдем к формулировке точного критерия сопряжимости двух траекторий  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  полета — к  $m_L$  и от  $m_L$  — в одну ТС ограниченной круговой задачи трех точек  $m_0, m_L, m_g$ , где  $m_L \ll m_g$ . Будем считать, что  $m_g$ -центрическое движение массы  $m_L$  полностью задано и что модули  $r_L$  и  $V_L$  радиуса-вектора и вектора скорости массы  $m_L$  приняты за единицы длины и скорости. При этом согласно определению ТС (§ В.2) будем предполагать, что вне СД массы  $m_L$  каждая из траекторий  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  делает не более одного оборота вокруг массы  $m_g$  и что сопрягаются они в момент наибольшего сближения  $m_0$  с  $m_L$ .

Критерий II. Пусть заданы:

- 1) знаки  $s_2$  и  $s_3$  радиальных  $m_g$ -центрических скоростей частицы  $m_0$  в точках  $2 \in \Gamma'$  и  $3 \in \Gamma''$  на СД;
- 2) момент  $t_a$  наибольшего сближения  $m_0$  с  $m_L$ ;
- 3)  $m_g$ -центрические элементы  $h_1, C_1, i_1$  и  $h_k, C_k, i_k$  частицы  $m_0$ , оскулирующие в заданные моменты  $t_1$  и  $t_k$  прохождения пачала  $I$  дуги  $\Gamma'$  и конца  $K$  дуги  $\Gamma''$ .

Тогда необходимым и достаточным условием сопряжимости дуг  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  в одну траекторию сближения является (1.8), где

$$\rho_j^2 = 1 + r_j^2 - 2r_j \cos \theta_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.9)$$

$\theta_j$  — угол  $m_g$ -центрического радиуса-вектора  $r_j$  частицы с

направлением  $m_G m_L$  в момент  $t_j$ , причем параметры  $r_j$  свободны.

Из условия критерия II имеем

$$t_1 \leq t_2 < t_\mu < t_3 \leq t_\kappa,$$

где  $t_j$  — момент прохождения точки  $j$ ,  $j = 1, 2, 3, \kappa$ .

Для доказательства критерия II удобно ТС  $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$  представлять в виде  $\Gamma = \Gamma_{1,2} \cup \gamma_{2,3} \cup \Gamma_{3,\kappa}$ , где  $\Gamma_{1,2} \subset \Gamma'$ ,  $\Gamma_{3,\kappa} \in \Gamma''$ , а  $\gamma_{2,3}$  есть  $m_L$ -центрическая траектория полета в СД. Доказывается критерий II в §§ 5.2 и 5.3 путем фактического построения той единственной траектории  $\Gamma = \Gamma_{1,2} \cup \gamma_{2,3} \cup \Gamma_{3,\kappa}$ , вдоль которой реализуются заданные значения  $h_1, C_1, i_1$  при  $t = t_1$ ;  $s_2, t_\mu, s_3$ ;  $C_\kappa, i_\kappa$  при  $t = t_\kappa$ . Значение  $h_\kappa = h(t_\kappa)$  при этом определяется из условия сопряжимости (1.8).

## § 5.2. Расчет сопряжения движений методом точечной сферы действия

Точное построение полной траектории  $\Gamma$  производится в три этапа. Первый этап выполняется методом ТСД, второй — методом ИВ и третий — одним из точных методов ЧИ. На первых двух этапах влиянием массы  $m_L$  вне ее СД пренебрегается, поэтому элементы  $h, C, i$  постоянны на дугах  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,\kappa}$ , так что условие (1.8) можно применять в точках  $M_2$  и  $M_3$  входа и выхода на СД (где  $\rho_2 = \rho_3 = \rho_*$ ) вместо точек  $M_1$  и  $M_\kappa$  (где заданы значения  $h, C, i$ ).

Первый этап. Примем предположения метода ТСД. Вычислим  $h_3 = h_\kappa$  из (1.8), полагая, что  $M_1 = M_2, M_3 = M_\kappa$  и что равны геоцентрические радиусы:  $r_2 = r_3$ . Тогда вследствие того, что на СД  $\rho_2 = \rho_3 = \rho_*$ , будет и  $\cos \theta_2 = \cos \theta_3$ , и  $\Delta$  в (1.8) обратится в нуль. Получим из (1.8)

$$h_3 = 2C_3 \cos i_3 + h_2 - 2C_2 \cos i_2, \quad (2.1)$$

учтя, что  $h_1 = h_2, C_1 = C_2, i_1 = i_2$ ;  $C_\kappa = C_3, i_\kappa = i_3$ . Теперь, зная  $h_2$  и  $h_3$ , полагая  $r_2 = r_3 = r_L$ , найдем  $m_G$ -центрические скорости  $V_2$  и  $V_3$ , а затем и  $m_L$ -центрические скорости  $U_2$  и  $U_3$ ; по ним найдем приближенно для  $m_L$ -центрического движения положения  $\rho_2, \rho_3$  точек  $M_2$  и  $M_3$  на СД и времена  $t_2$  и  $t_3$  их прохождения. По  $\rho_2$  и  $\rho_3$  на I этапе можно будет уточнить  $r_2$  и  $r_3$ , а затем и  $h_3$  (из 1.8),

чтобы потом с помощью метода ИВ можно было уточнить всю траекторию Г. Выпишем соответствующие формулы первого этапа.

Модули  $V_2, V_3$   $m_G$ -центрической скорости на СД найдем из  $m_G$ -центрического интеграла энергии по  $r_2, r_3$  и  $h_2, h_3$ :

$$V_{2,3}^2 = \frac{2(1-\mu)}{r_{2,3}} + h_{2,3}. \quad (2.2)$$

Угол  $\alpha_{2,3}$  вектора  $V_{2,3}$  с радиусом-вектором  $r_{2,3}$  найдем из  $m_G$ -центрического интеграла площадей по  $r_{2,3}, C_{2,3}$

$$\sin \alpha_{2,3} = \frac{C_{2,3}}{r_{2,3} V_{2,3}} \quad (2.3)$$

в первой четверти при  $s_{2,3} > 0$  и во второй четверти при  $s_{2,3} < 0$ . На первом этапе считаем  $r_2 = r_3 = 1$  в (2.2) и (2.3), так что соотношения (1.9) приближенно ( $\theta_{2,3} \approx 0$ ) выполняются.

В невращающейся  $m_L$ -центрической системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$  (с осями, направленными соответственно к массе  $m_G(t_\mu)$ , против скорости  $V_L(t_\mu)$  массы  $m_L$  и по ее кинетическому моменту) известен вектор  $V_L(t_\mu) = (0, -V_L, 0)$ . Используя его в предположениях метода ТСД вместо векторов  $V_L(t_2)$  и  $V_L(t_3)$ , найдем аналогично (4.2.3) векторы  $U_2$  и  $U_3$   $m_L$ -центрических скоростей входа и выхода на границе СД

$$U_{2,3} = (-V_{2,3} \cos \alpha_{2,3}; V_L - V_{2,3} \sin \alpha_{2,3} \cos i_{2,3}; -V_{2,3} \sin \alpha_{2,3} \sin i_{2,3}). \quad (2.4)$$

Заметим, что из (2.4) в силу (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} U_{2,3}^2 &= V_{2,3}^2 + V_L^2 - 2V_{2,3}V_L \sin \alpha_{2,3} \cos i_{2,3} = \\ &= 2(1-\mu)/r_{2,3} + h_{2,3} + V_L^2 - 2V_L \cos i_{2,3} C_{2,3}/r_{2,3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вследствие того, что здесь  $r_2 = r_3 = r_L = 1$ , в силу (2.1) имеем  $U_2 = U_3 = U$ .

Считая приближенно в предположениях метода ТСД известными  $m_L$ -центрические скорости на бесконечности  $U^2 = U_2, U_3^\infty = U_3$ , найдем угол  $\alpha$  между этими скоростями, равный в этом приближении углу  $\alpha_\infty$  между

асимптотами  $m_L$ -центрической гиперболы  $\gamma_{2,3}$ :

$$\cos \alpha = \frac{U_2 \cdot U_3}{U^2}, \quad \sin \alpha = \frac{|U_2 \times U_3|}{U^2} > 0. \quad (2.6)$$

В этом же приближении большая полуось гиперболы  $\gamma_{2,3}$

$$a' = \mu_L / U_\infty^2. \quad (2.7)$$

Прицельное расстояние (малая полуось) гиперболы

$$b' = a' / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2.8)$$

Секториальная скорость  $C'$  вдоль гиперболы и параметр  $p'$  гиперболы найдутся из  $m_L$ -центрического интеграла площадей:

$$C' = b' U_\infty, \quad p' = (C')^2 / \mu_L. \quad (2.9)$$

Эксцентриситет  $e'$  и радиус  $\rho_\pi$  перицентра гиперболы найдем по  $a'$  и  $p'$

$$e' = \sqrt{1 + \frac{p'}{a'}}, \quad \rho_\pi = \frac{p'}{1 + e'}. \quad (2.10)$$

Истинные аномалии  $\vartheta_2^\infty, \vartheta_3^\infty$  асимптот гиперболы отличаются лишь знаком и находятся по формуле

$$\cos \vartheta_{2,3}^\infty = -1/e' \quad (\vartheta_{2,3}^\infty \text{ в } \pm \text{II четвертях}). \quad (2.11)$$

Для проверки этого результата может служить чисто геометрическая формула (рис. 4.4)

$$\vartheta_2^\infty + \pi \pm \alpha_\infty = \vartheta_3^\infty. \quad (2.12)$$

Истинные аномалии  $v_2$  и  $v_3$  точек  $M_2$  входа и  $M_3$  выхода (точек гиперболы  $\gamma_{2,3}$  на СД) различаются лишь знаком и найдутся по формуле

$$\cos \vartheta'_{2,3} = \frac{\frac{p'}{\rho_*} - 1}{e'}. \quad (2.13)$$

соответственно  $\vartheta_{2,3}$  в  $\pm \text{I}$  или  $\pm \text{II}$  четвертях. Гиперболические аналоги  $F_2$  и  $F_3$  эксцентрической аномалии в точках  $M_2$  и  $M_3$  тоже различаются лишь знаком и находятся по формуле

$$\operatorname{ch} F_{2,3} = \frac{1 + \rho_*/a'}{e'}. \quad (2.14)$$

Время входа (выхода) находится с помощью уравнения Кеплера:

$$t_{2,3} = t_{\mu} + (a')^{3/2} \frac{e' \operatorname{sh} F_{2,3} - F_{2,3}}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.15)$$

Для определения элементов  $i'$  и  $\Omega'$  гиперболы  $\gamma$  найдем широту  $\delta_{\text{оп}}$  и долготу  $\alpha_{\text{оп}}$  точки входа  $O_{\pi}$  оси пучка гипербола в СД, считая приближенно, что вектор скорости «на бесконечности»  $U_2^{\infty} = U_2$ :

$$\begin{aligned} \sin \delta_{\text{оп}} &= -\frac{U_{2\xi}^{\infty}}{U_2^{\infty}}, \\ \sin \alpha_{\text{оп}} &= -\frac{U_{2\eta}^{\infty}}{U_2^{\infty} \cos \delta_{\text{оп}}}, \quad \cos \alpha_{\text{оп}} = -\frac{U_{2\xi}^{\infty}}{U_2^{\infty} \cos \delta_{\text{оп}}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь компоненты и модуль вектора  $U_2$  находятся по формулам (2.4), (2.5). Найдем направление  $(C')^0 m_L$ -центрического кинетического момента

$$C' = \frac{U_2 \times U_3}{|U_2 \times U_3|}. \quad (2.17)$$

Теперь согласно Приложению 1 найдем  $m_L$ -центрические наклонение  $0 < i' < 180^\circ$  плоскости гипербола  $\gamma_{2,3}$  долготу  $-90^\circ \leq \Omega' \leq 90^\circ$  (того узла  $\Omega'$  в этой плоскости, который ближе к направлению вектора  $-U_2^{\infty}$ ) и аргумент широты  $u_{\text{оп}}$  оси  $O_{\pi}$  в этой плоскости.

Найдем аргументы широты  $u_2$  и  $u_3$  точек  $M_2$  и  $M_3$  (см. рис. 4.4, где  $\Phi'/2 = \vartheta'_3$ ):

$$\begin{aligned} u'_2 &= u_{\text{оп}} - \Delta\vartheta_2, \quad u'_3 = u_{\text{оп}} + 2\vartheta_3^{\infty} - \Delta\vartheta_3, \\ \Delta\vartheta_{2,3} &= \vartheta_{2,3}^{\infty} - \vartheta'_{2,3}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

После этого координаты точек  $M_2$  и  $M_3$  — компоненты векторов  $\rho_2$  и  $\rho_3$  — найдутся по  $u'_2$  и  $u'_3$  соответственно с помощью формул

$$\begin{aligned} \xi_{2,3} &= \rho_* (\cos u'_{2,3} \cos \Omega' - \sin u'_{2,3} \sin \Omega' \cos i'), \\ \eta_{1,3} &= \rho_* (\cos u'_{2,3} \sin \Omega' + \sin u'_{2,3} \cos \Omega' \cos i'), \\ \zeta_{2,3} &= \rho_* \sin u'_{2,3} \sin i' \end{aligned}$$

Приложения 7, в которых взято  $r = \rho_2 = \rho_3 = \rho_*$ .



Для полноты расчета найдем еще аргумент широты  $\omega'$  перицентра гиперболы  $\gamma_{2,3}$ :  $\omega' = u'_2 - \vartheta'_2$  (или  $\omega' = u_{оп} - \vartheta_2^\infty$ ).

Векторы  $\rho_2$  и  $\rho_3$  вместе с  $t_2$  и  $t_3$  являются результатом первого этапа расчета движения методом ТСД.

### § 5.3. Сопряжение движений методом игнорирования возмущений и точное сопряжение

Второй этап — сопряжение методом ИВ. Примем предположения метода ИВ. Тогда на данном этапе можно уточнить результаты первого этапа, потому что, во-первых, можно уточнить величину  $h_3$ , используя найденные координаты точек входа  $M_2$  и выхода  $M_3$  на СД (вместо координат центра этой сферы, использованных для счета  $h_3$  на первом этапе); во-вторых, можно при расчете векторов скоростей  $V_2$  и  $V_3$ ,  $U_2$  и  $U_3$  в точках  $M_2$  и  $M_3$  использовать  $m_\alpha$ -центрические радиусы-векторы  $r_2$  и  $r_3$  (вместо  $r_L$ ) и два разных вектора скорости  $V_L(t_2)$  и  $V_L(t_3)$  массы  $m_L$  (вместо одного  $V_L(t_\mu)$ ).

Теперь вместо (2.1), согласно (1.8), утя, что  $h_1 = h_2$ ,  $C_1 = C_2$ ,  $i_1 = i_2$ ,  $h_k = h_3$ ,  $C_k = C_3$ ,  $i_k = i_3$ , получим:

$$h_3 = 2C_3 \cos i_3 + [h_2 - 2C_2 \cos i_2] - (r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2). \quad (3.1)$$

Появление справа круглых скобок связано с тем, что стало

$$r_{2,3} = r_L + \rho_{2,3}, \quad r_{2,3} \cos \theta_{2,3} = r_{2,3} \cdot r_L. \quad (3.2)$$

При этом выполнены соотношения (1.9). В системе координат  $m_L(t_\mu)\xi\eta\xi$  при  $r_L = 1$ ,  $V_L = 1$  будет  $\omega_L = 1$ ,

$$r_L(t_{2,3}) = (-\cos \omega_L(t_{2,3} - t_\mu), -\sin \omega_L(t_{2,3} - t_\mu), 0), \quad (3.3)$$

так что

$$r_{2,3} \cos \theta_{2,3} = 1 - \xi_{2,3} \cos(t_{2,3} - t_\mu) - \eta_{2,3} \sin(t_{2,3} - t_\mu). \quad (3.4)$$

(в силу того, что  $r_L^2 = 1$ ) и в круглых скобках (3.1) получим

$$\begin{aligned} r_3 \cos \theta_3 - r_2 \cos \theta_2 = \\ = [\xi_2 \cos \omega_L(t_2 - t_\mu) + \eta_2 \sin \omega_L(t_2 - t_\mu)] - \\ - [\xi_3 \cos \omega_L(t_3 - t_\mu) + \eta_3 \sin \omega_L(t_3 - t_\mu)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Величины  $V_{2,3}$ ,  $\alpha_{2,3}$  уточним, используя в (2.2) и (2.3) новые значения  $h_3$  и

$$r_{2,3} = [-\cos \omega_L(t_{2,3} - t_\mu) + \xi_{2,3}; \\ -\sin \omega_L(t_{2,3} - t_\mu) + \eta_{2,3}; \xi_{2,3}]. \quad (3.6)$$

«Проведем» через найденный радиус  $r_{2,3}$  плоскость заданного геоцентрического наклона  $i_{2,3}$  и в ней под известным углом  $\alpha_{2,3}$  к вектору  $r_{2,3}$  «построим» вектор известной длины  $V_{2,3}$ . Для этого сначала найдем долготу  $(\lambda_{-r})_{2,3}$  и широту  $(\varphi_{-r})_{2,3}$  вектора  $(-r)_{2,3}$ :

$$\sin(\varphi_{-r})_{2,3} = \frac{(-\xi)_{2,3}}{r_{2,3}}, \quad \sin(\lambda_r)_{2,3} = -\frac{(-\eta)_{2,3}}{r_{2,3} \cos(\varphi_{-r})_{2,3}}, \\ \cos(\lambda_{-r})_{2,3} = \frac{-(-\xi)_{2,3}}{r_{2,3} \cos(\varphi_{-r})_{2,3}}. \quad (3.7)$$

Затем найдем аргумент широты  $(u_{-r})_{2,3}$  в  $\pm I$  четверти по

$$\sin(u_{-r})_{2,3} = \sin(\varphi_{-r})_{2,3} / \sin i_{2,3}.$$

Тогда аргументами широты векторов  $r_{2,3}$ ,  $V_{2,3}$  будут соответственно

$$u_{2,3} = (u_{-r})_{2,3} + \pi, \quad w_{2,3} = u_{2,3} + \alpha_{2,3}. \quad (3.8)$$

Долготу  $\Omega_{2,3}$  узла в предположении, что

$$-\pi < i_{2,3} < \pi, \quad |(\Delta \Omega)_{2,3}| < \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } (\Delta \Omega)_{2,3} = \\ = \Omega_{2,3} - (\lambda_{-r})_{2,3} \quad (3.9)$$

найдем по формулам:

$$\sin(\Delta \Omega)_{2,3} = -\sin u_{2,3} \frac{\cos i_{2,3}}{\cos(\varphi_{-r})_{2,3}}, \\ \cos(\Delta \Omega)_{2,3} = \frac{\cos(u_{-r})_{2,3}}{\cos(\varphi_{-r})_{2,3}} > 0, \quad (3.10) \\ \Omega_{2,3} = (\lambda_{-r})_{2,3} + (\Delta \Omega)_{2,3}.$$

Используя  $\Omega_{2,3}$  и  $V_{2,3}$ ,  $w_{2,3}$  вместо  $r$ ,  $u$  в Приложении 7, получим компоненты  $(V_i, V_\eta, V_\epsilon)_{2,3}$  вектора  $V_{2,3}$ . Используя вектор

$$(V_L)_{2,3} = V_L(t_{2,3}) = \\ = (\sin(t_{2,3} - t_\mu), -\cos(t_{2,3} - t_\mu), 0), \quad (3.11)$$

получим

$$U_{2,3} = V_{2,3} - (\dot{V}_L)_{2,3}. \quad (3.12)$$

Заметим, что вследствие отличия  $t_2, r_2$  от  $t_3, r_3$  получится, вообще говоря, неравенство модулей:  $|U_2| \neq |U_3|$ . Теперь по двум парам векторов  $\rho_2, U_2$  и  $\rho_3, U_3$  и моментам  $t_2, t_3$  найдем по формулам Приложения 8 элементы  $h'_{2,3}; C'_{2,3}; i'_{2,3}; \omega'_{2,3}; \Omega'_{2,3}; (\tau')_{2,3}$  двух гипербол  $\gamma_2, \gamma_3$  в СД, вообще говоря, различных.

Построим итерационный процесс, приводящий их к совпадению за счет подбора положений на СД точек  $\rho_2$  входа и  $\rho_3$  выхода и соответствующих моментов  $t_2$  и  $t_3$  времени. Для этого воспользуемся условием, что найденные моменты  $t_2$  и  $t_3$  должны оба совпадать с заданным моментом  $t_\mu$ . Тогда получим новые моменты входа  $t_2^{(n)}$  и выхода  $t_3^{(n)}$  по прежним  $t_2$  и  $t_3$  и дополнительным (соответствующим вторым точкам тех же гипербол на СД)

$$\begin{aligned} t_2^{(n)} &\equiv t_2 - 2(t_2 - \tau'), & t_3^{(n)} &\equiv t_3 + 2(\tau' - t_3), \\ t_2^{(n)} &= \frac{1}{2}(t_2 + t_2^{(n)}) + (t_\mu - \tau'), \\ t_3^{(n)} &= \frac{1}{2}(t_3 + t_3^{(n)}) + (t_\mu - \tau'), \\ \tau' &= (\tau'_2 + \tau'_3)/2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Моменты  $t_2^{(n)}$  и  $t_3^{(n)}$  будем в дальнейшем использовать для определения векторов  $r_L(t_{2,3})$  и  $V_L(t_{2,3})$ . Для уточнения  $\rho_2$  и  $\rho_3$  найдем дополнительные точки  $\rho_2^{(n)}$  выхода гиперболы  $\gamma_2$  и  $\rho_3^{(n)}$  входа гиперболы  $\gamma_3$  на СД (по радиусу  $\rho = \rho_*$  и истинным аномалиям  $v_2^{(n)} \equiv -v_2$  и  $v_3^{(n)} \equiv -v_3$  соответственно). За новые точки входа  $\rho_2^{(n)}$  и выхода  $\rho_3^{(n)}$  можно взять середины дуг больших кругов на СД, соединяющих пару точек  $(\rho_2, \rho_2^{(n)})$  и  $(\rho_3, \rho_3^{(n)})$ . Если ни одна из точек пары не близка к оси  $\xi$ , то  $m_L$ -центрические сферические координаты новых точек  $\rho_2$  и  $\rho_3$  могут считаться просто полусуммами сферических координат точек соответствующей пары

$$(\delta_{2,3})_n = \frac{1}{2}(\delta_{2,3} + \delta_{2,3}^{(n)}), \quad (\alpha_{2,3})_n = \frac{1}{2}(\alpha_{2,3} + \alpha_{2,3}^{(n)}). \quad (3.14)$$

Имея новые  $t_2, p_2$  и  $t_3, p_3$ , можем повторить определение  $U_2$  и  $U_3$  по формулам (3.1)–(3.12) второго этапа. Если этот процесс сходится, то одним из его результатов должно быть равенство  $U_2 = U_2^{(n)} = U_3^{(n)} = U_3$  на гиперболах. Сходиться этот процесс должен быстро, потому что элемент  $h_3$  изменяется мало от изменения точки на СД; он мало изменяет  $V_{2,3}$  и  $\alpha_{2,3}$ , а значит, и  $U_{2,3}$ , поскольку изменения величин  $t_2$  и  $t_3$  тоже малы. Малость изменений  $U_{2,3}$  делает малыми изменения положения дополнительных точек входа и выхода на СД, а малость самой СД должна существенно ускорить сходимость итераций.

Когда итерации сойдутся, то вычисление системы  $m_\sigma$ -центрических элементов дуг  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  можно довести до конца, так как по  $h_2, C_2, r_2, s_2$  и  $h_3, C_3, r_3, s_3$  будут найдены  $a_{2,3} = -\mu/h_{2,3}$ ; из формул типа (2.9) и (2.10) —  $p$  и  $e$ , из формул (3.8) — аргументы широты  $u_2$  и  $u_3$ , а из формул типа (2.13) — истинные аномалии  $v_2$  и  $v_3$  векторов  $r_2$  и  $r_3$  и элементы

$$\omega_2 = u_2 - v_2 \quad \text{и} \quad \omega_3 = u_3 - v_3; \quad (3.15)$$

недостающие элементы  $\tau_2$  и  $\tau_3$  найдутся в результате подстановки величин  $v_2$  и  $v_3$  в правые части соответствующих уравнений Кеплера. Однако  $\omega_{2,3}$  и  $\tau_{2,3}$  далее не потребуются.

Третий этап — полный учет возмущений. От итераций второго этапа можно не требовать большей точности в координатах, чем отклонения в них, обусловленные влиянием возмущений от массы  $m_L$  вне ее СД и от массы  $m_\sigma$  — внутри СД. Интегрируя точные  $m_\sigma$ -центрические уравнения движения численно от точек на СД  $M_2$  и  $M_3$  соответственно назад и вперед, можно найти отклонения компонент радиуса  $r$  и скорости  $V$  от соответствующих компонент вдоль конических сечений. Идея третьего этапа состоит в определении соответствующих отклонений в элементах  $h_1, C_1, i_1; h_k, C_k, i_k$  на отдаленных от СД концах  $M_1$  и  $M_k$  и внесении таких поправок в элементы  $h_2, C_2, i_2; h_3, C_3, i_3$  на СД, чтобы реализовать заданные в точках  $M_1$  и  $M_k$  элементы  $\mathcal{E}_1 = (\bar{h}_1, \bar{C}_1, \bar{i}_1); \mathcal{E}_k = (\bar{h}_k, \bar{C}_k, \bar{i}_k)$ .

Численное интегрирование назад с начальными данными  $t_2, r_2, V_2$ , полученными на втором этапе, даст в за-

данный момент  $t_1$  точку  $M_1$  (т. е. вектор  $\mathbf{r}_1$ ) и какие-то компоненты скорости  $V_1$ . Пересчитав их по формулам Приложения 8 в элементы  $\mathcal{E}_1(h_1, C_1, i_1)$ , найдем отклонения  $\Delta\mathcal{E}_1$

$$\Delta h_1 = h_1 - \bar{h}_1, \quad \Delta C_1 = C_1 - \bar{C}_1, \quad \Delta i_1 = i_1 - \bar{i}_1. \quad (3.16)$$

Аналогичное интегрирование вперед с начальными данными  $t_3, \mathbf{r}_3, V_3$  даст в момент  $t_k$  точку  $M_k$ , т. е. вектор  $\mathbf{r}_k$ , и компоненты вектора  $V_k$ . Аналогичный их пересчет даст элементы  $\mathcal{E}_k$  и отклонения  $\Delta\mathcal{E}_k$ :

$$\Delta C_k = C_k - \bar{C}_k, \quad \Delta i_k = i_k - \bar{i}_k \quad (3.17)$$

(заметим, что на втором этапе брались  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_k$ ). По найденным  $(t_1, \mathbf{r}_1), (t_k, \mathbf{r}_k)$  получим векторы  $\rho_1, \rho_k$ , используя формулу

$$\rho_{1,k} = \mathbf{r}_{1,k} - \mathbf{r}_L(t_{1,k}), \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{r}_L(t_{1,k})$  находится из (3.3) аналогично  $\mathbf{r}_L(t_{2,3})$ . При этом будут выполнены соотношения (1.9).

Подставим в (1.8) заданные элементы и значения  $\rho_1, \rho_k$

$$r_1 \cos \theta_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_L(t_1), \quad r_k \cos \theta_k = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_L(t_k). \quad (3.19)$$

Тогда из (1.8) найдем новое значение  $h_k$  (его назовем  $\bar{h}_k$ ) и найдем отклонение

$$\Delta h_k = h_k - \bar{h}_k. \quad (3.17')$$

Предполагая, что возмущения движения вне СД малы настолько, что можно считать

$$\frac{\partial \mathcal{E}_2^{(j)}}{\partial \mathcal{E}_1^{(j)}} \approx 1, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_3^{(j)}}{\partial \mathcal{E}_k^{(j)}} \approx 1, \quad \mathcal{E}^{(j)} = h, C, i, \quad (3.20)$$

заменим  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$  соответственно на новые:

$$\mathcal{E}_2^H = \mathcal{E}_2 - \Delta\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_3^H = \mathcal{E}_3 - \Delta\mathcal{E}_k, \quad \mathcal{E} = (h, C, i). \quad (3.21)$$

По новым значениям  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  и прежним  $\rho_2, \rho_3$  с помощью тех же формул (3.1)–(3.12) получим векторы  $V_2, U_2, V_3, U_3$ .

Интегрируя численно внутри СД, т. е. от  $t_2, \rho_2, U_2$  вперед и от  $t_3, \rho_3, U_3$  назад, получим внутри СД, как и

на втором этапе, траектории  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Получаем соответственно «дополнительные» точки  $\rho_3^{(д)}$  и  $\rho_2^{(д)}$  траекторий на СД и соответствующие моменты времени  $t_3^{(д)}$  и  $t_2^{(д)}$ .

Выделим еще моменты  $\tau_2$  и  $\tau_3$  обращения в нуль радиальной  $m_L$ -центрической скорости на траекториях  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Используя, как и на втором этапе, формулы (3.13), (3.14), уточним положения  $\rho_2$  и  $\rho_3$  точек  $M_2$  и  $M_3$  на СД и моменты  $t_2$  и  $t_3$  входа и выхода. От новых  $t_2$ ,  $\tau_2$ ,  $V_2$  и  $t_3$ ,  $\tau_3$ ,  $V_3$  можем вновь интегрировать численно назад и вперед соответственно.

Таким образом, последовательно интегрированием вне СД уточняем элементы  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$ ,  $\mathcal{E} = (h, C, i)$ , а интегрированием внутри СД уточняем  $t_2$ ,  $\rho_2$  и  $t_3$ ,  $\rho_3$ . Эти итерации должны столь же быстро сходиться, как и на втором этапе. Численной проверкой сходимости итераций второго и третьего этапов сопряжения движений заканчивается доказательство точного критерия сопряженности (1.8). (Об этой проверке см. примечание на стр. 153).

Заметим, что приведенная формулировка критерия I и его доказательство используют малость  $\mu$ , так как опираются на понятия СД и ТС. По-видимому, эти формулировку и доказательство можно обобщить на произвольные  $\mu < 1/2$  и ограниченные числа витков до и после сближения, если потребовать, чтобы концы  $M_1$  и  $M_k$  кривых  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,k}$  задавались настолько далеко от массы  $m_L$ , чтобы влияние массы  $m_L$  на изменение  $m_G$ -центрических элементов  $h, C, i$  при изменении точек  $M_1, M_k$  было несущественным. Именно таковы траектории облета Луны.

#### § 5.4. Примеры приближенного и точного анализа некоторых характеристик траекторий перелета между Землей и Луной

1. *Приближенное постоянство трансверсальной компоненты геоцентрической скорости на СД при фиксированном радиусе перигея.* Рассмотрим вектор  $V_2$  (или  $V_3$ )  $m_G$ -центрической скорости на СД в предположениях метода ТСД. Если элементы  $h, C, i$  кеплеровой дуги перелета  $m_G - m_L$  (или  $m_L - m_G$ ) фиксированы, а элементы  $\Omega, \omega, i$  подбираются из условия сближения точки  $m_0$  с массой  $m_L$ , то вектор  $V_2$  (или  $V_3$ ) фиксирован и согласно § 4.2 может считаться не зависящим от точки 2 (или 3).

на СД. Если же элементы  $h$ ,  $C$  не фиксировать, а фиксировать лишь зависящий от них радиус  $r_\pi \ll r_L$  перигея:  $r_\pi = p/(1+e)$ ,  $p = C^2/\mu_G$ ,  $e = \sqrt{1-p/a}$ ,  $a = -\mu_G/h$ , то появляется один свободный параметр  $\mathcal{E}$ . можно принять  $\mathcal{E} = h$ , либо  $\mathcal{E} = V_\pi$ , где  $V_\pi$  —  $m_G$ -центрическая скорость в перигее, либо  $\mathcal{E} = V_r$ , где  $V_r$  — радиальная компонента вектора  $V_2$ .

При фиксированном значении  $r_\pi$  фиксированы минимальные полуось  $a_m = (r_\pi + r_L)/2$  и энергия  $h_m = -\mu_G/a_m < 0$ . Примем, что

$$h_m < h < h_M, \quad (4.1)$$

где  $h_M > 0$  есть величина порядка  $-h_m$ , так что в равной мере рассматриваются эллиптические и гиперболические траектории. Покажем, что при этих условиях на расстоянии  $r_L$  от Земли трансверсальная компонента  $V_\tau$  геоцентрической скорости  $V_2$  приближенно может считаться постоянной:  $V_\tau = V_\tau^*$ .

Действительно, обратив движение КА, вспомним (§ 4.4), что конец любого вектора скорости  $V_2$ , позволяющего приблизиться к Земле на заданное расстояние  $r_\pi$  из фиксированной точки  $r_L$ , при  $r_L > r_\pi$  принадлежит однополостному гиперboloиду, образуемому путем вращения вокруг направления  $r_L$  гиперболы (4.4.15) с полуосями

$$A = \sqrt{\frac{2r_\pi}{r_\pi + r_L}} \sqrt{\frac{\mu_G}{r_L}} \quad \text{и} \quad B = \sqrt{\frac{2(r_L - r_\pi)}{r_\pi}} \sqrt{\frac{\mu_G}{r_L}}$$

(рис. 4.15). В рассматриваемом случае вследствие того, что  $r_L \gg r_\pi$ , гиперboloид сильно вытянут вдоль оси вращения, так что при энергиях  $h$ , не намного превышающих минимальную  $h_m$ , он хорошо аппроксимируется цилиндром радиуса  $A$  с той же осью  $r_L$ . Чтобы оценить отклонение цилиндра от гиперboloида, вычислим величину  $V_\tau$  на гиперboloиде:

$$V_\tau = A \sqrt{1 + \frac{V_r^2}{B^2}} \approx A \left( 1 + \frac{V_r^2}{2B^2} \right), \quad (4.2)$$

$$\Delta = \frac{V_\tau - A}{A} = \frac{V_r^2}{2B^2}.$$

Для полета по гиперболе с  $V_r^2 = 2\mu_G/r_L$  имеем  $\Delta = r_\pi/2(r_L - r_\pi)$ , т. е.  $\Delta < 1\%$  для  $r_\pi/r_L = 1/60$ .

Зависимость  $V_\tau$  от  $h$  получим с помощью интегралов энергии и площадей

$$V_\pi = \sqrt{V_\pi^2(r_\pi) + h}, \quad V_\tau = \frac{V_\pi r_\pi}{r_L}, \quad (4.3)$$

используя разложение в ряд:

$$\begin{aligned} V_\tau &= V_\pi \frac{r_\pi}{r_L} \sqrt{1 + \frac{h}{V_\pi^2}} = \\ &= V_\tau^* \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{h}{V_\pi^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{V_\pi^2} \right)^2 + \dots \right] \approx V_\tau^*, \end{aligned} \quad (4.4)$$

т. е.  $V_\tau$  можно считать не зависящим от  $h$  для  $h \ll 2V_\pi^2(r_\pi)$ . Здесь

$$\begin{aligned} V_\pi(r_\pi) &= \sqrt{\frac{2\mu_G}{r_\pi}}, \\ V_\tau^* &= \frac{r_\pi}{r_L} V_\pi(r_\pi) = A \sqrt{1 + \frac{r_\pi}{r_L}} \sqrt{\frac{r_\pi}{r_L}} = \sqrt{\frac{r_\pi}{r_L}} \sqrt{\frac{2\mu_G}{r_L}}. \end{aligned} \quad (4.4')$$

Из (4.4') для системы Земля — Луна ( $r_\pi/r_L \approx 1/60$  и  $\sqrt{\mu_G/r_L} \approx 1$  км/с)  $V_\tau^* \approx A = 190$  м/с (с погрешностью порядка 1,5 м/с).

Найдем диапазон изменения компоненты  $V_r$  вектора  $V_2(V_3)$  для диапазона (4.1). Из (4.2)  $\min_h V_{2,3} = A$ . Из интеграла энергии

$$V_{2,3}^2(h) = \frac{2\mu_G}{r_L} + h \quad (4.5)$$

получим  $V_M = \max V_{2,3}(h) = V_{2,3}(h_M)$ . При  $h_M = -h_m$  получим

$$V_M^2 = \frac{2r_L + r_\pi}{r_L + r_\pi} \cdot \frac{2\mu_G}{r_L}, \quad V_M \approx 2 \sqrt{\frac{\mu_G}{r_L}}. \quad (4.6)$$

Для малых  $r_\pi/r_L$  в системе Земля — Луна  $V_M \approx 2$  км/с. В диапазоне (4.1)  $\max_h V_r = \sqrt{V_M^2 - V_\tau^2}$ . Для малых



$r_\pi/r_L$ , подставив  $V_\tau \approx A$ , получим

$$\max_h V_\tau \approx 2 \sqrt{\frac{\mu_G}{r_L}} \approx V_M. \quad (4.7)$$

2. *Координаты оси пучка траекторий на СД.* Рассмотрим теперь вектор  $U_2$   $m_L$ -центрической скорости входа в СД в предположениях метода ТСЛ. Обратное ему направление  $(-U_2^0)$  есть направление на точку входа в СД оси пучка  $m_L$ -центрических траекторий с фиксированными элементами  $h, C, i$ . Это направление будем определять широтой  $\delta_{оп}$ , т. е. углом возвышения вектора  $(-U_2^0)$  над плоскостью  $\Pi_L$  движения масс  $m_G m_L$  и долготой  $\alpha_{оп}$  проекции вектора  $(-U_2^0)$  на плоскость  $\Pi_L$ , отсчитываемой от направления  $m_L m_G$  в момент  $t_2$  входа в СД в сторону вращения луча  $m_L m_G$ .

Приближенный расчет координат  $(\alpha_{оп}, \delta_{оп})$  выполняется по формулам (2.16), в которых компоненты и модуль вектора  $U_2$  находятся по формулам (2.4), (2.5). В последних формулах величина  $V_2$  геоцентрической скорости  $V_2$  входа и ее угол  $\alpha_2$  с радиусом  $r_2 = r_L$  находятся из геоцентрических интегралов энергии (2.2) и площадей (2.3).

Рассмотрим методом ТСД изменение углов  $\alpha_{оп}, \delta_{оп}$  при изменении элементов  $h_m < h < h_M$ ,  $-\pi < i < \pi$  и фиксированном радиусе перигея  $r_\pi \ll r_L$ . Из (2.4), (2.5), (2.16) и  $V_2 \sin \alpha_2 = V_\tau$  получим

$$\sin \delta_{оп} = \frac{V_\tau \cdot \sin i}{U_\infty}, \quad (4.8)$$

$$U_\infty^2 = V_L^2 + V_2^2 - 2V_L V_\tau \cos i, \quad (4.9)$$

где согласно (4.5),  $V_2 = V_2(h)$  и согласно предыдущему п. 1 можно считать  $V_\tau$  не зависящим от  $h, i$ .

Найдем экстремумы функции  $|\delta_{оп}(i)|_{h=\text{const}}$  или, что то же, функции  $f(i) = V_L \sin^2 \delta_{оп}(i)/V_\tau$ . Из (4.8), (4.9)

$$f(i) = \frac{1 - \cos^2 i}{2V_\delta - 2\cos i}, \quad (4.10)$$

$$V_\delta(h) = \frac{V_L^2 + V_2^2(h)}{2V_\tau V_L(h)}. \quad (4.11)$$

Из условия  $f'(i) = 0$  получим уравнение

$$\sin i \cos i (2V_\delta - 2 \cos i) = (1 - \cos^2 i) \sin i.$$

Его решение  $\sin i = 0$ , т. е.  $|i| = 0, \pi$ , отвечает минимумам  $|\delta_{оп}|$ . При  $\sin i \neq 0$  получим уравнение

$$\cos^2 i - 2V_\delta \cos i + 1 = 0.$$

Из двух его решений имеет смысл лишь одно

$$\cos i_m(h) = V_\delta - \sqrt{V_\delta^2 - 1} = [V_\delta + \sqrt{V_\delta^2 - 1}]^{-1}. \quad (4.12)$$

Оно отвечает максимумам  $i$  при фиксированном значении  $h$ .

Выберем  $h$  так, чтобы стало  $V_2 = V_L$ . Из (4.11) тогда  $V_\delta = V_L/V_\tau$ . Для малых  $\mu_L/\mu_G$  и  $r_\pi/r_L$  из третьего закона Кеплера  $V_L \approx \sqrt{\mu_G/r_L}$ , а из (4.4), (4.4')  $V_\tau = \sqrt{2r_\pi/r_L} \sqrt{\mu_G/r_L}$ , так что  $V_\delta \approx \sqrt{r_L/2r_\pi}$  — довольно большая величина:  $V_\delta = 5$  для  $r_L/r_\pi = 50$ . Имеем  $\cos i_m \approx 0,1$ ,  $i_m \approx 84^\circ$ ,

$$\sin^2 \delta_M = (1 - 0,01)/(10 - 0,2)1/5 \approx 0,02;$$

$$\sin \delta_M \approx 0,14; \delta_M \approx 8^\circ,5.$$

Что касается  $\alpha_{оп}$ , то из (2.4) и (2.16)  $\sin \alpha_{оп} < 0$ , а  $\text{sign} \cos \alpha_{оп} = \text{sign} \cos \alpha_2$ , т. е.  $\cos \alpha_{оп} > 0$  и  $\alpha_{оп} > 270^\circ$  при сближении на восходящей ветви траектории  $\Gamma_{1,2}$  и  $\cos \alpha_{оп} < 0$  и  $\alpha_{оп} < 270^\circ$  при сближении на нисходящей ветви траектории  $\Gamma_{1,2}$ . Разделив в (2.16)  $\sin \delta_{оп}$  на  $\cos \delta_{оп}$ , получим

$$\text{tg } \delta_{оп} = V_\tau \frac{\sin i}{U_\infty \cdot \cos \delta_{оп}}. \quad (4.13)$$

Заменяя  $U_\infty \cos \delta_{оп}$  через  $\sin \alpha_{оп}$  из (2.16) с учетом (2.4), получим

$$\text{tg } \delta_{оп} = \frac{\sin \alpha_{оп} \sin i}{\cos i - V_\alpha}, \quad V_\alpha \equiv \frac{V_L}{V_\tau}. \quad (4.14)$$

Для  $h_m < h < h_M$  при постоянном  $r_\pi \ll r_L$  можно считать  $V_\tau = \text{const}$  и  $V_\alpha = \text{const}$  ( $V_\alpha = \sqrt{r_L/2r_\pi}$  для малых  $\mu_L/\mu_G$ ), так что (4.14) есть чисто геометрическая зависимость.

Найдем экстремумы функций  $\text{tg } \delta_{оп}(i)|_{\alpha_{оп}=\text{const}}$  из условия  $\delta'_{оп}(i) = 0$ , получим  $\cos i (\cos i - V_\alpha) + \sin^2 i = 0$  и

решение

$$\cos i_{\alpha} = \frac{1}{V_{\alpha}} = \sqrt{\frac{2r_{\pi}}{r_L}}. \quad (4.15)$$

Из (4.14)

$$\operatorname{tg} \delta_M(\alpha_{\text{оп}}) = \frac{-\sin \alpha_{\text{оп}}}{V_{\alpha} \sqrt{1 - V_{\alpha}^{-2}}} \approx -\frac{\sin \alpha_{\text{оп}}}{\sqrt{V_{\alpha}^2 - 1}}. \quad (4.16)$$

Для  $r_L/r_{\pi} = 50$  имеем  $V_{\alpha} = 5$ ,  $\cos i_{\alpha} = 0,2$ ,  $i_{\alpha} = 78^{\circ},5$ ,  $|\operatorname{tg} \delta_M(\alpha_{\text{оп}})| \approx |\sin \alpha_{\text{оп}}|/5$ , и

$$\delta_M(\alpha_{\text{оп}}) \approx 11^{\circ},3 \sin \alpha_{\text{оп}}. \quad (4.17)$$

3. *Результаты точного расчета осевых траекторий.* Вследствие приближенности метода ТСД формулы (2.4), (2.5), (2.16) определяют углы  $\alpha_{\text{оп}}$ ,  $\delta_{\text{оп}}$  с погрешностью в несколько градусов, что уменьшает количественное (но не качественное) значение последующих результатов (4.8)—(4.17). Поэтому интересно получить зависимости координат  $\alpha_{\text{оп}}$ ,  $\delta_{\text{оп}}$  от  $i$  путем точных расчетов. Такие расчеты были проведены для перелетов Земля—Луна и Луна—Земля при четырех положениях Луны с аргументами широты  $u_L = 0, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}$  (сентябрь 1971 г.). При этом времена  $T$  полета между перигеем и центром Луны и оскулирующие в перигее элементы  $r_{\pi}$ ,  $i$  подбирались такими же, как и при расчете методом ТСД. Здесь аргумент  $T$  использовался вместо аргумента  $h$ , поскольку функция  $h(T)$  при фиксированном  $r_{\pi}$  однозначна (рис. 4.5), а обратная функция—нет. (Здесь индексы «1» или «к» у элементов, оскулирующих в перигее, будем опускать, имея в виду перелеты и Земля—Луна и Луна—Земля.)

Оказалось, что функции  $\delta_{\text{оп}}(i)|_{\alpha_{\text{оп}}=\text{const}}$  выражаются с точностью до десятых долей градуса одними и теми же кривыми (рис. 5.1) для любого положения Луны и любого времени  $T$ .

Время  $T = T_{1,2} + T_c$ , где  $T_{1,2}$  и  $T_c$ —времена полета вне и внутри СД. Оказалось, что функции  $\alpha_{\text{оп}}(T_{1,2})|_{i=\text{const}}$  хотя и являются монотонными при всех положениях Луны, все же могут отличаться на несколько градусов для различных положений Луны. На рис. 5.2 даны точ-

ные функции  $\alpha_{40} = \alpha_{оп}(T_{1,2})|_{i=40^\circ}$  для четырех положений Луны (близких к концам двух перпендикулярных диаметров ее орбиты); для этих положений указаны с методической целью соответствующие им произведения  $V_L \sin \theta_L$  (где  $\theta_L$  — оскулирующая истинная аномалия

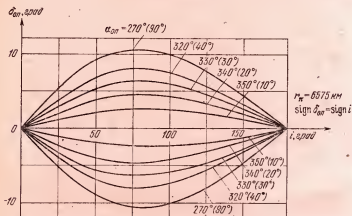


Рис. 5.1. Зависимость сферических координат  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}$  оси пучка на сфере действия от наклона  $i$ . В скобках указана долгота  $\alpha_{оп}$  для траекторий возвращения от Луны к Земле.

Луны), определяющие положение Луны. Для других наклонов функции  $\alpha_{оп}(T_{1,2})|_{i=\text{const}}$  оказались настолько близкими к представленным, что с точностью до десятых долей градуса их можно вычислить по формуле

$$\alpha_{оп} = \alpha_{40} + \left( \frac{\partial \alpha_{оп}}{\partial |i|} \right)_{|i|=40^\circ} (|i| - 40^\circ). \quad (4.18)$$

При этом точные зависимости  $\partial \alpha_{оп} / \partial |i| |_{|i|=40^\circ}$  от  $T_{1,2}$  несколько различаются для разных положений Луны (рис. 5.2).

Рассчитывались отдельно (с методической целью) точные времена  $T_c(T)|_{i=\text{const}}$  полета между точкой 2 на СД и центром Луны (рис. 5.3). Имея кривые  $T_c(T)|_{i=\text{const}}$ , можно применить следующую методику вычисления углов  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}(T, i)$  с точностью до десятых долей граду-

са. Найдя  $T_c(T)$  (рис. 5.3), вычислим  $T_{1,2} = T - T_c$ . Найдя по заданному положению Луны на ее орбите произведение  $V_L \sin \theta_L$ , определим по нему и  $T_{1,2}$  значения  $\alpha_{40}$  и  $\partial\alpha/\partial i|_{i=40^\circ}$ , по ним находим  $\alpha_{оп}$  из (4.18), а по нему и углу  $i$  — угол  $\delta_{оп}$  из рис. 5.1. Из рис. 5.1, 5.2 следует, что точки входа в СД начинающихся у Земли

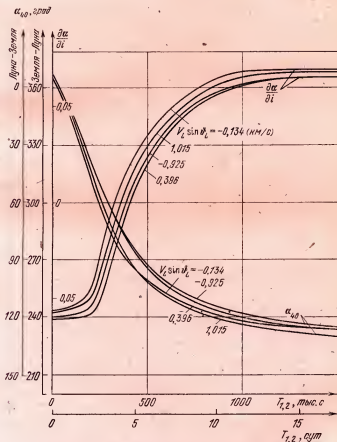


Рис. 5.2. Изменение селеноцентрической долготы оси пучка  $\alpha_{40}$  для траекторий с наклонением  $i=40^\circ$  и производной  $\partial\alpha/\partial i$  в зависимости от времени  $T_{1,2}$  полета до сферы действия и от параметра  $V_L \sin \theta_L$  положения Луны на орбите.

осевых траекторий пучков — траекторий прямого попадания в Луну — располагаются в узкой полосе селеноцентрических широт  $|\delta_{\text{сц}}| < 11^\circ,5$ , длина которой растет вместе с диапазоном располагаемых времен полета, а ширина убывает вместе с  $|i - i_\alpha|$ .

Кривые на рис. 5.1—5.3 оказались пригодными с той же точностью не только для перелета Земля — Луна,

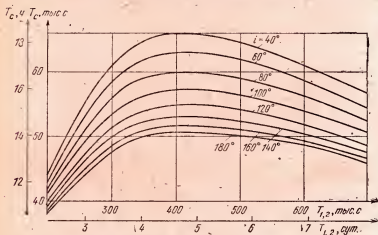


Рис. 5.3. Зависимость времени  $T_c$  движения между границей сферы действия и периселением на поверхности Луны от времени  $T_{1,2}$  перелета Земля — Луна и от геоцентрического наклонения  $i$  траектории полета к Луне.

но и для перелета Луна — Земля (для последнего перелета даны значения  $\alpha_{\text{оп}}$  в скобках на рис. 5.1 и дополнительная шкала углов  $\alpha_{40}$  на рис. 5.2). Это объясняется сохранением краевых условий и времени перелета, симметрией и обратимостью движения в ограниченной круговой задаче трех точек [5 — 1960], симметрией влияния сжатия Земли и малостью влияния остальных второстепенных факторов (это влияние оценивается далее в гл. 10). Учитывая симметрию движений, имеем схему (рис. 5.4) разделения СД на секторы направлений, по которым возможен вход в СД или выход из нее селеноцентрических траекторий, проходящих через центр Луны и переходящих в точках на СД в геоцентрические траек-



ных сферических треугольников с общей стороной  $u_{\text{он}}$  (рис. П.1, а) и вершинами  $O_{\text{н}}x\Omega'$  и  $O_{\text{н}}x^*\Omega'$ .

Пусть задана на СД углами  $\alpha$ ,  $\delta$  точка 2 входа в СД какой-либо траектории пучка. Тогда однозначно определяются плоскость  $\Pi'$   $m_L$ -центрического движения, направление обхода центра  $m_L$  в плоскости  $\Pi'$  и все элементы  $m_L$ -центрического движения. Соответствующий

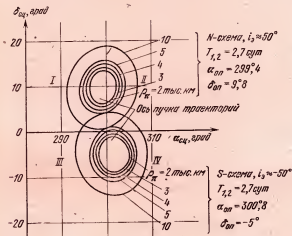


Рис. 5.5. Линии постоянного минимального расстояния траекторий сближения от Луны на плоскости селеноцентрических сферических координат  $\alpha_{\text{сц}}$ ,  $\delta_{\text{сц}}$ .

расчет выполняется по формулам § 5.2. При этом вместо использования формулы (2.17) вычисляется  $\vec{\rho}_2 = \vec{m}_L 2$  и находится  $(C')^0 = \rho_{\text{он}} \times \rho_2 / |\rho_{\text{он}} \times \rho_2|$ , где  $\rho_{\text{он}} \equiv m_L O_{\text{п}}$ , а вместо формулы (2.8) используется той же степени приближенности равенство полуоси  $b'$  расстоянию точки 2 от оси пучка.

Результатами точного расчета (рис. 5.5) подтверждаются результаты метода ТСД. В соответствии с рис. 4.8 существенные повороты (на  $20^\circ$  и более) вектора скорости вдоль гипербол происходят лишь при тесном сближении КА с  $m_L$ , например, при сближении на расстояние  $\rho_k < 10^4$  км для времен перелета  $T_{1,2} = 2,5$  сут (соответ-



ствующее значение входной скорости  $U \approx 1,7$  км/с). При этом точки входа на СД, отвечающие одному значению  $\rho_\pi$ , образуют замкнутые кривые. Они отстоят от оси  $O_\pi$  пучка на  $\sim 5^\circ$  при  $\rho_\pi = 5000$  км и на  $\sim 3^\circ$  при  $\rho_\pi = 2000$  км. С ростом времени перелета, т. е. с убыванием энергии  $h$  (и скорости  $U$ ), размеры зоны тесного сближения увеличиваются. При изменении лишь знака наклона  $i$  получаются кривые, симметричные относительно оси абсцисс кривым на рис. 5.5.

Примечание к стр. 142. Численная проверка сходимости итераций второго и третьего этапов сопряжения движений (§ 5.3) была реализована на примере траектории облета Луны с возвращением к Земле. Расчеты сопряжения показали, что начальные условия, полученные на первом этапе, позволяют завершить второй этап за 5 итераций с погрешностями по наклонению  $1^\circ$ , по кинетическому моменту  $10^{-2}$  км<sup>2</sup>/с и по полной энергии  $10^{-2}$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Использование начальных условий, полученных на втором этапе, позволило завершить третий этап сопряжения за 8 итераций с заданными точностями: по наклонению  $0,1^\circ$ , по кинетическому моменту  $10^{-3}$  км<sup>2</sup>/с и по полной энергии  $10^{-3}$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

## Глава 6

### ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ЛУННЫХ ПЕРЕЛЕТОВ

Первое исследование траекторий в гравитационном поле Земли и Луны было проведено в систематическом плане для так называемых «плоских задач». Траектории таких задач целиком находятся в плоскости орбиты Луны.

Плоская задача, конечно, принципиально проще пространственной, но ее исследование имеет смысл, во-первых, потому, что полет в плоскости лунной орбиты физически реализуем; во-вторых, потому, что некоторые качественные особенности плоских траекторий в системе Земля—Луна имеют свои аналоги и в случае пространственных траекторий.

#### § 6.1. Попадание в Луну

В задаче о попадании в Луну не требуется знать поведения решений после сближения с Луной, и классификация их очень проста. Пусть заданы начальные геоцентрические радиус  $r_1$ , скорость  $V_1$  и угол  $\alpha_1$  скорости с радиусом, а угол  $\lambda$  радиуса с осью  $x$  (рис. 3.4) подбирается из условия попадания в Луну.

Очевидно, при эллиптических начальных скоростях сближение КА с Луной возможно как на восходящей («в»), так и на нисходящей («н») ветви его траектории. Соответственно имеем два класса попадания  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$ . Крайние траектории каждого из классов, т. е. траектории с углами  $\alpha_1 = +\pi/2$  и  $\alpha_1 = -\pi/2$ , т. е. с наклонениями  $i = 0$  и  $|i| = \pi$ , схематически представлены на рис. 6.1. По знаку направления обхода Земли, т. е. по знаку  $\alpha_1$ , каждый класс можно разделить на два подкласса:  $\Pi^+$  — на  $\Pi^{++}$  и  $\Pi^{+-}$ ;  $\Pi^-$  — на  $\Pi^{-+}$  и  $\Pi^{--}$ . При этом траектория, разделяющая классы, является чисто радиальной по отношению к

Земле. При монотонном изменении угла  $\alpha_1$  в интервале  $-\pi/2 < \alpha_1 < +\pi/2$  траектория монотонно изменяется внутри одного и того же класса между крайними его траекториями.

Проследим эволюцию решений с уменьшением начальной скорости. При гиперболических начальных скоростях,

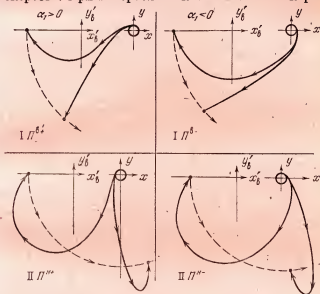


Рис. 6.1. Классы  $\Pi^B$  и  $\Pi^H$  попадающих траекторий:  $I$  — попадание на восходящей ветви траектории,  $II$  — на нисходящей ветви.

очевидно, существуют только решения класса  $\Pi^B$ . При переходе скорости через параболическую появляются нисходящие ветви, и сразу для всех  $\alpha_1$  появляются решения класса  $\Pi^H$ . С убыванием начальной скорости решения обоих классов, отвечающие одному и тому же углу  $\alpha_1$ , сближаются. Наконец, при переходе начальной скорости через минимальное значение  $V_{\min}(|\alpha_1|)$  соответствующие решения каждого из классов сливаются и исчезают. Сначала исчезают решения с  $|\alpha_1| = \pi/2$ , так что при  $|\alpha_1| = \pi/2$  попадание в центр Луны становится невозможным, хотя существуют углы  $|\alpha_1| < \pi/2$ , для которых оно еще возможно.

Значение  $\lambda$ , отвечающее попаданию, как следует из § 3.2, можно приближенно находить совершенно без учета влияния Луны, по формулам (3.2.3). Для этого предварительно по формулам теории конических сечений находится угол  $\Phi$  между геоцентрическими радиусами начальной точки и точки встречи, а также время полета

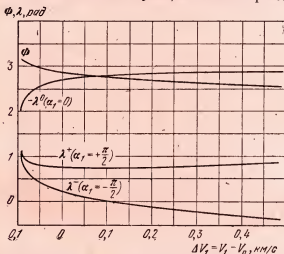


Рис. 6.2. Угол  $\lambda$  начального радиуса с направлением Луна — Земля, обеспечивающий попадание в Луну, как функция начальной скорости, в случае вертикального ( $\alpha_1 = 0$ ) и горизонтального ( $|\alpha_1| = 90^\circ$ ) направления старта.  $\Phi$  — геоцентрическая угловая дальность полета.

$T_{1,2}$  между этими точками. Функции  $\Phi(V_1)$ ,  $\lambda^+(V_1)$ ,  $\lambda^0(V_1)$  и  $\lambda^-(V_1)$  (рис. 6.2) и функции  $T_{1,2}(V_1)$  (на рис. 4.5) вычислены для класса  $\Pi^a$  при начальной высоте 200 км. Функции  $\Phi(V_1)$  отвечают соответственно значению угла  $\alpha_1 = +\pi/2$ , а функции  $\lambda^+(V_1)$ ,  $\lambda^0(V_1)$  и  $\lambda^-(V_1)$  отвечают соответственно значениям  $\alpha_1 = +\pi/2, 0, -\pi/2$ . При избытках начальной скорости над параболической 0,5 км/с уже заметно стремление кривых к асимптотам.

Траектории класса  $\Pi^a$ , отвечающие начальной высоте 200 км, углу  $\alpha_1 = \pi/2$  и рассчитанным выше приближенным значениям  $\lambda^+(V_1)$ , были найдены с учетом притяжения Луны с помощью численного интегрирования уравнений (3.1.4) на цифровой машине. Оказалось, что отклонение  $\rho_m$  траекторий от центра Луны, возникающее вслед-

ствие неучета притяжения Луны при определении  $\lambda$ , очень быстро убывает с ростом начальной скорости от минимальной. Если при минимальных начальных скоростях получается промах  $\rho_m$  порядка десятков километров, то с приближением скорости к параболической становится  $\rho_m < 1$  км.

Для получения представления о самих попадающих траекториях точности в десятки километров было бы достаточно; однако для выяснения влияния разброса начальных данных нужна будет точность попадания в центр Луны порядка километра.

Траектории, попадающие в центр Луны сколь угодно точно, можно получить методом итераций на значение  $\rho_m = 0$  по аргументу  $\lambda$ . При этом в § 4.2 показано, что сходимость будет более высокого порядка, если в качестве функции брать не  $\rho_m$  со знаком направления обхода Луны, а  $\sqrt{\rho_m}$  с тем же знаком. Этот итерационный процесс был запрограммирован для цифровой машины, и был проведен расчет попадающих траекторий. Результаты расчета траекторий класса  $\Pi^*$  для  $\alpha_1 = +\pi/2$  представлены на рис. 6.3 в системе  $Ox_{\text{в}}y_{\text{в}}$ , вращающейся вместе с направлением на Луну. Зависимости  $T_{1,2}$ ,  $\Phi$  и  $\lambda$  от начальной скорости, отвечающие этим траекториям, практически совпадают с приведенными на рис. 4.5 и 6.2.

Рассмотрим вопрос о необходимых точностях начальных данных. Заметим, что если при определении влияния малых ошибок в начальных данных пренебрегать действием Луны, то промах  $\rho_m$  будет линейной функцией ошибок. Если же учитывать влияние Луны в ее сфере действия, то линейной функцией ошибок будет  $d$  (расстояние от центра Луны линии действия вектора входной селеноцентрической скорости). А так как, согласно § 4.2, при малых  $d$  величина  $\rho_m$  пропорциональна  $d^2$ , то при учете влияния Луны промах оказывается квадратичной функцией ошибок. Это значит, что гораздо легче реализовать достаточно точное попадание в Луну, чем в неприлегающую точку, движущуюся так же, как Луна.

Определение промахов  $\rho_m = \rho_v, \rho_\alpha, \dots$ , отвечающих соответственно ошибкам  $\delta V_1, \delta \alpha_1, \dots$ , с помощью приближенной методики (т. е. с учетом влияния Луны только в ее сфере действия) является довольно громоздким. Более точным и более легким оказывается определение отклоне-

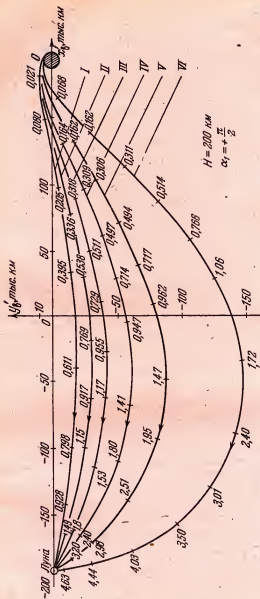


Рис. 6.3. Восходящие попадающие траектории во вращающихся координатах; цифры вдоль траекторий указывают время полета в сутках.

ний  $\rho_m$  путем непосредственного вычисления на машине траекторий, близких к траектории достаточно точного попадания в центр Луны (номинальной).

Варьируя одно из номинальных начальных данных  $x_i$  на малую величину  $\delta x_i$  и вычисляя соответствующую траекторию, находим ее расстояние от центра Луны

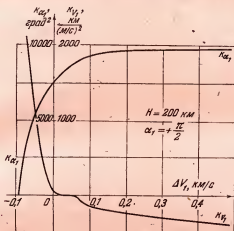


Рис. 6.4. Коэффициенты, определяющие отклонение траекторий от центра Луны.

$\rho_i \approx K_i(\delta x_i)^2$ . Кривые  $K_{\alpha_1}(V_1)$  и  $K_{V_1}(V_1)$  представлены на рис. 6.4. Функция  $K_{\alpha_1}(V_1)$  монотонно возрастает, а  $K_{V_1}(V_1)$  монотонно убывает, проходя через нуль. Соответственно максимально допустимая ошибка в направлении  $|\delta \alpha_1|_{\rho_L}$  (т. е. ошибка, отвечающая промаху, равному радиусу Луны  $\rho_m = \rho_L$  при точной реализации остальных начальных данных) есть монотонно убывающая функция начальной скорости  $V_1$ , а максимально допустимая ошибка в начальной скорости  $|\delta V_1|_{\rho_L}$  имеет по  $V_1$  максимум (рис. 6.5). Прохождение функции  $K_V(V_1)$  через нуль объясняется тем, что при соответствующей начальной скорости для углов  $\alpha = +\pi/2$  смещение точки встречи за счет изменения кривизны траектории компенсируется смещением Луны за счет изменения времени полета КА до точки встречи.

Величина максимума функции  $|\Delta V_1|_{\rho_L}$  на рис. 6.5 приближенно может быть найдена с помощью формулы  $|\Delta V_1|_{\rho_L} = \sqrt[4]{\rho_L/K_4}$ , вытекающей при  $K_V = 0$  из соотношения  $\rho_m = K_V(\Delta V_1)^2 + K_4(\Delta V_1)^4 + \dots$  (на рис. 6.5 величина этого максимума нанесена приближенно).

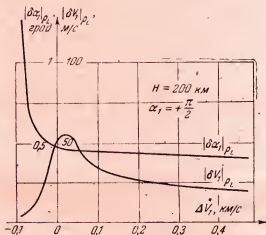


Рис. 6.5. Величина ошибки, отвечающей отклонению траектории от края Луны.

Из рис. 6.5 видим, что, например, при скоростях, близких к параболическим,  $|\delta \alpha_1|_{\rho_L} \approx 0,5$ , а  $|\delta V_1|_{\rho_L} \approx 50$  м/с. Оптимальная начальная скорость, очевидно, зависит от соотношения располагаемых точностей. Видно также, что влияние разброса  $\delta V_1$  особенно велико при скоростях, близких к минимальным. Насколько сильно может изменить траекторию КА ошибка  $\delta V_1 = \pm 2$  м/с при начальных скоростях, близких к минимальным, показывает рис. 6.6.

Заметим, что при угле  $\alpha_1 = -\pi/2$  начальной скорости с радиусом вместо компенсации смещений траектории и Луны при ошибках в начальной скорости происходит сложение смещений. Вследствие этого максимально допустимые ошибки  $|\delta V_1|_{\rho_L}$  при  $\alpha_1 = -\pi/2$  оказываются значительно меньше, чем для  $\alpha_1 = +\pi/2$ .



Влияние ошибок  $\delta r_1$  при сохранении избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической оказалось практически несущественным. Например, при ошибке  $\delta r_1 = 50$  км для начальных скоростей  $V_1 - V_\pi = -0,092928$ ; 0 и  $+0,106094$  км/с получились, соответственно, промахи  $\rho_r = 56, 43$  и  $140$  км.

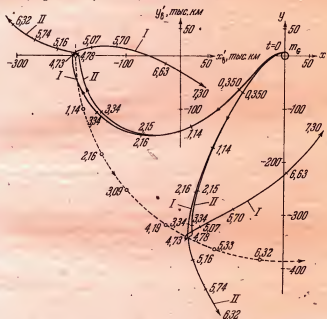


Рис. 6.6. Изменение характера попадающей траектории во вращающейся  $x'y'$  и невращающейся  $xy$  системах координат при ошибках в начальной скорости, близкой к минимальной. При  $H=200$  км,  $\alpha_1=75^\circ$ ,  $\Delta V_1 = -0,0919$  км/с имеет место попадание. При ошибках  $\pm 2$  м/с нет попадания; знаку «+» отвечает траектория I, знаку «-» — траектория II.

Ошибки  $\delta \lambda$  связаны главным образом с ошибками в моменте старта. Максимально допустимые ошибки по углу  $\lambda$  — порядка одного градуса, поэтому время старта должно быть выдержано с точностью порядка минут.

Ошибки  $\delta \xi$  и  $\delta \zeta$  по нормали  $\zeta$  к плоскости орбиты Луны, как можно показать, приведут соответственно к прицельным расстояниям  $|d| \approx a|\xi|/r_1$  и  $|d| < r_L \xi / 4V_1$ . При  $V_1 \approx V_\pi$  имеем  $U^+ = 1,65$  км/с, и из рис. 4.10 получим,

что допустимые значения  $|d| < 3000$  км. Отсюда следует, что, во всяком случае, при  $\delta\zeta \leq 50$  км или  $\delta\dot{\zeta} \leq 50$  м/с попадание еще будет иметь место.

Итак, допустимые ошибки при возмущении только одного из начальных данных будут по скорости около 50 м/с, по ее направлению — около  $0,5^\circ$ , по положению начальной точки — около 50 км (при сохранении значения  $\Delta V_1 = V - V_n$ ) и по времени старта — порядка минуты. Порядок одновременно допустимых ошибок будет примерно такой же. Не изменится этот порядок и с учетом возмущений от Солнца и других факторов, не учитываемых уравнениями (3.1.4). Действительно, возмущения малы и войдут в точные уравнения движения с малыми параметрами (в уравнениях (3.1.4) считавшимися нулями). Производные решений по начальным данным, которыми определяются необходимые точности в рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, от малых параметров будут зависеть непрерывно. Значит, эти производные и необходимые точности будут того же порядка, что и при нулевых значениях малых параметров.

Заметим, что влияние разброса при попадании в Луну на нисходящих ветвях оказывается в 2—5 раз больше, чем при попадании на восходящих ветвях траектории.

Из полученных результатов следует, что влияние разброса начальных данных на реальные траектории попадания в Луну сравнительно невелико, так что осуществление попадания в Луну возможно без коррекции траектории на пассивном участке.

## § 6.2. Облет Луны с возвращением к Земле

Еще Циолковский [1—1913] и Гоман [1—1925] указывали на возможность облета Луны с возвращением к Земле. В работах [5, 6 — 1957] показывается возможность такого облета Луны по симметричным траекториям. Однако представляет интерес исследовать все возможные плоские траектории близкого облета с возвращением, а также выяснить необходимые для их реализации точности начальных данных. Итак, попытаемся найти те начинающиеся у Земли траектории сближения с Луной, которые возвращаются в заданную окрестность Земли, именно в сферу заданного радиуса  $r_k \ll r_L$ , где  $r_L$  — расстояние до Луны.

Множество плоских решений рассматриваемой задачи является четырехпараметрическим. Множество траекторий облета с возвращением, касающихся геоцентрической окружности заданного радиуса  $r_k \ll r_L$ , является трехпараметрическим. Множество симметричных траекторий облета с возвращением является двухпараметрическим. Используя обратимость движения, нетрудно показать, что симметричные траектории должны пересекать прямую Земля — Луна (ось симметрии) под прямым углом. Поэтому они полностью характеризуются удалением точки пересечения от центра Луны и скоростью в этой точке. Это обстоятельство использовалось в работах [5, 6 — 1957] для численного отыскания симметричных траекторий.

Перейдем к анализу названной выше задачи. Как в задаче о попадании номинальными были траектории, проходящие через центр Луны, так в рассматриваемой задаче номинальными являются траектории, проходящие через центр Земли. Очевидно, номинальные траектории характерны тем, что после выхода из СД они имеют геоцентрическую константу площадей, равную нулю. В предположениях метода ТСД (§ 4.2) получим в двумерном пространстве компонент  $u$ ,  $v$  скорости многообразия выходных скоростей: селеноцентрических —  $U_3$ -круг и геоцентрических —  $V_3$ -круг. Поскольку само пространство скоростей двумерно, то его можно назвать *планом скоростей*. Очевидно, что искомым номинальным траекториям могут отвечать на плане скоростей лишь те два вектора выходной геоцентрической скорости  $V_3$ , которые параллельны прямой  $2m_0$  (рис. 6.7 и 6.9). Один из них  $V_3^{(n)}$  отвечает восходящему движению после сближения, а другой  $V_3^{(n)}$  — нисходящему, каково бы ни было движение до сближения. Восходящее движение, в отличие от нисходящего, лишь тогда может быть решением задачи, когда  $V_3 < V_{\pi}(r_L)$ , где  $V_{\pi}(r_L) = 1,44$  км/с — геоцентрическая параболическая скорость на удалении орбиты Луны.

Принимая последнее условие, рассмотрим сначала сближение на восходящей ветви, отвечающей положительному углу  $\alpha_1$  начальной скорости с радиусом, т. е. наклонению  $i_1 = 0$ .

Из рис. 6.7 видим, что векторы выходной селеноцентрической скорости  $U_3^{(n)}$  и  $U_3^{(n)}$  образуют с вектором се-



сближения является чисто радиальным. Рассматриваемые решения представлены схематически на рис. 6.8.

В случае  $\alpha_1 < 0$  (рис. 6.9) по-прежнему угол  $\alpha_n < 0$  и отвечает облету типа  $C_N^{n-}$  (рис. 6.8). Однако угол  $\alpha_n > 0$ , так что центр Луны обходитсся против часовой стрелки.

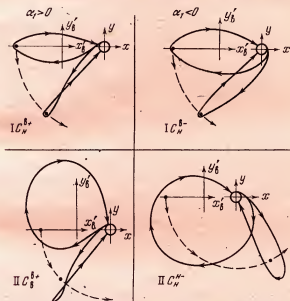


Рис. 6.8. Классы облетных номинальных траекторий типа С. Видно уменьшение геоцентрической секториальной скорости под действием Луны до нуля.

Будем обозначать такие решения задачи облета буквой  $D$ : тогда последнее решение обозначится  $D_N^{b-}$  (рис. 6.10).

Рассмотрим, наконец, сближение на нисходящей ветви. Соответствующие планы скоростей согласно § 4.3 симметричны относительно прямой  $22'$  планам, изображенным на рис. 6.7 и 6.9. Аналогично предыдущему можно получить четыре решения: для  $\alpha_1 > 0$  — решения  $D_N^{b+}$  и  $D_N^{n+}$  (рис. 6.10); для  $\alpha_1 < 0$  — решения  $D_N^{b-}$  (рис. 6.10) и  $C_N^{n-}$  (рис. 6.8). Из анализа рис. 6.7—6.9 видно, что по последствиям сближения полученные решения типа С (рис. 6.8) делятся на два класса:

I. Сближение тесное, тип ветви после него изменяется на противоположный (класс  $C_{\text{II}}^{\text{II}}$ );

II. Сближение слабое, тип ветви после него не меняется. Этот класс, в отличие от класса I, делится на два подкласса  $C_{\text{II}}^{\text{II}+}$  и  $C_{\text{II}}^{\text{II}-}$ , не переходящие один в другой при

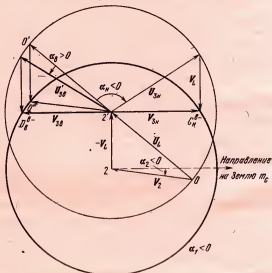


Рис. 6.9. Векторы плана скоростей для случая облета с возвращением траектории к центру Земли при отрицательной начальной секторальной скорости.

непрерывном изменении  $\alpha_1$  и при фиксированной начальной скорости. Аналогично делятся на два класса и облетные решения типа  $D$ :  $ID_{\text{II}}^{\text{II}-}$ ,  $IID_{\text{II}}^{\text{II}-}$ ,  $D_{\text{II}}^{\text{II}+}$  (рис. 6.10). При  $\alpha_1 \rightarrow 0$  облетные и долетные номинальные решения вторых классов вырождаются в тривиальные (т. е. не отвечающие сближению).

Заметим, что полученная система номинальных облетных траекторий сближения является полной.

Номинальные траектории, как и в задаче попадания, находятся методом итераций по какому-либо начальному данному, как аргументу, на значение функции  $y = 0$ . При этом  $y = \gamma r_m \text{sign } C_{\text{II}}$ , где  $r_m$  — расстояние ветви возвраще-

ния от центра Земли. Этим методом с помощью численного интегрирования и были вычислены на ЭВМ облетные траектории всех подклассов типа  $C$  и некоторые типа  $D$ , что подтвердило правильность результатов, полученных методом ТСД. Итерации велись по аргументу  $\lambda$  при фиксированных начальных данных  $r_1 = 6571$  км,

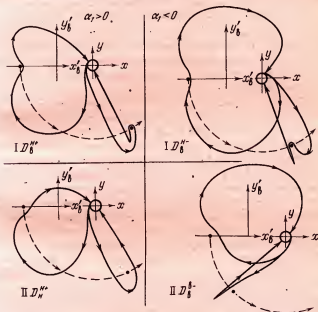


Рис. 8.10. Классы облетных номинальных траекторий типа  $D$ . Видна аналогия с облетными классами типа  $C$ .

$\Delta V_1 = -0,07228$  км/с и  $\alpha_1 = \pm\pi/2$ , где  $\Delta V_1$  есть избыток начальной скорости над местной параболической. Оказалось, что классу  $C_n^B$  отвечают времена полета  $T_{1,n} = 5 \div 10$  суток, классу  $D_n^B$  — 15 ÷ 20 суток, а остальным — промежуточные.

Рассмотрим эволюцию номинальных решений с убыванием начальной скорости  $V_1$ . При достаточно больших скоростях существуют только решения класса  $C_n^B$ . При  $\Delta V_1 = 0,017$  км/с появляется решение  $C_n^{B+}$ ; при  $\Delta V_1 < 0$  — решения  $D_n^{B+}$ ,  $D_n^{B-}$  и  $C_n^{B-}$ . Наконец, при  $\Delta V_1 =$

$-0,017$  км/с появляются решения  $D_v^{n-}$  и  $D_v^{n+}$ . С дальнейшим убыванием начальной скорости происходит попарное сближение, а затем слияние и исчезновение решений: сначала исчезают решения  $C_n^{n+}$  и  $C_v^{n+}$ , затем  $D_v^{n+}$  и  $D_n^{n+}$ , затем  $C_n^{n-}$  и  $C_v^{n-}$ . Последними исчезают решения  $D_v^{n-}$  и  $D_n^{n-}$ . При меньших начальных скоростях уже невозможно получить  $C_k=0$ , хотя траектории еще могут достигать СД.

Заметим, что решения вторых классов при всех начальных скоростях проходят вне диска Луны, а решения первых классов — лишь при начальных скоростях, близких к минимальным.

Рассмотрим вопрос о влиянии разброса начальных данных. Поскольку для номинальных траекторий, в отличие от других, величина расстояния от центра Земли  $r_m$  является квадратичной, а не линейной функцией малых ошибок, они выгоднее близких к ним траекторий по необходимой точности реализации начальных данных.

Как и в задаче попадания, в задаче облета определяющим является влияние разброса по начальной скорости  $V_1$  и по ее углу  $\alpha_1$  с радиусом  $r_1$ . Влияние разброса в рассматриваемой задаче зависит не только от характера прохождения траектории относительно Земли, но и от расстояния  $r_m$  траектории от центра Луны. С убыванием  $r_m$  влияние ошибок быстро растет. Поэтому для первых классов оно сильнее, чем для вторых, причем ошибки в сторону уменьшения расстояния  $r_m$  влияют сильнее, чем в сторону его увеличения. Например, для облета типа  $C_v^{n+}$  при  $\alpha_1 = \pi/2$  и  $\Delta V_1 = -0,07228$  км/с имеем  $r_m = 12\,900$  км. При ошибках  $\delta V_1 = -1$  м/с и  $\delta \alpha_1 = -0,01$  рад, а также  $\delta V_1 = +10$  м/с и  $\delta \alpha_1 = +0,1$  рад, траектории еще возвращаются на Землю. Однако при ошибках  $\delta V_1 = -10$  м/с и  $\delta \alpha_1 = -0,1$  рад либо траектории соударяются с Луной, либо меняется направление обхода Луны. С увеличением минимального расстояния траектории от Луны требования по точности быстро снижаются.

Для тривиальных решений (проходящих от Луны на расстояниях  $r_m \approx r_*$ ) влияние разброса сравнительно невелико, и необходимые для возвращения на Землю точности начальных данных оказываются не выше, чем для попадания в Луну при тех же начальных скоростях.



### § 6.3. Облет Луны с последующим пологим входом в атмосферу Земли

Здесь ставится задача облета Луны, при котором КА возвращается в атмосферу Земли полого. Для таких траекторий условия входа в атмосферу являются наиболее легкими. Очевидно, для этих траекторий минимальный геоцентрический радиус  $r_m$  на участке возвращения должен быть равен радиусу  $r_T$  верхних слоев атмосферы.

Как показано в § 5.4, при энергиях  $h_1 \ll 2V_1^2(r_T)$ , в частности, при начальных скоростях  $V_1 < V_\pi + 0,5$  км/с облетные траектории с  $r_m = r_T$  в точке выхода из СД обладают свойством  $|V_{3T}| \approx \frac{r_m}{r_L} V_\pi(r_T) = V_T^*$ , где  $V_{3T}$  — трансверсальная компонента выходной геоцентрической скорости  $V_3$  (рис. 4.1), а  $V_\pi$  — параболическая скорость на радиусе  $r_T$ . Это позволяет, как и в предыдущей задаче, с помощью плана скоростей найти все классы решений.

Оказывается, каждой паре подклассов решений предыдущей задачи в рассматриваемой задаче соответствуют два класса решений, обходящие Луну в том же направлении, что и решения предыдущей задачи, а Землю — в разных. Но здесь классы не обязательно делить на подклассы, так как их решения изменяются непрерывно при переходе через нуль угла  $\alpha_1$  начальной скорости с радиусом. Поэтому их можно обозначать без указания знака сверху:  $C_{n+}^n$  и  $C_{n-}^n$  для облетного класса I, и  $C_{v-}^n$  и  $C_{n+}^n$  для облетного класса II. Аналогично имеем облетные решения типа D:  $D_{v+T}^n$ ,  $D_{v-}^n$ ,  $D_{n+T}^n$ ,  $D_{n-}^n$ . Знак внизу указывает направление обхода Земли. Когда угол  $\alpha_1$  прямой, то вторые пары решений могут вырождаться в тривиальные (не отвечающие сближению с Луной). Эти решения суть эллипсы с фокусом в центре Земли, в перигее касающиеся верхних слоев атмосферы. Для среднего значения  $\alpha_1 = 0$  облетные классы типа C представлены на рис. 6.11. Геоцентрическая секториальная скорость в начале равна нулю, и решения начинаются радиально. Затем возмущения Луны увеличивают величину секториальной скорости настолько, что ветвь возвращения касается верхних слоев атмосферы Земли. Эволюция решений рассматриваемой задачи с изменением начальной скорости прослеживается

аналогично эволюции решений соответствующих классов предыдущей задачи.

Заметим, что по форме все облетные траектории сближения, возвращающиеся к Земле, промежуточны между соответствующими решениями рассматриваемой задачи

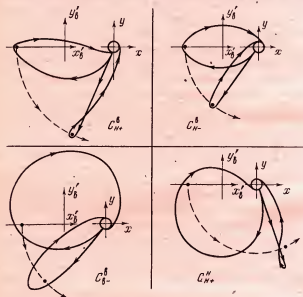


Рис. 6.11. Классы облетных траекторий типа  $C$ , возвращающихся в атмосферу Земли полого.

с  $\alpha_1 = +\pi/2$  и  $\alpha_1 = -\pi/2$  и с теми же начальными радиусом и скоростью. Симметричные решения задачи о пологом возвращении, как видно из рис. 6.11, могут содержаться лишь в классах  $C_{N+}^b$ ,  $D_{N+}^b$  (для  $\alpha_1 = +\pi/2$ ) и  $C_{N-}^b$ ,  $D_{N-}^b$  (для  $\alpha_1 = -\pi/2$ ). Меняя независимо величину начального радиуса и начальной скорости, получим множество всех симметричных траекторий сближения.

Метод получения решений предыдущей задачи применим и к этой задаче, только итерации ведутся не на значение  $y = r_m = 0$ , а на значения  $y = \pm \gamma_r$ . Относительная малость толщины атмосферы приводит к гораздо более жестким требованиям по точности начальных

данных, чем в предыдущей задаче. Например, для симметричного облета с избытком начальной скорости над параболической  $\Delta V_1 = -0,083773$  км/с, начальным углом скорости с радиусом  $\alpha_1 = \pi/2$  и временем полета 823 600 с (около 9,5 сут) расстояние от Луны  $\rho_m = 27\,000$  км. Даже такие малые ошибки в начальных данных, как  $\Delta V_1 = -0,2$  м/с и  $\delta\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  рад, вызывают при возвращении изменения высот соответственно 160 и 190 км, т. е. являются недопустимыми (так как нарушается условие попадания в коридор [4—1959] входа в атмосферу). В этом примере величина  $\rho_m$  сравнительно велика. Уменьшение  $\rho_m$  так же быстро увеличивает влияние начальных ошибок, как и в предыдущей задаче.

#### § 6.4. Задача о разгоне или торможении КА с помощью Луны

Рассмотрим задачу о максимальном разгоне КА с помощью Луны без использования силы тяги двигателя. Из плана скоростей (плоскость  $u, v$  на рис. 4.9) видно, что максимальная выходная геоцентрическая скорость после сближения  $V_3^M = U + V_L$ , где  $U$  — величина входной селеноцентрической скорости, а  $V_L$  — скорость Луны; однако можно показать, что траектория с  $V_3 = V_3^{(M)}$  при любых начальных данных проходит внутри Луны \*).

Оказывается, практически осуществимая траектория, отвечающая наибольшему разгону  $\Delta V_{2,3} = V_3 - V_2$  (где  $V_2, V_3$  — входная и выходная геоцентрические скорости), должна проходить у поверхности Луны, обходя ее по часовой стрелке при сближении на нисходящей ветви (класс  $\tilde{C}$ ) и против часовой стрелки — при сближении на восходящей ветви (класс  $\tilde{D}$ ). Классу  $\tilde{D}^*$  отвечают большие из пунктирных векторов  $V_3$  на рис. 6.12. При отыскании разгонных решений итерации велись для функции  $y = \sqrt{\rho_m}$  со знаком направления обхода Луны на значение  $+\sqrt{\rho_L}$  для решений  $\tilde{D}$  и на  $-\sqrt{\rho_L}$  для решений  $\tilde{C}$ . Здесь  $\rho_m$  — расстояние траектории от центра Луны,  $\rho_L = 1738,0$  км — радиус Луны. Были найдены крайние

\*) В § 22.1 это сделано для более общего случая — пространственного.

решения каждого из классов, т. е. решения с  $\alpha_1 = +\pi/2$  и решения с  $\alpha_1 = -\pi/2$ . Они схематически представлены на рис. 6.13 в геоцентрических  $x, y$  и вращающихся  $x_{\text{в}}, y_{\text{в}}$  координатах. По знаку угла  $\alpha_1$ , т. е. по направлению обхода Земли, каждый класс можно разделить на два подкласса:  $\tilde{D}^*$  — на  $\tilde{D}^{*+}$  и  $\tilde{D}^{*-}$ ;  $\tilde{C}^*$  — на  $\tilde{C}^{*+}$  и  $\tilde{C}^{*-}$ . Разгонные решения огибают Луну таким образом, чтобы выходить из СД по направлению, возможно более близкому к направлению скорости Луны.

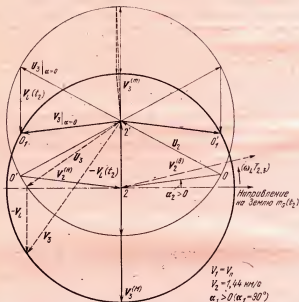


Рис. 6.12. План скоростей для облетных траекторий. Пунктирные треугольники соответствуют траекториям наибольшего реализуемого изменения модуля геоцентрической скорости в результате сближения с Луной.

Получающаяся после разгона величина выходной геоцентрической скорости  $V_3$  всегда является гиперболической, независимо от начальной скорости  $V_1$ , так что КА после сближения с Луной уходит в бесконечность. Однако величина разгона  $\Delta V_{2,3}$  зависит от  $V_1$ ; она максимальная (порядка 1,5 км/с) при скоростях  $V_1$ , близких к ми-

нимальным, и с ростом  $V_1$  монотонно убывает (до нуля при  $V_1 \rightarrow \infty$ ). Максимальную скорость благодаря месячному вращению Луны можно получить любого направления в плоскости орбиты Луны. Так как эта плоскость составляет небольшие углы с плоскостями орбит планет, разгон без затраты топлива в принципе можно использовать для межпланетного полета.

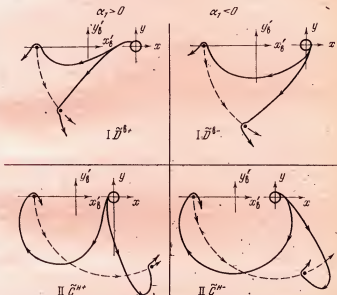


Рис. 6.13. Классы траекторий максимального разгона с помощью Луны. Видна аналогия с классами попадающих траекторий (рис. 6.1).

Переходя к рассмотрению влияния разброса начальных данных на разгонные решения, заметим, что оно выше, чем для попадающих решений, так как промах  $\delta r_m$  является не квадратичной, а линейной функцией ошибок. Например, для разгона  $\tilde{D}^{n+}$  с начальной скоростью, меньшей параболической на 0,0723 км/с, и углом  $\alpha_1 = 90^\circ$  ошибки  $\delta V_1 = 1$  км/с и  $\delta \alpha_1 = 1^\circ$  вызывают соответственно изменения  $(\delta r_m)_v = 120$  км и  $(\delta r_m)_\alpha = 100$  км.

Из-за опасности соударения с Луной вследствие наличия ошибок в начальных данных расчетная траектория должна быть поднята над поверхностью Луны. Это под-

нение уменьшает выигрыш в скорости. Решения с  $\alpha_1 = +\pi/2$  выгоднее других разгонных решений в том отношении, что позволяют использовать при взлете компоненту суточного вращения Земли, лежащую в плоскости орбиты Луны (как, впрочем, и решения рассмотренных ранее задач, отвечающие углу  $\alpha_1 = \pi/2$ ).

Легко видеть, что решение задачи о любом разгоне вследствие обратимости движения после замены  $t$  на  $-t$  всегда дает решение задачи о таком же торможении с помощью Луны при движении по траектории, зеркально симметричной разгонной относительно оси  $x'_B$ . При этом наиболее выгодной в смысле торможения оказывается траектория, получающаяся из наиболее выгодной разгонной. Она обходит Землю в направлении ее суточного вращения, отчего уменьшается скорость КА относительно поверхности Земли. Траектории максимального торможения в принципе могут быть использованы, например, при возвращении КА из межпланетного полета.

Как видно из рис. 6.12, кроме облетных попадающих и возвращающихся к Земле траекторий сближения с Луной, а также траекторий, отвечающих тому или иному разгону ракеты в результате сближения, могут существовать еще траектории, отвечающие большему или меньшему ее замедлению (относительно Земли), и других плоских облетных траекторий сближения не существует. Таким образом, план скоростей позволяет дать полную классификацию плоских облетных траекторий сближения с Луной.

Траекториям замедления на рис. 6.12 соответствуют выходные геоцентрические скорости, образующие со скоростью  $-V_L$  угол, меньший чем выходные скорости, отвечающие траекториям подклассов  $C_{n+}^n$  и  $D_{n+}^n$ , причем максимальному замедлению отвечает траектория, выходящая из СД в направлении, обратном скорости Луны, независимо от условий входа.

Заметим, что, как видно из рис. 6.12, траектории максимального замедления отвечает максимальная геоцентрическая константа площадей, и потому эта траектория проходит на наибольшем удалении от центра Земли по сравнению с близкими траекториями.

С помощью плана скоростей можно, очевидно, проследить эволюцию решений с изменением угла  $\lambda$  или другого начального данного в диапазоне, отвечающем сближению.

## РАЗДЕЛ II

### ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ ЛУНЫ

Траектории достижения Луны при запуске КА с больших широт поверхности Земли являются существенно пространственными.

В настоящем разделе проводится анализ таких траекторий с целью попадания в Луну или мягкой посадки на ее поверхность, или создания ИСЛ. При этом рассматривается запуск как с поверхности Земли, так и с орбиты ИСЗ. Излагаются методы приближенного и точного расчета траекторий достижения Луны. Приближенный анализ траекторий, начинающихся с поверхности Земли, излагается в основном по книге [2—1965].

#### Глава 7

#### ДОСТИЖЕНИЕ ЛУНЫ ПРИ СТАРТЕ С БОЛЬШИХ ШИРОТ

Вследствие относительной малости изменения вне СД траекторий достижения Луны под действием лунных возмущений при определении начальных данных пассивного участка оказывается возможным вообще пренебрегать притяжением Луны. В данной главе выясняется специфика траекторий попадания в Луну из точки земной поверхности с заданной широтой при условии непрерывности активного участка. Если при этом пассивный участок траектории перелета проходит в основном над северным полушарием Земли, то перелет назовем происходящим *по северной схеме N*; если же — над южным полушарием, то эту схему перелета назовем *южной S*. Обе схемы рассматриваются аналогично; при этом для определенности здесь рассматривается в основном случай северной начальной широты.

### § 7.1. Особенности попадания в Луну с больших широт

В задаче попадания в Луну, в отличие от задачи наземной стрельбы, цель не участвует в суточном вращении Земли вместе с точкой старта, и относительное расположение цели и точки старта непрерывно меняется с течением времени. Чтобы узнать, как происходит это изменение, найдем угол  $i_L$  между плоскостями экватора  $\Pi_0$  и орбиты Луны  $\Pi_L$ .

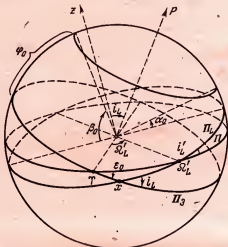


Рис. 7.1. Положение плоскости  $\Pi_L$  лунной орбиты относительно плоскостей экватора  $\Pi_0$  и эклиптики  $\Pi$ .

Поскольку известно, что плоскость  $\Pi_L$  лунной орбиты образует с плоскостью  $\Pi$  эклиптики (рис. 7.1) слабоперемennyй угол  $i'_L$ , будем считать его постоянным и в расчетах примем  $i'_L = 5^\circ 9'$ . Напомним, что линия пересечения этих плоскостей (линия узлов) вращается в плоскости эклиптики по часовой стрелке (если смотреть с северного полюса эклиптики), совершая полный оборот за 18,6 года [2—1961].

Пусть  $\varphi_L$  — долгота восходящего угла лунной орбиты, отсчитываемая в плоскости эклиптики от направле-



ния на точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$  (рис. 7.1). Тогда из сферического треугольника  $x\Upsilon\mathcal{O}'_L$  со стороной  $\mathcal{O}'_L$  и углами  $\varepsilon_0$  и  $i'_L$ , где угол  $\varepsilon_0 \approx 23^\circ 27'$  — наклонение эклиптики к экватору, получим по теореме косинусов для углов  $i_L \in [0, \pi]$ :

$$\cos i_L = \cos \varepsilon_0 \cos i'_L - \sin \varepsilon_0 \sin i'_L \cos \mathcal{O}'_L. \quad (1.1)$$

Из нее следует, что величина угла  $i_L(\mathcal{O}'_L)$  колеблется между минимумом  $i_L(180^\circ) = \varepsilon_0 - i'_L = 18^\circ 18'$  и максимумом  $i_L(0) = \varepsilon_0 + i'_L = 28^\circ 36'$ . Приняв [2 — 1961], что на 1 января 1950 года долгота  $\mathcal{O}'_L = 12^\circ 1'$ , по формуле (1.1) определим, что угол  $i_L$  прошел минимум ( $18^\circ 18'$ ) в середине 1979 года, а затем стал медленно возрастать и достигнет максимума через 9,3 года. На эти колебания  $i_L$  накладываются изменения  $i'_L$  от  $5^\circ$  до  $5^\circ,3$  с периодом 173 сут [2—1964, стр. 241]. Учитывая медленность суммарного изменения угла  $i_L$ , будем пренебрегать его переменностью за время полета по рассматриваемым траекториям (составляющее несколько суток). Для расчетов в данном разделе примем  $i_L = 18^\circ 20'$  (если не будет оговорено другое значение). Таким образом, будем считать, что Луна движется в плоскости, наклоненной к экватору на постоянный угол  $i_L$ , а начальная точка пассивного участка движется параллельно экватору на широте  $\varphi_0$ . Угол между геоцентрическим радиусом точки старта и плоскостью орбиты Луны при этом изменяется в пределах от

$$\alpha_0 = \varphi_0 - i_L \text{ до } \beta_0 = \varphi_0 + i_L.$$

В дальнейшем для определенности будем предполагать, что траектория полета не может лежать в плоскости лунной орбиты, т. е. что  $\alpha_0 > 0$ . Для расчетов будем пользоваться гипотетическими широтой и долготой какой-либо точки старта в северном полушарии, например:

$$\varphi_0 = 47^\circ, \quad \lambda_0 = 65^\circ.$$

Рассмотрим теперь пассивный участок траектории полета, начинающегося под углом  $\theta_1$  к горизонту с начальной скоростью  $V_1$  на высоте  $H_1$  ( $\theta_1 = 90^\circ - \alpha_1$ ). Длину активного участка будем считать равной нулю (в дальнейшем можно будет от этого предположения освободить-



Уменьшить искривление траектории, т. е. уменьшить угол  $\Phi_1$  между начальным радиусом  $r_1$  и радиусом  $|r_2| = r_L$  (где  $r_L$  — среднее расстояние от Земли до Луны), можно либо увеличением начальной скорости, либо увеличением угла  $\theta_1$  наклона вектора начальной скорости к местному горизонту. Очевидно, оба эти пути связаны с дополнительными по сравнению с плоской задачей энергетическими потерями соответственно на доразгон КА или на создание импульса проекции силы тяжести на касательную к траектории. При фиксированных значениях высоты  $H_1$ , скорости  $V_1$  и угла  $\theta_1$  для начального радиуса  $|r_1| = m_0 A_{1*}$  (рис. 7.2), образующего с плоскостью орбиты Луны минимальный угол  $\alpha_0$ , можно построить поверхность, которая будет содержать траектории, получающиеся при рассматриваемых значениях  $V_1$ ,  $\theta_1$  и различных азимутах. Эта поверхность симметрична относительно прямой  $m_0 A_{1*}$ .

Рассмотрим линию пересечения  $\Gamma$  этой поверхности с плоскостью орбиты Луны. При достаточно малых значениях  $V_1$  и  $\theta_1$  линия  $\Gamma$  расположена внутри орбиты Луны. При значениях  $V_1$  и  $\theta_1$ , соответствующих углу  $\Phi_1 = \Phi_* = \pi - \alpha_0$ , она касается орбиты Луны в точке  $A_{2*}$ , в которой орбита пересекает плоскость меридиана начальной точки  $A_{1*}$ , и в принципе оказывается возможным попадание в Луну. Но эта возможность практически может быть нереализуема, ибо в момент, когда упрежденная точка проходит через точку  $A_{2*}$ , точка старта, вообще говоря, не будет находиться в точке  $A_{1*}$ .

С увеличением значений  $V_1$  и  $\theta_1$ , т. е. с убыванием угла от значения  $\Phi_*$ , на орбите Луны появляется все возрастающий интервал с серединой в точке  $A_{2*}$ , на котором Луна может быть достигнута. Назовем этот интервал *поражаемым интервалом*. Когда угловая величина этого интервала достигает значения геоцентрического угла, проходимого Луной за одни сутки (около  $13^\circ 2'$ ), то в каждом сидерическом месяце появятся по крайней мере одни сутки, в которые станет возможным запуск ракеты по траектории попадания в Луну. Достижение Луны становится реальным.

С дальнейшим увеличением значений  $V_1$  и  $\theta_1$ , т. е. с убыванием угла  $\Phi_1$  до значения  $\Phi^* = \pi - \beta_0$ , поражаемый интервал возрастает до полного круга, и

старт к Луне становится возможным в любые сутки месяца.

Заметим, что в случае наземной стрельбы большие угловые дальности достигаются труднее, чем меньшие, а при стрельбе по Луне дело обстоит как раз наоборот: труднее достижимы меньшие угловые дальности, чем большие.

Пассивная угловая дальность  $\Phi_1$  полета зависит не только от скорости  $V_1$  и угла  $\theta_1$ , но и от высоты  $H_1$  конца активного участка. Однако это влияние невелико, и расчеты будут проводиться лишь для значений высоты  $H_1 = 300$  км и  $H_1 = 1000$  км в предположении, что  $-0,1$  км/с  $\leq \Delta V_1 \leq 0,5$  км/с, как это принято в работе [1 — 1957]. Здесь  $\Delta V_1$  — избыток начальной скорости над местной параболической скоростью  $V_n$ .

Так как расчеты будут проводиться только для восходящих ветвей, то не только при гиперболических, но и при эллиптических начальных скоростях угол  $\Phi_1$  по известным величинам  $\Delta V_1$ ,  $\theta_1$ ,  $r_1$  и  $r_2$  находится однозначно. Положим

$$\Delta\beta_1 = \frac{\Delta V_1}{V_n} \left( 2 + \frac{\Delta V_1}{V_n} \right), \quad \beta_1 = 1 + \Delta\beta_1. \quad (1.1')$$

Из теории конических сечений имеем:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \beta_1 &= (V_1/V_n)^2, \quad \Delta\beta_1 = \beta_1 - 1, \\ p &= 2r_1\beta_1 \cos^2 \theta_1, \quad a = -r_1/2\Delta\beta_1, \\ e^2 &= 1 - \frac{p}{a}, \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_1} - 1 \right), \quad \cos \vartheta_2 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_2} - 1 \right), \\ \Phi_1 &= \vartheta_2 - \vartheta_1. \end{aligned} \quad \square \quad (1.2)$$

Здесь  $V_1 = V_n + \Delta V_1$  — начальная скорость,  $p$ ,  $a$ ,  $e$  — соответственно параметр, большая полуось и эксцентриситет конического сечения,  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — истинные аномалии начала и конца траектории.

Результаты расчета зависимости  $\Phi_1(\Delta V_1)$  представлены на рис. 7.3 в виде сплошных кривых для  $H_1 = 300$  км и пунктирных — для  $H_1 = 1000$  км при фиксированных углах  $\theta_1 = 0^\circ, 5^\circ, \dots, 40^\circ$ . Легко видеть, что изменение

\*) Значок  $\square$  перед номером формулы означает, что данный номер относится к группе формул, перед первой из которых стоит значок  $\blacksquare$ . (Прим. ред.)

начальной высоты  $H_1$  действительно сказывается несущественно и что изменение угла  $\theta_1$  на каждые  $5^\circ$  вызывает почти эквидистантное смещение кривой  $\Phi_1(\Delta V_1)$  на  $10^\circ$ . С другой стороны, для фиксированного значения угла  $\theta_1$  изменение пассивной угловой дальности полета  $\Phi_1$  на  $10^\circ$

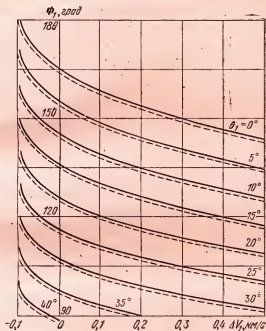


Рис. 7.3. Зависимость угловой дальности  $\Phi_1$  пассивного полета к Луне от избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической при различных значениях угла возвышения  $\theta_1$  для начальной высоты 200 км (сплошная линия) и 1000 км (пунктир).

при скоростях, не близких к минимальным, соответствует изменению  $\Delta V_1$  на 200—300 м/с.

Для дальнейшего рассмотрения задачи потребуется знать зависимость величины  $\beta_1$  от угла  $\theta_1$  при постоянных значениях угловой дальности  $\Phi_1$ : их можно найти пересчетом с помощью рис. 7.3, но для их получения удобнее воспользоваться аналитической формулой, полученной из

формулы (81) книги [1 — 1968]:

$$\Delta\beta_1 = \frac{\cos^2\left(\frac{\Phi}{2} + \theta_1\right) - v \cos^2 \theta_1}{v \cos^2 \theta_1 - \cos(\Phi_1 + \theta_1) \cos \theta_1}, \quad \beta_1 = 1 + \Delta\beta_1, \quad (1.3)$$

где  $v = r_1/r_2 \approx 0,018$  (малая величина) — отношение начального радиуса к конечному.

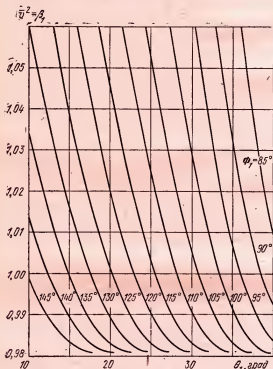


Рис. 7.4. Зависимость параметра  $\beta_1$  (квадрата отношения начальной скорости к местной параболической) от начального угла возвышения  $\theta_1$  при различных угловых дальностях  $\Phi$  пассивного участка траектории полета к Луне.

Задаваясь фиксированными значениями угла  $\Phi_1$ , найдем функции  $\bar{v}^2 = V_1^2/V_n^2 = \beta_1(\theta_1, \Phi_1)$  и построим для начальной высоты  $H_1 = 1000$  км кривые  $\Phi_1(\beta_1, \theta_1) = \text{const}$ , которые представлены на рис. 7.4; значения уг-

ла  $\Phi_1$  отмечены у кривых цифрами. Для высоты  $H_1 = 300$  км кривые получаются из представленных небольшим сдвигом их по оси ординат.

С приближением начальной скорости к минимальной касательные к кривым на рис. 7.4 становятся параллельными оси абсцисс, а на рис. 7.3 — оси ординат. Это мешает определению на кривых точек, отвечающих наименьшим скоростям.

Выведем формулу, позволяющую для разных углов  $\theta_1$  определить величины минимальных начальных скоростей, необходимых для получения апогейных радиусов  $r_2 = |F_0 A_2|$ , равных расстоянию от Земли до Луны

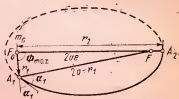


Рис. 7.5. Траектория минимальной энергии, необходимой для достижения заданного радиуса  $r_2$  при заданных начальных данных  $r_1$  и  $\alpha_1$ .

(рис. 7.5). По свойству касательной к эллипсу угол  $F_0 A_1 F$  ( $F$  — второй фокус эллипса) в треугольнике  $A_1 F F_0$  (рис. 7.5) равен  $\pi - 2\alpha_1$ , если  $\alpha_1 = (\pi/2) - \theta_1$ . Кроме того, легко видеть, что  $FA_1 = 2a - r_1$ ,  $FF_0 = 2ae$ , где  $a$  — большая полуось, а  $e$  — эксцентриситет эллипса. Из треугольника  $A_1 F F_0$  выражаем сторону  $FF_0$ :

$$4a^2 e^2 = (2a - r_1)^2 + r_1^2 + 2(2a - r_1)r_1 \cos 2\alpha_1.$$

Так как  $e = (r_2 - a)/a$  (рис. 7.5), то, подставив это значение в предыдущую формулу, получим:

$$a = \frac{1}{2} \frac{r_2^2 - r_1^2 \sin^2 \alpha_1}{r_2 - r_1 \sin^2 \alpha_1}. \quad (1.4)$$

Теперь с помощью формул (1.3)–(1.4) найдем:

$$\beta_{\min} = \frac{1 - v}{1 - v^2 \sin^2 \alpha_1}, \quad \cos \Phi_{\max} = 1 - \frac{2(1 - v)^2 \sin^2 \alpha_1}{1 - v(2 - v) \sin^2 \alpha_1}, \quad (1.4')$$

где  $v = r_1/r_2$ , или в более удобном для вычислений виде:

$$\Delta \beta_{\min} = -v \frac{1 - v \sin^2 \alpha_1}{1 - v^2 \sin^2 \alpha_1}, \quad (1.5)$$

где  $\Delta\beta_{1\min} = \beta_{1\min} - 1$ ,

$$\sin \frac{\Phi_{\max}}{2} = \frac{(1 - v) \sin \alpha_1}{\sqrt{1 - v(2 - v) \sin^2 \alpha_1}}. \quad (1.6)$$

Последние формулы позволяют по углу  $\theta_1 = (\pi/2) - \alpha_1$  рассчитать минимальную начальную скорость  $V_{1\min}$  и максимальный угол  $\Phi_{\max}$ , достижимый при заданном  $\theta_1$ .

Из формул (1.1') и (1.5) следует, что  $\Delta V_{1\min}(\theta_1)$  есть малая величина того же порядка, что и величина  $vV_a/2$ , и что ее относительное изменение есть также величина малая, одного порядка с величиной  $v \cos^2 \theta_1$ . Этого следовало ожидать из рис. 7.5, потому что изменения большой оси минимального эллипса при изменениях угла  $\theta_1$  не превосходят величины  $r_1$ , т. е. относительно малы.

Кроме того, из формулы (1.6), положив в знаменателе  $\sin^2 \alpha = 1$ , можно заключить, что  $\sin \Phi_{\max}/2 \leq \sin \alpha_1$  при  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , т. е. при  $\pi/2 \geq \theta_1 \geq 0$ .

Если рассматривать неминимальные скорости, то легко убедиться, что заданный радиус  $r_2$  конического сечения будет достигаться при угле  $\Phi_1 < \Phi_{\max}$  (угол  $\Phi_{\max}$  соответствует минимальной скорости).

Значит, всегда справедливо простое неравенство

$$\sin \Phi_1/2 \leq \sin \alpha_1. \quad (1.7)$$

Знак равенства для минимальных скоростей имеет место при  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \pi/2$ , а для больших скоростей — только при  $\alpha_1 = 0$  ( $\theta_1 = \pi/2$ ). Неравенство (1.7) можно применять для оценки максимально достижимых углов  $\Phi_1$ .

Рассмотрим теперь, какова должна быть дуга конического сечения с фиксированными значениями  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\Delta V$ ,  $\theta_1$ , т. е. с фиксированной угловой дальностью  $\Phi_1$  для случая, когда имеет место попадание в Луну. Ясно, что встреча КА с Луной происходит не в точке  $A_2^0$ , где Луна находилась в момент старта (рис. 7.6), а в упрежденной точке  $A_2$ , в которую Луна переместится за время полета КА по траектории  $A_1 A_2$ . Время полета  $T_{1,2}$  указанными выше данными  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\Delta V_1$ ,  $\theta_1$  определяется однозначно. Поэтому при фиксированных значениях этих величин упрежденная точка движется с постоянной скоростью впереди Луны на постоянном угловом расстоянии  $\omega_L T_{1,2}$  от



нее, где  $\omega_L$  — угловая скорость обращения Луны вокруг Земли.

Вследствие того, что радиус  $r_1$  и угол  $\Phi_1$  заданы, геометрическое место точек, из которых возможно попадание в Луну с фиксированными данными  $r_1, r_2, \Delta V_1, \theta_{12}$ , должно быть окружностью радиуса  $r_1 \sin \Phi_1$ , являющейся линией пересечения геоцентрической сферы радиуса  $r_1$

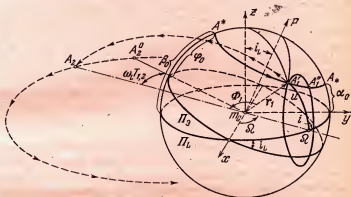


Рис. 7.6. Геоцентрические траектории движения точки старта, КА и Луны.

с прямым круговым конусом, ось которого постоянно соединяет центр Земли  $m_0$  с упрежденной точкой  $A_2$ , а образующие составляют с этой осью угол  $\Phi_1$ .

Поскольку плоскости всех траекторий с заданными значениями величин  $r_1, r_2, \Delta V_1, \alpha_1$  проходят через начальную точку  $A_1'$ , упрежденную точку  $A_2'$  и центр Земли  $m_0$ , то все эти плоскости пересекаются с плоскостью орбиты Луны по прямой  $m_0 A_2$ . Примем плоскость орбиты Луны за основную при определении кеплеровых элементов траекторий полета к Луне. Тогда прямая  $m_0 A_2$  будет являться линией узлов для всех попадающих траекторий, а положение ее можно определять долготой  $\Omega$  узла, противоположного упрежденной точке. При этом долготу  $\Omega$  будем отсчитывать от восходящего узла  $\Omega_L = x$  лунной орбиты на экваторе. Наклонение  $i$  плоскости траектории к основной плоскости будем считать изменяющимся в диапазоне от  $-180^\circ$  до  $+180^\circ$  (Приложение 1).

Долготу  $\omega$  перигея геоцентрического участка траектории и истинную аномалию  $\vartheta$  начальной точки  $A_1$  пассивного участка относительно перигея будем определять обычным образом. Обозначим  $\vartheta + \omega = u$ , где  $u$  — аргумент широты начальной точки. Тогда из рис. 7.6 следует, что  $u = 180^\circ - \Phi_1$ . Окружность начальных точек траекторий с угловой дальностью  $\Phi_1$  будем кратко называть *и-кругом*.

Учтем теперь условие, что точка старта должна находиться на заданной широте  $\varphi$  и что эта точка движется со скоростью суточного вращения Земли по фиксированной параллели. Ясно, что начальные точки попадающих траекторий, определяемых параметрами  $r_1$ ,  $\Delta V_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_0$ , должны быть общими точками для *и-круга* и  $\varphi_0$ -параллели. Таких точек может быть две (пересечение кругов), одна (касание кругов) и ни одной (круги не имеют общих точек).

С течением времени благодаря месячному движению Луны центр *и-круга* равномерно движется на сфере по большому кругу основной плоскости, а параллель точки старта не меняет своего положения в абсолютном пространстве (рис. 7.6). Поэтому при  $u < \alpha_0$ , где  $\alpha_0 = \varphi_0 - i_L$ , т. е. при достаточно больших углах  $\Phi_1$ ,  $\varphi_0$ -параллель и *и-круг* не имеют общих точек, а когда аргумент широты  $u$  заключен в интервале  $\alpha_0 < u < \beta_0$ , где  $\beta_0 = \varphi_0 + i_L$ , то на  $\varphi_0$ -параллели появляется целый интервал, внутри которого при различных углах  $\Omega$ , достаточно близких к  $90^\circ$ , всюду могут находиться точки пересечения  $\varphi_0$ -параллели с *и-кругом*. Назовем этот интервал *стартовым интервалом*. При  $u \rightarrow \alpha_0$  этот интервал стягивается к точке  $A_*$  (что соответствует касанию кривой  $\Gamma$  с орбитой Луны на рис. 7.2), а при  $u \rightarrow \beta_0$  он увеличивается до полной  $\varphi_0$ -параллели, так что концы его сходятся к точке  $A^*$ , противоположной точке  $A_*$  (рис. 7.6).

Когда аргумент широты  $u$  заключен в интервале  $\beta_0 < u < \pi - \beta_0$ , то *и-круг* дважды пересекает  $\varphi_0$ -параллель, каково бы ни было положение  $\Omega$  линии узлов, т. е. каково бы ни было положение упрежденной точки. Стартовый интервал занимает всю параллель.

Когда становится справедливым неравенство  $\pi - \beta_0 < u < \pi - \alpha_0$ , то на  $\varphi_0$ -параллели по обе стороны от точки  $A^*$  появляется запретный интервал, на котором не мо-

гут находиться начальные точки при углах  $\Omega$ , достаточно близких к  $90^\circ$ . При  $u \rightarrow \pi - \beta_0$  этот интервал стягивается к точке  $A^*$ , при  $u \rightarrow \pi - \alpha_0$  он увеличивается до полной параллели, так что концы его сходятся в точке  $A_*$ . Соответственно стартовый интервал уменьшается от полной параллели до нуля.

Наконец, при  $u > \pi - \alpha_0$  на параллели уже не существует точек пересечения с  $u$ -кругом, и нет никакого стартового интервала.

### § 7.2. Характеристики траекторий попадания в Луну с заданной широты

Как отмечалось в § 7.1, попадание в Луну при  $u > \alpha_0$  практически возможно лишь тогда, когда поражаемый интервал на орбите Луны настолько велик, что упрежденная точка проходит его по крайней мере за одни звездные сутки. Очевидно, в этом случае в сидерическом месяце всегда найдутся такие сутки, в течение которых точка старта в суточном движении пройдет через одну или две общие точки  $\varphi_0$ -параллели и  $u$ -круга, и будет возможно попадание с заданными начальными данными  $r_1, V_1, \theta_1$ . Если же упрежденная точка проходит поражаемый интервал на орбите Луны за двое суток, то в каждые из этих суток найдется момент, в который точка старта проходит через общую точку  $\varphi_0$ -параллели и  $u$ -круга, и возможно попадание, и т. д. Наконец, при  $\Phi_1 \rightarrow \pi_1 - \beta_0$  поражаемый и стартовый интервалы достигают  $360^\circ$  каждый, и попадание возможно каждые сутки.

Из схемы на рис. 7.7 видно, как при значениях  $\alpha_0 < u < \beta_0$  на неподвижном в пространстве  $xuz$  стартовом интервале, принадлежащем  $\varphi_0$ -параллели, возникают и движутся точки, общие с  $u$ -кругом. Для угла  $\Omega = -90^\circ$  при  $\alpha_0 < u < \beta_0$  таких точек, очевидно, нет. Но с увеличением угла  $\Omega$  до некоторого значения  $\Omega = \Omega_*$  рассматриваемый  $u$ -круг коснется  $\varphi_0$ -параллели в некоторой точке  $A_*$  (рис. 7.7). Для значений  $\Omega$ , находящихся внутри диапазона  $\Omega_* < \Omega < \Omega''$ , будут уже две точки  $A'_1$  и  $A''_1$  пересечения рассматриваемого  $u$ -круга с  $\varphi_0$ -параллелью. При этом для малых значений  $(\Omega - \Omega_*) > 0$  точки пересечения  $A'_1$  и  $A''_1$  будут находиться на  $u$ -круге по разные

стороны от точки  $A'_*$ , а затем с дальнейшим увеличением угла  $\Omega$  подвижная точка  $A'_1$  в положении  $A'_K$  изменит направление своего движения на обратное, т. е. начнет перемещаться в ту же сторону, что и точка  $A''_1$ , так что при  $\Omega = 90^\circ$  они будут находиться по одну сторону от точки  $A'_*$  (рис. 7.7).

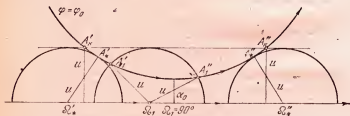


Рис. 7.7. Схема крайних и промежуточных положений  $u$ -круга, равных угловых дальностей полета относительно  $\varphi_0$ -параллели.

С возрастанием угла  $\Omega$  от  $\Omega_*$  расстояние между точками  $A'_1$  и  $A''_1$  монотонно увеличивается, достигая максимума при  $\Omega = 90^\circ$ , а затем монотонно убывает, пока при  $\Omega = \Omega_*$  не сократится до нуля в точке  $A'_*$ , симметричной точке  $A'_1$  относительно меридиана, для которого угол  $\Omega = 90^\circ$ . При этом точка  $A'_1$  перед слиянием с точкой  $A'_*$  меняет в точке  $A'_K$  направление своего движения на обратное, аналогично движению точки  $A'_1$  вблизи точки  $A'_K$ . Крайние точки стартового интервала  $A'_K A''_K$  являются точками пересечения  $\varphi_0$ -параллели с малым кругом, параллельным основной плоскости и постоянно касающимся  $u$ -круга (горизонтальная прямая на схеме рис. 7.7).

Расчет движения точек  $A'_1$  и  $A''_1$  при увеличении угла  $\Omega$  несложен. Из прямоугольного сферического треугольника  $P\Omega y$ , в котором вершина  $P$  есть полюс, а стороны  $Py = 90^\circ - i_L$  и  $\Omega y = 90^\circ - \Omega$  (рис. 7.8), находим:

$$\sin \lambda_\Omega = -\frac{\cos \Omega}{\sin m}, \quad \cos \lambda_\Omega = \frac{\sin \Omega - \sin i_L \cos m}{\cos i_L \sin m}, \quad (2.1)$$

где  $\lambda_\Omega$  — угловое расстояние между меридианами оси  $y$

и линии узла  $\Omega$ ; направления  $PA'_1$  и  $PA''_1$  симметричны относительно дуги большого круга  $Pu$  и образуют с ней углы  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Чтобы определить аналогичные  $\lambda_\Omega$  долготы  $\lambda'$  и  $\lambda''$  точек  $A'_1$  и  $A''_1$ , а также угол  $\sigma$ , выразим сторону  $m = P\Omega$  треугольника  $P\Omega u$ :

$$\cos m = \sin i_L \sin \Omega. \quad (2.2)$$

Теперь из треугольника  $A'_1P\Omega$  по теореме косинусов

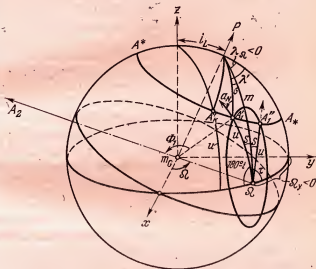


Рис. 7.8. Геоцентрические сферические углы для расчета параметров траектории полета к Луне.

находим угол  $\sigma$  (в I или II четверти) и углы  $\lambda'$  и  $\lambda''$ :

$$\cos \sigma = \frac{\cos u - \cos m \sin \varphi_0}{\sin m \cos \varphi_0}, \quad \lambda' = \lambda_\Omega - \sigma, \quad \lambda'' = \lambda_\Omega + \sigma. \quad (2.3)$$

Величина  $\Delta\lambda_{\text{мс}} = \lambda'' - \lambda' = 2\sigma$  есть межстартовая долгота (угловое расстояние между меридианами точек  $A'_1$  и  $A''_1$ ).

Зависимости  $\lambda'$  и  $\lambda''$  от  $\Omega$ , вычисленные для случая, когда  $\Phi_1 = 150^\circ$ , т. е.  $u = 30^\circ$ , представлены на рис. 7.9 двумя кривыми  $M_1N_1$ . По величине  $\Delta\lambda_{\text{мс}}(\Omega)$  можно полу-

чить представление о межстартовом времени, т. е. о времени, в течение которого точка старта проходит в суточном движении интервал  $A_1' A_1''$ .

Для получения межстартового времени в часах достаточно разделить  $\Delta\lambda_{\text{мс}}$  на  $15^\circ$  (без учета изменения  $\Omega$

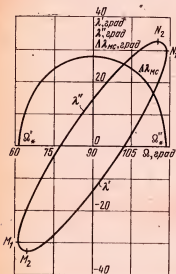


Рис. 7.9. Изменение границ  $\lambda'$  и  $\lambda''$  стартового интервала и угловой величины  $\Delta\lambda_{\text{мс}}$  межстартового интервала с изменением долготы узла  $\Omega$  траектории при фиксированной угловой дальности полета  $\Phi_1 = 150^\circ$ .

Для расчета поражаемого интервала при различных угловых дальностях полета  $\Phi_1$  из условия касания (в точке  $A_1'$  на рис. 7.7) имеем:

$$\sigma = 0, m = 90^\circ + u - \varphi_0;$$

тогда из (2.2) получаем:

$$\sin \Omega_*' = \frac{\sin (\varphi_0 - u)}{\sin i_L}, \quad \Delta\Omega = 2\left(\frac{\pi}{2} - \Omega_*'\right), \quad (2.4)$$

где  $\Delta\Omega$  — величина поражаемого интервала.

во времени). Учет зависимости  $\Omega(t)$  изменит межстартовое время на величину порядка отношения суток к месяцу, т. е. на 4% для значений  $\Omega_*$  не близких к  $\Omega_*^1$  и  $\Omega_*''$  (вблизи этих значений изменения могут быть больше, как видно из рис. 7.7).

Диапазон  $(\Omega_*', \Omega_*'')$  между абсциссами точек  $M_1$  и  $N_1$  есть величина поражаемого интервала, а диапазон  $(\lambda'_N, \lambda''_N)$  между ординатами точек  $M_2$  и  $N_2$ , т. е. между экстремальными значениями функций  $\lambda'(\Omega)$  и  $\lambda''(\Omega)$ , — величина стартового интервала. Интервал между ординатами точек  $M_1$  и  $N_1$  составляет основную часть стартового интервала. Внутри этого интервала точки  $A_1'$  и  $A_1''$  с изменением  $\Omega$  движутся в одном направлении, а вне его — в разных направлениях.

Для расчета величины стартового интервала  $\Delta\lambda_0$  как функции  $\Phi_1$  найдем угол  $\lambda'_K = \lambda(A'_K)$ . Когда точка  $A'_1$  совпадает с точкой  $A_K$ , то стороны сферического треугольника  $A'_K z P$  (рис. 7.8)

$$zA'_K = 90^\circ - u, \quad zP = i_L, \quad PA'_K = 90^\circ - \varphi_0.$$

Поэтому

$$\lambda'_K = 180^\circ - \angle A'_K P z,$$

и по теореме косинусов имеем:

$$\cos \lambda'_K = \frac{\cos i_L \sin \varphi_0 - \sin u}{\sin i_L \cos \varphi_0}, \quad \Delta\lambda_0 = 2\lambda'_K. \quad (2.5)$$

Приведем формулу для расчета максимальной величины  $(\Delta\lambda_{mc})_{\max}$  межстартового интервала. Она достигается при  $\Omega_0 = 90^\circ$ . Тогда  $\lambda_{\Omega_0} = 0$ ,  $m = 90^\circ - i_L$ , и из (2.3)

$$\cos \sigma_{\max} = \frac{\cos u - \sin i_L \sin \varphi_0}{\cos i_L \cos \varphi_0}, \quad (2.6)$$

$$(\Delta\lambda_{mc})_{\max} = 2\sigma_{\max}. \quad (2.7)$$

Этот угол, как и угол  $\Delta\lambda_0$ , можно измерять не только в градусах, но и в часах. Аналогично поражаемый интервал можно измерять не только в градусах, но и в сутках. В таких мерах и приведены дополнительные шкалы на рис. 7.10, где представлены функции  $\Delta\Omega_0$ ,  $\Delta\lambda_0$ ,  $(\Delta\lambda_{mc})_{\max}$  для значений  $\Phi_1$  угловой дальности пассивного участка из диапазона  $\Phi^* = \pi - \beta_0 < \Phi_1 < \pi - \alpha_0 = \Phi_*$  ( $\Phi_1 = \pi - u$ ), соответствующего изменению углов  $\Delta\Omega_0$  и  $\Delta\lambda_0$  от нуля до  $360^\circ$ . Значения функций для диапазона  $\alpha_0 < \Phi_1 < \beta_0$  получаются из функций, представленных на рис. 7.10, зеркальным отображением их относительно прямой  $\Phi_1 = 90^\circ$ . Для диапазона  $\beta_0 < \Phi_1 < \pi - \beta_0$  имеем  $\Delta\Omega_0 = \Delta\lambda_0 = 360^\circ$ . С уменьшением угла  $\Phi_1$  оба интервала (межстартовый и поражаемый) суживаются, при  $\Phi_1 = \alpha_0$  они вырождаются в точки и при  $\Phi_1 < \alpha_0$  отсутствуют.

Заметим, что все рассматриваемые кривые при  $\Phi_1 = 180^\circ - \alpha_0$  имеют вертикальные касательные. Это означает, что возможности достижения Луны, появляющиеся при  $\Phi_1 - \Phi_{\max} = 180^\circ - \alpha_0$ , быстро возрастают с убыванием  $\Phi_1 = \pi - u$ . Например, для средних широт имеем  $\Phi_{\max} \approx 150^\circ$ ; при уменьшении значения  $\Phi_1$  от  $\Phi_{\max}$  всего

лишь на  $2^\circ$  появляется уже несколько суток в месяце для попадания в Луну при фиксированных значениях  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$ . Такое уменьшение величины  $\Phi_1$  может быть достигнуто, как следует из рис. 7.4, увеличением скорости  $V_1$  примерно на 100 м/с или увеличением угла  $\theta_1$  наклона вектора начальной скорости к местному горизонту примерно

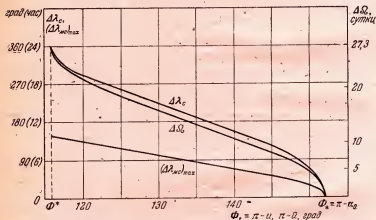


Рис. 7.10. Изменение величины начального интервала  $\Delta\lambda_c$ , максимального межстартового интервала  $(\Delta\lambda_{мс})_{\max}$  и поражаемого интервала  $\Delta\Omega$  с изменением угловой дальности полета  $\Phi_1$  (или ее дополнения  $\pi - \Phi_1$  до  $360^\circ$ ).

на  $1^\circ, 5$ . Эти изменения невелики по сравнению с номинальными значениями  $V_1$  и  $\theta_1$ , которые необходимо иметь для того, чтобы достижение Луны со средних широт вообще стало возможным.

Определим, наконец, азимуты и наклонения для точек  $A'_1$  и  $A''_1$ . Пусть азимут  $a_N$  (рис. 7.8) отсчитывается от направления на север по часовой стрелке, тогда азимут  $a''_N = a_N$ ,  $a'_N = -a_N < 0$ . Из сферического треугольника  $A'_1 P \Omega$  получаем соответственно по теоремам косинусов и синусов:

$$\cos |a_N| = - \frac{\cos m - \sin \varphi_0 \cos u}{\cos \varphi_0 \sin u}, \quad (2.8)$$

$$\sin |a_N| = \frac{\sin m \sin \sigma}{\sin u}. \quad (2.9)$$



Найдем максимальное значение угла  $|a_N(\Omega)|$ . Дифференцируя равенство (2.8) и используя соотношение (2.2), получаем:

$$\frac{d|a_N|}{d\Omega} = \frac{\sin i_L \cos \Omega}{\sin |a_N| \cos \varphi_0 \sin u},$$

откуда следует, что  $\max |a_N|$  достигается при  $\Omega = 90^\circ$ . Его вычисление производится по формуле

$$\cos (a_N)_{\max} = \frac{-\sin i_L + \cos u \sin \varphi_0}{\sin u \cos \varphi_0}. \quad (2.10)$$

Функции  $a'_N(\Omega)$  и  $a''_N(\Omega)$  при  $\Phi_1 = 150^\circ$  графически представлены на рис. 7.11. Изменение максимального азимута в зависимости от угла  $\Phi_1 = \pi - u$  представлено на рис. 7.12. Для средних широт азимут  $(a_N)_{\max}(\Phi^*)$  близок к  $90^\circ$  ( $\Phi^* = \pi - \beta_0$ ).

Для определения наклона  $i$  плоскости траектории полета к плоскости орбиты Луны сначала найдем из прямоугольного сферического треугольника  $yP\Omega$  величину  $\tau$  угла  $y\Omega P$  (рис. 7.8) по теоремам синусов и косинусов

$$\begin{aligned} \sin \tau &= \frac{\cos i_L}{\sin m}, \\ \cos \tau &= \frac{\sin i_L - \cos m \sin i \Omega}{\sin m \cos \Omega}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

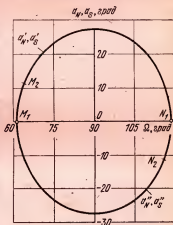


Рис. 7.11. Пример зависимости азимута старта от долготы угла  $\Omega$  при фиксированной угловой дальности полета  $\Phi_1 = 150^\circ$ .

Далее, из сферического треугольника  $A'_1 P \Omega$  определим величину  $s$  угла  $P\Omega A'_1$ :

$$\sin s = \frac{\sin a_N \cos \varphi_0}{\sin m}, \quad \cos s = \frac{\sin \varphi_0 - \cos u \cos m}{\sin u \sin m}. \quad (2.12)$$

Теперь для точек  $A'_1$  и  $A''_1$  имеем соответственно:

$$i'_N = \tau + s, \quad i''_N = \tau - s. \quad (2.13)$$

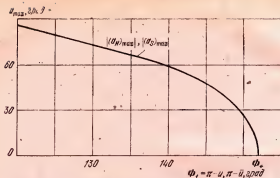


Рис. 7.12. Зависимость максимального азимута старта от угловой дальности полета  $\Phi_1$  (или от ее дополнения  $\pi - \alpha$  до  $360^\circ$ ).

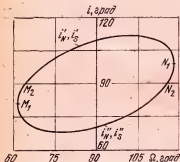


Рис. 7.13. Пример зависимости наклона  $i$  плоскости траектории полета к плоскости лунной орбиты от долготы узла  $\Omega$  при фиксированной угловой дальности полета  $\Phi_1 = 150^\circ$ .

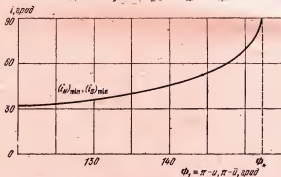


Рис. 7.14. Зависимость минимальных значений наклона плоскости траектории полета к плоскости лунной орбиты от угловой дальности полета  $\Phi_1$  (или от ее дополнения  $\pi - \alpha$  до  $360^\circ$ ).

Экстремум величины наклона достигается, очевидно, при тех значениях  $\Omega$ , при которых точки  $A'_1$  и  $A''_1$  проходят через точку  $A_*$  (рис 7.8). Тогда имеем:

$$\sin (i_N)_{\min} = \frac{\sin (\varphi_0 - i_L)}{\sin u}. \quad (2.14)$$

На рис. 7.13 показано изменение наклонов  $i'_N$  и  $i''_N$  в зависимости от долготы узла  $\Omega$ . На рис. 7.11 и 7.13 точки  $M_1, N_1, M_2, N_2$  имеют тот же смысл, что и на рис. 7.9.

Кривая зависимости минимальных наклонов  $(i_N)_{\min}$  от угловой дальности пассивного участка  $\Phi_1 = \pi - u$  представлена на рис. 7.14.

### § 7.3. Учет протяженности активного участка

Назовем активной угловой дальностью  $\Phi_*$  геоцентрический угол между радиусами начальной и конечной точек активного участка. Очевидно, при фиксированных значениях азимута стрельбы и вектора  $V_1$  начальной скорости пассивного участка, заданного модулем и углом  $\theta_1$  возвышения над местным горизонтом, программа по углу тангажа и вид активного участка однозначно определяются условием оптимальности выведения, т. е. максимальной выводимости на орбиту полезного веса. Соответственно однозначно определяются высота конца активного участка и активная угловая дальность полета как функции величины начальной скорости и угла ее возвышения.

На абсолютную геоцентрическую скорость в конце активного участка несколько влияет начальная скорость, т. е. скорость, которую ракета имела в точке старта, вращаясь в суточном движении вместе с земной поверхностью. При азимуте стрельбы, отличающемся от точно восточного или точно западного, КА вследствие наличия этой скорости будет выходить из плоскости, проходящей через начальный и конечный геоцентрические радиусы активного участка. При неизменных программах по тяге и по углу тангажа длина и высота активного участка выведения КА на заданные значения  $V_1$  и  $\theta_1$  будут, очевидно, зависеть от величины и направления проекции вектора начальной скорости на плоскость, проходящую через па-

чальный и конечный радиусы, т. е. от широты точки старта и азимута стрельбы.

Однако в настоящем рассмотрении, учитывая малость начальной скорости по сравнению с полной характеристической скоростью, сообщаемой двигателями КА, примем, что при заданных модуле  $|V_1|$  начальной скорости и величине ее угла  $\theta_1$  с горизонтом активный участок имеет

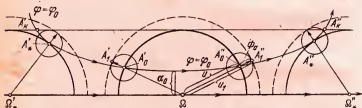


Рис. 7.15. Схема внутреннего касания  $\Phi_a$ -круга и  $u_1$ -круга при  $u_1 - \Phi_a > \alpha_0$  для различных последовательных положений  $\Omega_0$  упрежденной точки.

в абсолютном пространстве одну и ту же протяженность  $\Phi_a$  (независимо от азимута) и что проекция вектора конечной скорости на горизонтальную плоскость направлена по дуге большого круга, соединяющего точку старта с проекцией конца активного участка на сферическую поверхность Земли. Тогда можно считать, что вращающаяся вместе с Землей по  $\varphi_0$ -параллели точка старта является центром  $\Phi_a$ -круга на Земле, т. е. центром окружности заданного углового радиуса  $\Phi_a$ , над любой точкой которой на заданной высоте  $H_1$  и под заданным углом  $\theta_1$  к местному горизонту в любой момент времени может быть получена заданная величина скорости  $V_1$ .

Пассивная угловая дальность, т. е. геоцентрический угол между начальной и конечной точками пассивного участка траектории, величинами  $H_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$  по-прежнему определяется однозначно. Следовательно, пассивные участки попадающих траекторий с параметрами  $H_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$  по-прежнему начинаются на круге радиуса  $u_1 = \pi - \Phi_1$  с центром в точке  $\Omega$ . Для осуществления попадания, очевидно, необходимо, чтобы конец  $A_1$  активного участка (рис. 7.15) находился на  $u_1$ -круге и чтобы радиус  $\Phi_a$ -круга принадлежал плоскости, проходящей через линию уз-

лов и точку  $A_1$ , т. е. продолжал бы радиус  $u$ -круга. Последнее условие означает, что  $u_1$ -круг и  $\Phi_a$ -круг должны внутренним образом касаться друг друга в точке  $A_1$ , и что полная угловая дальность  $\Phi$ , отсчитываемая от точки старта, выражается суммой  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_a$ . Соответственно имеем

$$u_1 = u + \Phi_a, \text{ где } u = 180^\circ - \Phi.$$

Рассмотрим условия, при которых возможно касание круга радиуса  $u_1$  с центром, движущимся равномерно по

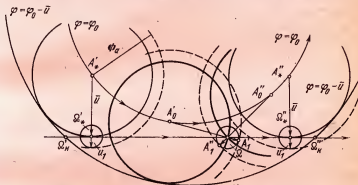


Рис. 7.16. Схема внутреннего касания  $\Phi_a$ -круга и  $u_1$ -круга при  $\Phi_a - u_1 > \alpha_0$  для различных последовательных положений  $O_a$  упрежденной точки.

большому кругу в основной плоскости  $xu$ , и круга радиуса  $\Phi_a$  с центром, движущимся равномерно по заданной  $\varphi_0$ -параллели. Нетрудно видеть, что поскольку минимальное расстояние между центрами кругов  $\alpha_0 = \varphi_0 - i_L \neq 0$ , то возможны лишь два различных случая внутреннего касания: случай I, когда  $u_1 - \Phi_a > \alpha_0$ , и случай II, когда  $\Phi_a - u_1 > \alpha_0$  (рис. 7.15 и 7.16).

Для реализации случая I разность  $u_1 - \Phi_a$  должна быть достаточно велика (так как  $u_1 - \Phi_a \geq \alpha_0$ ). Если для достижения Луны при отсутствии активного участка необходимо было условие  $\Phi_1 \leq \pi - \alpha_0$ , то с учетом длины  $\Phi_a$  активного участка аналогичным условием должно быть  $\Phi_1 \leq \pi - \alpha_0 - \Phi_a$ . Это значит, что наличие длинного активного участка усложняет достижение Луны, приводя к замене прежнего крайнего значения  $\Phi_1$  меньшим значе-

нием  $\Phi_1 - \Phi_a$ , и что в случае I для увеличения возможностей попадания в Луну желательно уменьшать не только пассивную, но и активную угловую дальность.

Ограничения по времени старта определяются, как и ранее, величиной аргумента  $u$  широты начальной точки  $A_0$  (рис. 7.15) и поэтому характеризуются прежними зависимостями величин  $\Delta\lambda_c$ ,  $\Delta\Omega$ ,  $(\Delta\lambda_{mc})_{\max}$  от параметра  $u$ , или от полной угловой дальности  $\Phi = \pi - u$  (рис. 7.10) (хотя соответствующие зависимости этих же величин от параметров  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta_1$  будут иными). Аналогично сохраняются зависимости максимальных значений азимута и наклона от величины  $\pi - u$  (рис. 7.12 и 7.14).

Для реализации случая II, очевидно, необходимо, чтобы стало  $\Phi_a - u_1 \geq \alpha_0$ , т. е. активная угловая дальность должна быть достаточно велика и, по крайней мере, должна превосходить значение  $\alpha_0 = \varphi_0 - i_L$  (рис. 7.16). Это значит, что для увеличения возможностей попадания в Луну в случае II желательно увеличивать активную и пассивную угловые дальности. Следовательно, желательно не увеличивать, а уменьшать начальную скорость до минимальной, а угол  $\theta_1$  ее наклона к горизонту желательно уменьшать до нуля (при этом угол  $\Phi_1$  растет до  $180^\circ$ , а угол  $u_1$  убывает до нуля). Совокупность направлений запуска является северной в случае II и в целом противоположна совокупности направлений в случае I: последняя является южной. Поэтому случаи I и II можно обозначать буквами S и N.

Что касается ограничений по времени старта, то аналогично тому, как в случае I они определялись  $u$ -кругом, так и в случае II они определяются кругом радиуса  $u = \Phi_a - u_1$  (кратко  $u$ -кругом). Согласно рис. 7.16 полная угловая дальность складывается из угла  $\pi$  (под плоскостью лунной орбиты) и угла  $u$  (над плоскостью лунной орбиты):  $\Phi = \pi + u = \pi - u_1 + \Phi_a = \Phi_1 + \Phi_a$ , т. е. выражается прежней формулой через  $\Phi_a$  и  $\Phi_1$ . При этом по-прежнему зависимость пассивной угловой дальности  $\Phi_1 = \pi - u_1$  от  $\theta_1$  и  $\beta_1$  характеризуется рис. 7.4.

Заметим, что в случае II границы стартового интервала (но не поражаемого) определяются условием касания  $u$ -круга (рис. 7.16) с основной плоскостью. Границы же поражаемого интервала определяются здесь крайними точ-

ками  $\Omega'_K$  и  $\Omega''_K$ , являющимися точками пересечения ( $\varphi_0 - u$ )-параллели с основной плоскостью. Таким образом, если в случае I (рис. 7.15) точки касания  $A'_*$  и  $A''_*$  определяют границы  $\Omega'_*$  и  $\Omega''_*$  поражаемого интервала, а крайние точки  $A'_K$  и  $A''_K$  — границы стартового интервала, то в случае II (рис. 7.16) имеет место следующая зависимость: точки касания  $\Omega'_*$  и  $\Omega''_*$  определяют границы  $A'_*$  и  $A''_*$  стартового интервала, а крайние точки  $\Omega'_K$  и  $\Omega''_K$  являются границами поражаемого интервала.

Аналогично случаю I в случае II выход КА на пассивный участок должен производиться в тот момент, когда  $\Phi_A$ -круг в своем суточном движении по  $\varphi_0$ -параллели коснется  $u_1$ -круга с центром в точке  $\Omega_0$ , который движется примерно в 27 раз медленнее (рис. 7.16). При этом аналогично случаю I, если точка  $A_0$  не совпадает с точками  $A'_*$  или  $A''_*$ , то существует два момента времени, в которые возможно касание: первый отвечает юго-восточному направлению запуска (точка  $A'_0$  на рис. 7.16), а второй — юго-западному (точка  $A''_0$ ). Назовем временной интервал  $\Delta\lambda_{мс}$  между этими моментами межстартовым, по аналогии со случаем I, и максимум его, достигающийся при  $\Omega_0 = 0$ , обозначим  $(\Delta\lambda_{мс})_{\max}$ .

Рассмотрим при  $\bar{u} = \text{const}$  характеристики случая II, аналогичные характеристикам случая I при  $u = \text{const}$ , обозначив символами  $\Omega'_0$  и  $\Omega''_0$  упрежденные положения линии узлов, при которых возможно попадание в Луну из точки старта  $A_0$  (рис. 7.17), определяемой полярным углом  $\lambda$ , отсчитываемым от меридиана точки  $A_*$ .

Для определения углов  $\Omega'_0$  и  $\Omega''_0$  найдем из сферического треугольника  $zPA_0$  сторону  $zA_0 = m$  и угол  $A_0zP = \tau$  (по теоремам косинусов и синусов):

$$\cos \bar{m} = \cos i_L \sin \varphi_0 - \sin i_L \cos \varphi_0 \cos \lambda, \quad (3.1)$$

$$\sin \bar{\tau} = \cos \varphi_0 \frac{\sin \lambda}{\sin \bar{m}}, \quad \cos \bar{\tau} = \frac{\sin \varphi_0 - \cos i_L \cos \bar{m}}{\sin i_L \sin m}. \quad (3.2)$$

Затем из треугольника  $zA_0\Omega''_0$  со стороной  $z\Omega''_0 = 90^\circ$  находим угол  $\Omega''_0 zA_0 = s$  по теореме косинусов:

$$\cos \bar{s} = \frac{\cos \bar{u}}{\sin m}, \quad s - \text{ в I, II четверти} \quad (3.3)$$





Тогда азимуты  $a_*$ , отсчитываемые от направления на юг против часовой стрелки, выразятся разностями

$$a'_S = a_* + \bar{\sigma}, \quad a''_S = a_* - \bar{\sigma}, \quad (3.7)$$

а обычные азимуты (отсчитываемые от направления на север по часовой стрелке) —

$$a'_N = \pi - a'_S, \quad a''_N = \pi - a''_S. \quad (3.8)$$

Для наклонения из прямоугольного треугольника  $\triangle A_0 B$  находим (рис. 7.17)  $i'_S$  во II четверти,  $i''_S$  в I четверти по

$$\sin i'_S = \sin i''_S = \frac{\cos \bar{m}}{\sin \bar{u}}, \quad i' = -i''_S, \quad i'' = -i'_S. \quad (3.9)$$

Результаты расчета при  $\bar{u} = 30^\circ$  функций  $\lambda'(\varnothing)$ ,  $\lambda''(\varnothing)$ , обратных функций  $\varnothing'(\lambda)$  и  $\varnothing''(\lambda)$ , а также межстартового интервала  $\Delta\lambda_{mc}$  представлены на рис. 7.9. Оказывается, эти зависимости в I и II случаях совпадают (отличие случая II от случая I состоит лишь в том, что кривые  $\lambda'(\varnothing)$ ,  $\lambda''(\varnothing)$  начинаются не в точках  $M_1$  и  $N_1$ , где касательные вертикальны, а в точках  $M_2$  и  $N_2$ , где касательные горизонтальны). Этого следовало ожидать, так как при  $\bar{u} = u$  окружность, по которой двигался определяющий  $u$ -круг, и окружность, на которой рассматривались точки пересечения, поменялись ролями. Ясно, что при  $\bar{u} = u$  соответствующие значения  $\lambda$  и  $\varnothing$  из диапазона между точками касания в I и II случаях должны совпадать.

Перемещение концов изображающих кривых из  $M_1$  и  $N_1$  в  $M_2$  и  $N_2$  (рис. 7.9, 7.11 и 7.13) объясняется тем, что в случае II попадание в Луну из точек типа  $A'_0$ , лежащих внутри стартового интервала (рис. 7.16), становится возможным ранее, чем узел  $\varnothing_0$  войдет в определяемый условием касания интервал  $(\varnothing''_*, \varnothing'_*)$ , и попадание останется возможным из точек типа  $A''_0$  еще в течение некоторого времени после того, как узел выйдет из этого интервала. В случае II межстартовый интервал определен только внутри интервала  $(\varnothing''_*, \varnothing'_*)$ , т. е. только между абсциссами точек  $M_2$  и  $N_2$ : он начинается и кончается уже не нулем, а положительной константой  $\Delta\lambda_{mc}(M_2) = \Delta\lambda_{mc}(N_2)$  (рис. 7.9).

Аналогично функциям  $\lambda'(\varnothing)$  и  $\lambda''(\varnothing)$  азимуты  $a_S(\varnothing)$  и наклоны  $i_S(\varnothing)$  изображаются теми же кривыми, что и в случае I, только теперь кривые ограничиваются точками  $M_2$  и  $N_2$ , а не точками  $M_1$  и  $N_1$ .

Рассчитаем, наконец, диапазоны основных характеристик случая II в зависимости от величины аргумента широты  $\bar{u}$  начальной точки. На основании предыдущего следует ожидать, что характеристики случая II должны изображаться теми же кривыми, что и в случае I, только с аргументом  $\bar{u}$  вместо  $u$ . Действительно, для величины стартового интервала из условия касания  $u$ -круга с основной плоскостью имеем:  $m = 90^\circ - \bar{u}$ , так что (рис. 7.17)

$$\cos \lambda_* = \frac{\cos i_L \sin \varphi_0 - \sin \bar{u}}{\sin i_L \cos \varphi_0}, \quad \Delta \lambda_c = 2\lambda_*, \quad (3.10)$$

что совпадает с (2.5) при  $\bar{u} = u$ .

Наибольший межстартовый интервал по-прежнему соответствует значению  $\varnothing_0 = 90^\circ$  и может быть найден из сферического треугольника  $A_{\text{ом}}Py$  со сторонами  $Py = 90^\circ - i_L$ ,  $PA_{\text{ом}} = 90^\circ - \varphi_0$ ,  $A_{\text{ом}}y = \bar{u}$  (рис. 7.17) по теореме косинусов:

$$\cos \lambda''|_{\varnothing_0=90^\circ} = \frac{\cos \bar{u} - \sin \varphi_0 \sin i_L}{\cos \varphi_0 \cos i_L}, \quad (\Delta \lambda_{\text{мс}})_{\text{max}} = 2\lambda''|_{\varnothing_0=90^\circ}, \quad (3.11)$$

что совпадает с (2.6) и (2.7) при  $\bar{u} = u$ .

Определим теперь границы поражаемого интервала по точкам  $\varnothing'_K$  и  $\varnothing''_K$  пересечения  $(\varphi_0 - \bar{u})$ -параллели с основной плоскостью. Из сферического треугольника  $\varnothing''_K zP$  (рис. 7.17) со сторонами  $z\varnothing''_K = 90^\circ$ ,  $zP = i_L$ ,  $P\varnothing''_K = 90^\circ - (\varphi_0 - \bar{u})$  по теореме косинусов для стороны  $P\varnothing''_K$  имеем:

$$\sin \varnothing''_K = \frac{\sin(\varphi_0 - \bar{u})}{\sin i_L}, \quad \Delta \varnothing = 2\left(\frac{\pi}{2} - \varnothing''_K\right), \quad (3.12)$$

что совпадает с (2.4) при  $\bar{u} = u$ .

Функции  $\Delta \varnothing(\bar{u})$ ,  $\Delta \lambda_c(\bar{u})$  и  $(\Delta \lambda_{\text{мс}})_{\text{max}}(\bar{u})$  представлены на рис. 7.10.

Так как азимут по-прежнему достигает экстремума при  $\Omega = 90^\circ$ , то из треугольника  $A_{\text{ом}}Py$  находим:

$$\cos(a_s)_{\max} = \frac{-\sin i_L + \sin \varphi_0 \cos \bar{u}}{\cos \varphi_0 \sin \bar{u}}, \quad (3.13)$$

и в силу (2.10) получим  $|a_{s \max}| = |a_{N \max}|$  (рис. 7.12), что следует и из равенства модулей вертикальных углов  $a_N$  (рис. 7.8) и  $a_s$  (рис. 7.17) при  $\bar{u} = u$ .

Наконец, для определения экстремумов наклонения имеем, как и в случае I:

$$\sin(i_s)_{\min} = \sin(i_s)_{\max} = \frac{\sin(\varphi_0 - i_L)}{\sin \bar{u}}, \quad (3.14)$$

что совпадает с (2.14) при  $\bar{u} = u$  (рис. 7.14).

Таким образом, зависимости рассмотренных характеристик от аргумента широты  $u$  (или  $\bar{u}$ ) являются более универсальными, чем зависимости от полной угловой дальности  $\Phi$ . Универсальны они в том смысле, что пригодны при любых значениях активной угловой дальности  $\Phi_a$ , причем как в случае I, так и в случае II. Траектории случаев I и II соответственно можно называть *северными* ( $N$ ) и *южными* ( $S$ ) (согласно определению в начале гл. 7).

## Глава 8

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДОСТИЖЕНИЯ ЛУНЫ С ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

#### § 8.1. Определение энергетических затрат, необходимых для реализации заданных начальных данных

Под заданными начальными данными будем понимать определенные комбинации направления начальной скорости и отношения ее величины к величине местной параболической скорости при заданном азимуте траектории. Энергетические затраты будем измерять величиной  $W$  характеристической скорости КА, т. е. скорости, которую приобрел бы он с теми же затратами топлива при отсутствии внешних сил в прямолинейном движении. Вместо отношения начальной скорости к местной параболической будем задавать квадрат этого отношения, обозначив его через  $\beta_1$ . Направление начальной скорости на пассивном участке траектории по-прежнему будем задавать углом  $\theta_1$  возвышения вектора скорости над местным горизонтом. Азимут направления начальной скорости будем считать фиксированным. Программа выведения КА на траекторию с заданными значениями величин  $\theta_1$  и  $\beta_1$  будет фиксированной, если она имеет всего два свободных параметра, и может быть различной, если она является многопараметрической. Свободными параметрами  $q_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) могут быть, например, точки разбиения активного участка на части, на которых постоянны величина тяги или скорость изменения угла тангажа. Последние две величины также могут быть свободными параметрами программы выведения.

В случае многопараметрической программы можно ограничиться рассмотрением лишь оптимальных комби-

наций параметров, т. е. комбинаций таких активных участков, для которых конечная характеристическая скорость  $W$  минимальна при заданных значениях величин  $\theta_1$  и  $\beta_1$ . Выделить оптимальные комбинации можно, например, методом огибающих. Действительно, зафиксировав какое-либо значение  $\beta_1$  и все свободные параметры, кроме  $q_0$ , построим на плоскости  $\theta_1 W$  кривую  $W(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$ .

Меняя значение еще одного из параметров, например,  $q_1$ , получим семейство таких кривых  $W|_{\beta_1=\text{const}, q_1=\text{const}}$ , имеющее огибающую  $W(\theta_1)_{\beta_1=\text{const}}$  (существование огибающей следует из энергетических соображений).

Меняя теперь другой свободный параметр  $q_2$  и строя указанным выше способом огибающие  $W(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$  на одном и том же чертеже, можно затем построить огибающую этих огибающих. Тем самым параметр  $q_2$ , так же как ранее параметр  $q_1$ , исключается. Аналогично можно избавиться и от большего числа параметров (проделав достаточно большую графическую работу).

Из энергетических соображений следует, что величина  $W$  минимальных затрат будет возрастать с ростом  $\beta_1$  при  $\theta_1 = \text{const}$  и с ростом  $\theta_1$  ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ) при  $\beta_1 = \text{const}$ . Соединим на плоскости  $\theta_1, \beta_1$  точки с одинаковыми минимальными энергетическими затратами  $W$  (рис. 8.1). Получим кривые оптимальных комбинаций  $\theta_1, \beta_1$ . Точки каждой кривой при любом значении абсциссы отвечают минимальным затратам  $W$ , необходимым для достижения ординаты  $\beta_1$ .

Строя кривые  $\beta_1(\theta_1)|_{W=\text{const}}$  для серии различных значений  $W$ , получим семейство оптимальных кривых  $W = W(\theta_1, \beta_1)$ , представляющее собой функцию двух переменных и изображенное на рис. 8.1 для  $1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 + 3\varepsilon$  (величина  $\varepsilon \approx 0,02$  является малой порядка  $1 - \beta_{\text{imin}}$ ,  $\beta_{\text{imin}}$  соответствует случаю достижения лунной орбиты с минимальной скоростью). Функция  $W = W(\theta_1, \beta_1)$  получается путем обработки результатов расчетов активного участка.

Заметим, что радиус  $r_1 = r_a + H_1$  (где  $r_a$  — радиус Земли) и угловая дальность  $\Phi_a$  активного участка, отвечающие оптимальным комбинациям  $\theta_1$  и  $\beta_1$ , не являются произвольными, а образуют однопараметрические семей-

ства функций от  $\theta_1$ . На рис. 8.2 даны границы однопараметрического пучка оптимальных кривых  $r_1(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$ ; там же нанесены границы другого однопараметрического пучка — пучка оптимальных кривых  $\Phi_a(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$ . Второй пучок получается (аналогично первому) по тем

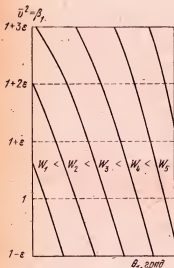


Рис. 8.1. Зависимость между параметрами  $\beta_1$  и  $\theta_1$  при различных постоянных значениях характеристической скорости  $W$ .

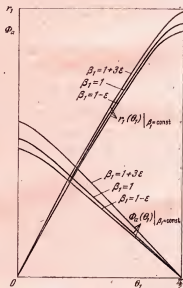


Рис. 8.2. Примерный вид зависимости геоцентрического радиуса  $r_1$  и угловой дальности  $\Phi_a$  активного участка от параметра  $\beta_1$  (квадрата отношения начальной скорости к местной параболической) и от угла  $\theta_1$  возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом.

траекториям, которые оказались наимыгоднейшими в смысле величины характеристической скорости  $W$ . Характер изменения  $r_1$  и  $\Phi_a$  с ростом  $\theta_1$  естественны: чем по более крутой траектории происходит разгон, тем на меньших дальностях и больших высотах должен кончиться активный участок.

Пучок кривых  $r_1(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$  имеет максимальную ширину при  $\theta_1 = \pi/2$  и нулевую — при  $\theta_1 = 0$ ; пучок кри-

вых  $\Phi_a(\theta_1)|_{\beta_1=\text{const}}$  наоборот, сужается до нуля при  $\theta_1 = \pi/2$  и максимально расширяется при  $\theta_1 = 0$ . Кривые обоих пучков в точке наибольшей ширины пучка имеют горизонтальные касательные.

Заметим, что зависимость  $\Phi_a$  и  $r_1$  от  $\beta_1$  менее существенна, чем от  $\theta_1$  (в рассматриваемом малом диапазоне  $1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 + 3\varepsilon$ ). В приближенных расчетах можно пренебрегать зависимостью  $r_1$  и  $\Phi_a$  от  $\beta_1$ , а иногда и зависимостью их от  $\theta_1$  — при достаточном сужении диапазона по  $\theta_1$ .

### § 8.2. Характеристики попадающих в Луну траекторий с фиксированным наклоном плоскости траекторий к экватору

В § 8.1 для заданного азимута траектории были определены энергетические затраты, необходимые для реализации заданных комбинаций модуля и угла возвышения вектора скорости над местным горизонтом в начале пассивного участка. Рассмотрим теперь полную угловую дальность и другие характеристики попадающей в Луну траектории, начинающейся в фиксированной точке  $B_0$  (рис. 8.3). Положение плоскости траектории будем характеризовать ее наклоном  $i$  к плоскости лунной орбиты. При фиксированном наклоне  $i$ , плоскости траектории к экватору траектория, начинающаяся в точке  $B_0$ , будет иметь фиксированный азимут  $a_0$ . Например, при наклоне плоскости траектории к экватору, близком к  $65^\circ$  (такое наклонение имели первые советские ИСЗ и космические ракеты), и при том выборе координат начальной точки, который был сделан в гл. 7, получается величина азимута  $a_N$ , близкая к  $35^\circ$  (отсчитывается от направления на север по часовой стрелке).

Долготу узла будем определять углом  $\varnothing_y$ , отсчитываемым от середины поражаемого интервала (т. е. от оси  $y$  на рис. 7.8) против часовой стрелки (угол  $\varnothing_y$  будет несколько удобнее, чем прежний угол  $\varnothing$ ). Соответственно вместо прежних осей  $x$  и  $y$  будут использоваться геоцентрическая ось  $X$ , направленная в точку, противоположную середине поражаемого интервала, и ось  $Y$ , направленная в нисходящий относительно экватора узел





Примеры расчета величины  $u_0(\varnothing_y)$  и  $i_N(\varnothing_y)$  для двух азимутов  $a_0 = a_N$  ( $a_N = 35^\circ$  и  $a_N = 60^\circ$ ) представлены на рис. 8.4. Имеем  $u_0(\varnothing_y)|_{a_N=60^\circ} > u_0(\varnothing_y)|_{a_N=35^\circ}$ , поскольку с ростом азимута полные угловые дальности все сильнее отличаются от максимальных. Минимум аргумента широты  $u_0$  в соответствии с результатами, полученными

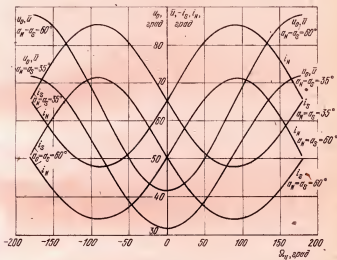


Рис. 8.4. Зависимость аргументов широты  $u_0, \bar{u}$  и наклонов  $i_N, i_S$  от долготы  $\Omega_y$  упрежденной точки при фиксированных азимутах  $a_N = a_S = 35^\circ; 60^\circ$ .

в гл. 7, достигается при  $\varnothing_y = 0$ , экстремумы наклона  $i_N$  достигаются при  $\varnothing_y = 90^\circ$ ; причем с увеличением азимута на  $25^\circ$  кривые  $i_N(\varnothing_y)$  и  $u_0(\varnothing_y)$  смещаются эквидистантно по оси ординат соответственно на  $10-15^\circ$  вверх и на  $14-16^\circ$  вниз. Вследствие наличия минимума аргумента  $u_0$  при  $\varnothing_y = 0$  довольно заметные изменения  $\varnothing_y$  не намного увеличивают  $u_0$ . Например, при изменении  $\varnothing_y$  от нуля на  $17,5^\circ$  аргумент  $u_0$  увеличивается всего лишь на  $1^\circ$ . Значению  $\varnothing_y = 17,5^\circ$  соответствует поражаемый интервал  $\Delta\Omega = 35^\circ$ , т. е. двое-трое суток.

Из рис. 8.3 нетрудно заключить, что при фиксированном азимуте  $a_0$  траектории для каждого положения  $\varnothing_y$

упрежденной точки величина угла  $\lambda$  между меридианами оси  $X$  и точки старта не может быть произвольной. Зависимость  $\lambda(\Omega_y)$  легко находится из рис. 8.3 (или рис. 7.8) по формулам (2.1)–(2.2). Результаты вычисления этой зависимости представлены на рис. 8.5. Видим, что функция  $\lambda(\Omega_y)$  всюду монотонно возрастает, причем

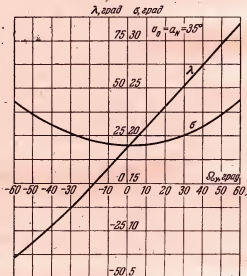


Рис. 8.5. Зависимость угла  $\lambda$  (между меридианами оси  $X$  и точки старта) и угла  $\sigma$  (между меридианами угла и точки старта) от долготы  $\Omega_y$  упрежденной точки при фиксированном азимуте запуска  $\sigma_0 = \alpha_N = 35^\circ$ .

почти равномерно. Наличие зависимости  $\lambda(\Omega_y)$  означает, что при фиксированном азимуте для соударения с Луной в заданный момент времени, т. е. при заданном положении Луны на ее орбите, необходимо вполне определенное положение начальной точки в абсолютном пространстве в момент старта. Очевидно, благодаря суточному вращению Земли такие положения возникают один раз в сутки, когда плоскость стрельбы проходит через заданную упрежденную точку  $\Omega_y$ . Соответствующий момент старта определяется однозначно на каждые звездные сутки, в связи с чем возможные времена полета должны

отличаться точно на звездные сутки. Например, при старте в следующие сутки время полета должно быть уменьшено на одни звездные сутки.

### § 8.3. Определение оптимальных начальных данных при фиксированном наклоне плоскости траекторий к экватору

Определим начальные данные, отвечающие минимуму характеристической скорости  $W$  при запуске КА с фиксированной широты  $\varphi_0$  и при фиксированном наклоне  $i_0$  плоскости траектории к экватору. Наклонение  $i_0$  связано с азимутом  $a_0$  теоремой синусов (рис. 8.3)

$$\sin a_0 = \frac{\cos i_0}{\cos \varphi_0}, \quad (3.1)$$

причем одному значению  $|i_0|$  соответствуют два равных по величине азимута  $a_0 = a_N$  и  $a_0 = a_S$ : первый отсчитывается от северного направления по часовой стрелке, второй — от южного против часовой стрелки, но каждый из них — в диапазоне от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  (рис. 7.17). Для определенности примем  $a_0 = a_N$ .

Определять оптимальные начальные данные будем в предположении, что запуск КА может быть произведен в любые сутки заданного интервала дат. Пусть  $\Delta\Omega$  — угловая величина поражаемого интервала, соответствующего заданному интервалу дат. По величине  $\Omega_y = \Delta\Omega/2$  находим  $u_0 = u_0(\Omega)$  из рис. 8.4. Значение  $u_0$  находится по краю, а не по середине  $\Omega_y \neq 0$  поражаемого интервала. Очевидно, найденный для него запас топлива благодаря убыванию  $u_0$  с уменьшением  $\Omega_y$  будет достаточен и для попадания в Луну, когда она находится внутри поражаемого интервала (в то время как запас топлива, определенный по внутренней точке поражаемого интервала, для достижения Луны на его краю будет недостаточен).

Задавшись средним значением  $\Phi_a^0$  активной угловой дальности, определяем среднее значение пассивной угловой дальности  $\Phi_1^0 = 180^\circ - (u_0 + \Phi_a^0)$ . Теперь для любой точки  $(\theta_1, \beta_1)$  на кривой  $\Phi_1 = \Phi_1^0$  (рис. 7.4) по семейст-

ву кривых  $W(\theta_1, \beta_1)$  (рис. 8.1) находим соответствующее значение  $W$ .

Очевидно, непрерывная функция  $W(\theta_1, \beta_1)$  вдоль кривой  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1) = \Phi_1^0$  в ограниченной области практически интересных значений  $\theta_1, \beta_1$  достигает минимума  $W_{\min}$ . Точка  $(\theta_1^*, \beta_1^*)$ , в которой этот минимум достигается, и дает оптимальную комбинацию начальных данных. Эта точка может быть найдена по обычным правилам отыскания условного экстремума, но ее проще получить графически, нанеся на один чертеж кривые  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$  (рис. 7.4) и  $W_1(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$  (рис. 8.1). Действительно, на этом чертеже точки  $(\theta_1^*, \beta_1^*)$ , где достигаются экстремумы величин  $W(\theta_1, \beta_1)|_{\Phi_1 = \text{const}}$  или  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1)|_{W = \text{const}}$ , будут, очевидно, точками касания кривых разных семейств.

Так как знаки кривизны для этих семейств различны, то на каждой кривой будет только одна точка касания  $(\theta_1^*, \beta_1^*)$ . Следовательно, для найденного значения  $\Phi_1 = \Phi_1^0$  минимальное значение  $W_{\min}$  достигается в той точке  $(\theta_1^*, \beta_1^*)$ , в которой кривая  $W = W_{\min}$  семейства  $W = \text{const}$  касается кривой  $\Phi_1 = \Phi_1^0 = \text{const}$ .

Предыдущее рассмотрение проводилось при каком-то среднем значении  $\Phi_a^0$  активной угловой дальности и при том значении высоты  $H_1$ , для которого представлены кривые на рис. 7.4. Теперь же, когда известны приближенные значения  $\theta_1^*, \beta_1^*$ , это рассмотрение легко уточнить. Действительно, по  $\theta_1^*, \beta_1^*$  из рис. 8.2 находим уточненные значения  $H_1(\theta_1^*, \beta_1^*)$  и  $\Phi_a(\theta_1^*, \beta_1^*)$ . Определяя точку касания при новом значении  $\Phi_a$  и учитывая изменение  $H_1$  сдвигом кривых на рис. 7.4 по оси ординат, получим после нескольких итераций оптимальные значения  $\theta_1^*, \beta_1^*$  и  $W_{\min}$  с необходимой точностью.

Заметим, что необходимость нахождения оптимальных траекторных характеристик именно на плоскости переменных  $\theta_1, \beta_1$  определяется существом задачи, поскольку именно параметры  $\theta_1, \beta_1$  являются общими и определяющими как для пассивного, так и для активного участка. Рассмотрение кривых  $\Phi_1 = \text{const}$  и  $W = \text{const}$  на плоскости  $\theta_1, \beta_1$  с учетом зависимостей  $\Phi_a(\theta_1, \beta_1)$  и

$r_1(\theta_1, \beta_1)$  позволяет получать начальные данные при самых различных ограничениях и при этом позволяет судить, каково увеличение энергетических затрат по сравнению с затратами, определяемыми оптимальными начальными данными.

Определим, например, значение  $W$  для начальных данных, позволяющих достигнуть Луны в заданном поражаемом интервале  $2\Omega$ , за заданное время полета  $T$  при фиксированном азимуте траектории. Время полета для рассматриваемых оптимальных комбинаций  $\theta_1, \beta_1$  (рис. 8.1) определяется в основном избытком  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической, причем начальная высота и направление полета в рассматриваемых диапазонах их изменения несущественно влияют на время полета. Начальные данные определяются следующим образом.

Задавшись временем полета  $T$ , находим из рис. 4.5 величину  $\Delta V_1$ , а затем, задавшись средними значениями  $r_1^0$  и  $\Phi_a^0$ , находим параболическую скорость  $V_n(r_1^0)$ , величину  $\beta_1^0 = \bar{v}^2 = ((V_n + \Delta V_1)/V_n)^2$ , аргумент широты  $u_0(\Omega_y)$  (из рис. 8.4) и пассивную угловую дальность  $\Phi_1^0 = 180^\circ - (u_0 + \Phi_a^0)$ . Абсцисса точки пересечения кривой  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1) = \Phi_1^0$  с прямой  $\beta_1 = \beta_1^0$  (рис. 7.4) и есть, очевидно, искомая величина  $\theta_1^0$ . Зная  $\theta_1^0$ , из рис. 8.2 находим уточненные значения  $r_1(\theta_1^0, \beta_1^0)$  и  $\Phi_a(\theta_1^0, \beta_1^0)$  и повторяем расчет  $\Delta V_1$  по  $T(\Delta V_1, r_1, \theta_1)$ ,  $V_n(r_1)$ ,  $\beta_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $\theta_1$  (учитывая сдвиг кривых на рис. 7.4 с изменением  $H_1$ ). Итерации продолжаем до получения необходимой точности. По окончательным значениям  $\theta_1, \beta_1$  находим  $W(\theta_1, \beta_1)$ .

Интересно также определить энергетические затраты для осуществления таких траекторий попадания в Луну, на которых вектор скорости в начале пассивного участка образует фиксированный угол  $\theta_1$  с местным горизонтом. Решение в этом случае получается примерно так же, как и в предыдущем. Задавшись углом  $\theta_1$  и произвольным значением  $\Omega_y$ , находим аргумент широты  $u_0(\Omega_y)$  (рис. 8.4). Далее определяется соответствующее значение скорости  $V_1$ , для чего сначала находим итерациями величину  $\beta_1 = (V_1/V_n)^2 = \bar{v}^2$ .

Задавшись сначала каким-либо нулевым приближением  $\beta_1 = \beta_1^0$ , определяем по известным зависимостям  $\Phi_a(\theta_1, \beta_1)$  и  $r_1(\theta_1, \beta_1)$  (рис. 8.2) величины активной угловой дальности  $\Phi_a$  и геоцентрического радиуса  $r_1$ . Затем находим аргумент  $u_1$  широты конца активного участка и угловую дальность  $\Phi_1$  пассивного участка траектории:

$$u_1 = u_0 + \Phi_a, \quad \Phi_1 = 180^\circ - u_1. \quad (3.2)$$

Наконец, уточняем значения  $\Delta\beta$  и  $u$  по формуле

$$\Delta\beta_1 = \frac{1 - 2v \cos^2 \theta_1 + \cos(\Phi_1 + 2\theta_1)}{2v \cos^2 \theta_1 - \cos \Phi_1 - \cos(\Phi_1 + 2\theta_1)}, \quad \beta_1 = 1 + \Delta\beta_1, \quad (3.3)$$

полученной, как и (7.1.3), из формулы (8.1) книги [1—1968];  $v = r_1/r_2$  — малая величина, причем слабо меняющаяся, так как  $r_1$  и радиус точки встречи  $r_2$  меняются слабо. По новым значениям  $\beta_1$  и  $\theta_1$  вновь находим значения  $r_1$  и  $\Phi_a$  как функции величин  $u_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Delta\beta_1$  и т. д. Итерации повторяем до получения необходимой точности. Благодаря слабой зависимости  $\Phi_a$  и особенно  $r_1$  от  $\beta_1$  итерации быстро сходятся: расчеты показывают, что для получения трех верных десятичных знаков достаточно двух итераций. Вследствие слабой зависимости от  $\beta_1$  величин  $\Phi_a$  и  $r_1$  последние слабо зависят и от  $\mathcal{L}_y$ . Поэтому результаты их расчета удобно представлять в виде кривых  $\Phi_a(\theta_1)$ ,  $r_1(\theta_1)$  с параметром  $|\mathcal{L}_y|$ . Кривые эти, очевидно, должны быть монотонны по  $\theta_1$  и должны совпадать для значений  $\mathcal{L}_y$ , отличающихся только знаком.

Определив значения  $\Phi_a$ ,  $r_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\Delta\beta_1$ , находим величины местной параболической  $V_n$  и начальной геоцентрической  $V_1$  скоростей:

$$V_n = \sqrt{2\mu_G/r_1}, \quad V_1 = V_n \sqrt{\beta_1}. \quad (3.5)$$

Избыток  $\Delta V_1 = V_1 - V_n$  начальной скорости над параболической более точно можно получить по формуле

$$\Delta V_1 = \frac{V_n \Delta\beta}{1 + \sqrt{1 + \Delta\beta}}, \quad (3.5)$$

не содержащей потери точности.

Значения параметров  $W$ ,  $r_1$ ,  $\Phi_a$ ,  $\Delta V_1$ ,  $\theta_1$  и других как функций от  $\Omega_y$  могут быть определены изложенным выше способом для всего диапазона  $-180^\circ < \Omega_y < 180^\circ$ . Но оказывается достаточным найти их лишь в диапазоне  $0 < \Omega_y < 180^\circ$ . Действительно, поскольку функция  $u_0(\Omega_y)$  является четной, то кривые, построенные для значений  $-180^\circ < \Omega_y < 0$ , будут симметричны относительно оси ординат соответствующим кривым, построенным для значений  $0 < \Omega_y < 180^\circ$ . Заметим, что при увеличении  $|\Omega_y|$  от 0 до  $90^\circ$  величина  $u_0$  возрастает, достигая максимума, причём изменяется нечетным образом относительно точки ( $\Omega_y = 90^\circ$ ,  $u_0 = u_0(90^\circ)$ ). Если при этом функция  $W(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$  близка к линейной, а влияние изменения высоты  $H_1$  и дальности  $\Phi_a$  активного участка малосущественно, то можно приближенно считать, что функция  $W(\Omega_y)$ , определяющая минимальные энергетические затраты, тоже является нечетной в интервалах от 0 до  $180^\circ$  и от  $-180^\circ$  до 0 (относительно точек с абсциссой  $|\Omega_y| = 90^\circ$ ).

Заметим, что при смещении из оптимальной точки вдоль кривой  $\Phi_1 = \text{const}$  по плоскости  $(\theta_1, \beta_1)$  (рис. 7.4 и 8.1) можно существенно (например, на 1—1,5 суток) изменить время полета без больших энергетических потерь, так как в оптимальной точке кривые  $\Phi_1 = \text{const}$  и  $W = \text{const}$  касаются друг друга.

Следует заметить также, что широта начальной точки весьма существенно влияет на энергетические затраты, необходимые для достижения Луны. При увеличении широты эти затраты растут, а при уменьшении широты до  $\phi_0 = i_L$  они уменьшаются, приближаясь к затратам, имеющим место в плоской задаче. С убыванием широты производная функции  $u_0(\Omega_y)$  всюду уменьшается по модулю. Соответственно энергетические затраты и другие параметры меняются слабее с отклонением даты старта от оптимальной.

#### § 8.4. Выбор энергетически оптимального наклона для траекторий северного типа

Выше была изложена методика определения энергетически оптимальных начальных данных пассивного участка траекторий попадания в Луну для фиксирован-

ного наклона  $i_0$  или, что то же, для фиксированного азимута  $a_0 = a_0^*$  траектории.

Очевидно, если провести расчеты для достаточного количества азимутов, то можно было бы с помощью многократного применения той же методики определить зависимость энергетических затрат от азимута  $a_0$  и найти оптимальный азимут, т. е. азимут, соответствующий наименьшей характеристической скорости. Однако этого трудоемкого пути определения оптимального азимута можно избежать, если учесть характер зависимости начальной скорости от азимута и использовать результаты расчета для азимута  $a_0^*$  с помощью соответствующего пересчета.

Действительно, для различных азимутов будут различны кориолисова и центробежная силы, да еще прибавки к относительной скорости, обусловленные вращением Земли. При этом для высот  $H_1 < r_0$  центробежная сила будет столь мала по сравнению с тягой, что ее можно вообще не учитывать на активном участке. Кориолисова сила тоже невелика по сравнению с тягой, причем, как показывает анализ, она изменяет лишь направление вектора скорости, не меняя заметно его величины. Вследствие этого она несущественно сказывается на энергетических возможностях ракет, и в настоящем рассмотрении ею тоже можно пренебречь.

Следовательно, при переходе от одного азимута к другому будет изменяться только разность векторов абсолютной  $V_1$  и относительной  $V_0$  скоростей, обусловленная вращением Земли.

Рассмотрим зависимость разностей  $\Delta V_* = V_1 - V_0$  и  $\Delta \theta = \theta_0 - \theta_1$  (где  $\theta_0$  — угол возвышения вектора относительной скорости  $V_0$  над горизонтом точки начала пассивного участка) от азимута  $a_0$  вектора абсолютной скорости  $V_1$  с учетом зависимостей между начальными данными, установленных в § 8.1.

Поскольку величины разностей  $V_1 - V_0$  и  $\theta_0 - \theta_1$  весьма невелики, приближенный расчет их очень прост. Из треугольника скоростей со сторонами  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_*$ , где  $V_*$  — переносная скорость, обусловленная вращением Земли, имеем:  $V_0 = V_1 - V_*$ ; проекции на радиус, парал-



лель и меридиан:  $V_1 = (V_1 \sin \theta_1, V_1 \cos \theta_1 \sin a_1, V_1 \times \cos \theta_1 \cos a_1)$ ,  $V_\omega = (0, V_\omega, 0)$ , так что

$$V_0^2 = V_1^2 - 2V_1 \Delta V_\omega^0 + V_\omega^2, \quad (4.1)$$

где  $\Delta V_\omega^0 \equiv V_\omega \cos \theta_1 \sin a_1$ ,  $a_1$  — азимут вектора абсолютной скорости в точке  $B_1$  выхода на траекторию пассивного полета.

В точке  $B_1$  величина переносной скорости

$$V_\omega = \omega_G r_1 \cos \varphi_1, \quad (4.2)$$

где  $\omega_G$  — угловая скорость вращения Земли,  $r_1$  и  $\varphi_1$  — радиус и широта точки начала пассивного участка. Из (4.1) получаем

$$\Delta V_\omega \equiv V_1 - V_0 = \frac{2V_1 \Delta V_\omega^0 - V_\omega^2}{V_1 + V_0} = \frac{\Delta V_\omega^0 - V_\omega^2/2V_1}{1 - \Delta V_\omega^0/2V_1}.$$

Отношения  $V_\omega/V_1$  и  $\Delta V_\omega/V_1$  малы. Если ими пренебречь, то получим  $\Delta V_\omega \equiv \Delta V_\omega^0$  в первом приближении, а во втором с точностью до членов второго порядка малости

$$\Delta V_\omega = \Delta V_\omega^0 - \left( \frac{V_\omega^2}{2V_1} - \frac{\Delta V_\omega^{02}}{2V_1} \right).$$

Учитывая, что по теореме синусов из  $\Delta B_0 P B_1$  (рис. 8.3)

$$\sin a_1 = \frac{\cos \varphi_0 \sin a_0}{\cos \varphi_1}, \quad (4.3)$$

получаем с помощью (4.2):

$$\Delta V_\omega = \Delta V_\omega^0 = \omega_G r_1 \cos \varphi_0 \sin a_0 \cos \theta_1. \quad (4.4)$$

Из формулы  $V_1 \sin \theta_1 = V_0 \sin \theta_0$  проекций  $V_1$  и  $V_0$  на  $r_1$  следует, что разность  $\Delta \theta$  составляет всего лишь доли градуса, и с точностью до малых второго порядка можно считать  $0 = \Delta V_\omega^0 \sin \theta_1 - V_1 \Delta \theta \cos \theta_1$ , откуда

$$\theta_0 - \theta_1 = \Delta \theta = \frac{\Delta V_\omega^0}{V_1} \operatorname{tg} \theta_1. \quad (4.5)$$

Формула (4.4) показывает, что обусловленная вращением Земли скоростная прибавка  $\Delta V_\omega$  не зависит от длины  $\Phi_a$  активного участка, а зависит лишь от азимута векто-

ра абсолютной скорости в начальной точке и угла возвышения вектора абсолютной скорости в конечной точке активного участка.

Расчет по формулам (4.4) и (4.5) можно упростить, если пренебречь слабой зависимостью величины радиуса  $r_1$  от  $\beta_1$  и в (4.5) положить  $V_1 = V_n$ . Примерный вид зависимости  $\Delta V_\omega$  от азимута  $a_0$  представлен на рис. 8.6. При этом для различных углов  $\theta_1$  получаются близкие функции  $\Delta V_\omega(a_0)$ , поскольку с увеличением  $\theta_1$  величина

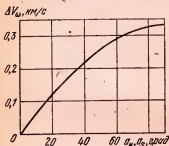


Рис. 8.6. Обусловленная вращением Земли скоростная прибавка  $\Delta V_\omega$  как функция азимута (северного  $a_0 = a_N$  или южного  $a_0 = a_S$ ).

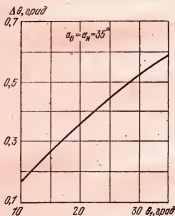


Рис. 8.7. Разность  $\Delta \theta$  в углах возвышения над горизонтом для векторов относительной и абсолютной скорости КА в начале пассивного участка при фиксированном азимуте запуска  $a_0 = a_N = 35^\circ$ .

$r_1$  растет (см. § 8.1), более или менее компенсируя убывание  $\cos \theta_1$ .

Зависимость  $\Delta \theta$  от  $\theta_1$ , как видно из формул (4.4) и (4.5), почти синусоидальна (причем отклонения от синусоидальности возникают за счет увеличения  $r_1$  с  $\theta_1$ ). Примерный вид ее представлен на рис. 8.7.

Теперь, имея расчеты активного участка для одного какого-либо азимута  $a_0^*$ , нетрудно перейти к любому другому азимуту  $a_0$ , прибавив к скорости  $V_1$  разность  $\Delta V_\omega(a_0) - \Delta V_\omega(a_0^*)$ .

Покажем, что внутри диапазона  $0^\circ \leq a_0 \leq 90^\circ$  существует азимут, при котором функция  $W(a_0)$  проходит

через минимум  $W_{\min}$ . Действительно, если не учитывать вращения Земли, то согласно гл. 7 оптимальным азимутом является тот, который обеспечивает максимум  $\Phi_{\max}$  полной угловой дальности полета, т. е. азимут  $a_0 = 0$ .

С учетом же вращения Земли этот азимут уже не является оптимальным, так как при увеличении  $a_0$  от нуля энергетические затраты, возрастают на малые второго порядка вследствие убывания  $\Phi$ , в то же время убывают на малые первого порядка вследствие возрастания величины  $\Delta V_*(a_0)$ . Однако функция  $\Delta V_*(a_0)$  при увеличении  $a_0$  до  $90^\circ$ , наоборот, достигает максимума, возрастая уже на малые второго порядка, а функция  $\Phi(a_0)$  убывает на малые первого порядка, и, соответственно, необходимые энергетические затраты возрастают на малые первого порядка. Значит, при  $0^\circ \leq a_0 \leq 90^\circ$  энергетические затраты достигают минимума. Этот минимум оказывается лишь один (так как в рассматриваемом диапазоне изменения азимута функции  $\Phi(a_0)$  и  $\Delta V_*(a_0)$  меняются монотонно).

Заметим, что согласно гл. 7 при  $\Omega_y = 0$  достигается максимум величины азимута для каждой фиксированной угловой дальности и соответственно максимум угловой дальности для любого фиксированного азимута. Следовательно, положение упрежденной точки, энергетически оптимальное без учета скоростной прибавки от вращения Земли, остается энергетически оптимальным и с учетом вращения Земли. Функция  $a_0 = a_N(u_0)$ , полученная с помощью формул (2.2), (2.8), представлена на рис. 8.8 для значений  $\Omega_y = 0^\circ, 26^\circ 30'$  и  $40^\circ$ .

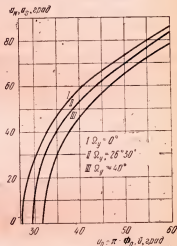


Рис. 8.8. Зависимость азимутов  $a_N$  и  $a_S$  от аргумента  $u_0$  или широты точки старта для траекторий, встречающих Луну на трех различных расстояниях  $\Omega_y$  от энергетически оптимальной точки  $\Omega_y = 0$ .

Интересно сравнить при различных азимутах  $a_0$  энергетические затраты  $W$ , соответствующие наивыгоднейшей упрежденной точке, т. е. точке  $\delta_{\text{by}} = 0$ .

Значение  $W(a'_0)$  может быть найдено без использования рис. 8.6, если кривые на рис. 8.1, 8.2 даны для  $a_0 = a'_0$ . По азимуту  $a'_0$  с помощью кривой  $\delta_{\text{by}} = 0$  на рис. 8.8 находим соответствующее значение  $u_0$  и полной угловой дальности  $\Phi_0 = \pi - u_0$ . Затем, задавшись в качестве нулевого приближения средними значениями активной угловой дальности  $\Phi_a^0$  и высоты  $H_1^0$  конца активного участка, определяем пассивную угловую дальность  $\Phi_1^{(0)} = \Phi_0 - \Phi_a^{(0)}$  и точку  $(\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)})$  касания кривой  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1, H_1^{(0)}) = \Phi_1^0 = \text{const}$  с одной из кривых  $W(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$  (рис. 8.1).

По значениям  $\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}$  находим из рис. 8.2 новые, более точные значения  $\Phi_a^{(1)}$  и  $H_1^{(1)}$ , а по ним — новую точку  $(\theta_1^{(1)}, \beta_1^{(1)})$ . Такие итерации повторяем до получения необходимой точности. По окончательным значениям  $\theta_1$  и  $\beta_1$  находим  $W(\theta_1, \beta_1) = \bar{W}(a'_0)$ .

Значения  $\bar{W}(a_0)$ , где  $a_0 \neq a'_0$ , получаем с помощью рис. 8.6. Задавшись, как и прежде, средними значениями  $\Phi_a^{(0)}$  и  $H_1^{(0)}$ , определяем из рис. 8.8  $\Phi_0(a_0) = \pi - u_0(a_0)$  и  $\Phi_1^{(0)} = \Phi_0(a_0) - \Phi_a^{(0)}$ , а затем вычисляем поправки

$$\delta V_1 = \Delta V_{\omega}^0(a_0) - \Delta V_{\omega}^{(0)}(a'_0) \text{ и } \delta \beta_1 = \frac{\delta V_1}{2V_{\pi}(H_1)}.$$

После этого сдвигаем кривые  $W(\theta_1, \beta_1)$  на величину  $\delta \beta_1$  в отрицательном направлении по оси ординат (рис. 8.1) и находим точку  $(\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)})$ , в которой одна из этих кривых касается кривой  $\Phi_1(\theta_1, \beta_1, H_1^{(0)}) = \Phi_1^{(0)} = \text{const}$ .

Уточнение точки касания  $(\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)})$  итерациями с учетом сдвига кривых  $W(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$  по оси ординат производится так же, как и в случае, когда  $a_0 = a'_0$ , причем значения  $\Phi_a$  и  $H_1$ , соответствовавшие при  $a_0 = a'_0$  значению  $\beta_1$ , теперь, при  $a_0 \neq a'_0$ , соответствуют значению  $\beta_1 + \delta \beta_1$ . Впрочем, вследствие слабости зависимости величин  $\Phi_a$  и  $H_1$  от  $\beta_1$  поправкой  $\delta \beta_1$  при их определении иногда можно пренебрегать.

По окончательным величинам  $\theta$  и  $\beta_1$  находим значения  $W(\theta_1, \beta_1) = \bar{W}(a_0)$ .

В предыдущем рассмотрении предполагалось, что КА встречается с Луной в точке, для которой  $\Omega_y = 0$ , т. е. в наивыгоднейшей точке ее орбиты. При реальных полетах это условие точно выполняться не будет, в связи с чем интересно знать, каково будет увеличение  $W$  при увеличении угла  $\Omega_y$ , т. е. при увеличении поражаемого интервала на орбите Луны. Для ответа на этот вопрос достаточно, очевидно, с помощью изложенной выше методики определить значения функции  $W(a_0)$ , соответствующие величинам  $\Omega_y \neq 0$ . Необходимые для этого значения  $u_0(a_0)|_{\Omega_y = \text{const}}$  рассчитываются, как и значения  $a_0$ , для  $\Omega_y = 0^\circ, 26^\circ 30', 40^\circ$  (рис. 8.8). Найдя оптимальные азимуты для каждого из рассматриваемых значений  $\Omega_y$ , определим и оптимальные наклоны  $i_0$  плоскости траектории к экватору по формуле (3.1).

### § 8.5. Выбор энергетически оптимального наклона для траекторий южного типа

Для реализации попадающих в Луну траекторий II типа необходимо, чтобы соответствующий активный участок полета достигал плоскости орбиты Луны. Это значит, что широта  $\varphi_1$  точки, соответствующей концу  $B_1$  активного участка, не должна превосходить наклона  $i_L$  плоскости лунной орбиты к экватору, т. е. угловая активная дальность  $\Phi_a$  не должна быть меньше величины  $\alpha_0 = \varphi_0 - i_L$ , где  $\varphi_0$  — широта точки старта. Следовательно, имеет смысл рассматривать только такие траектории типа II, для которых аргумент широты точки  $B_1$

$$u_1 = \Phi_a - \bar{u} \geq 0, \quad (5.1)$$

где модуль аргумента широты точки старта  $|\bar{u}| > \alpha_0$ .

Из рис. 7.4 и 8.1 следует, что для траекторий типа II энергетически оптимальными начальными данными являются:  $\theta_1 = 0$  и  $V_1 = V_{\text{мин}}$ . Им соответствует значение  $\Phi_1 = 180^\circ$ ; тогда  $u_1 = 180^\circ - \Phi_1 = 0$ , и из (5.1) получаем  $\bar{u} = \Phi_a$ .

Из рис. 8.2 видим, что при  $\theta_1 = 0$  величина  $\Phi_a$  активной угловой дальности близка к своему максимальному значению  $(\Phi_a)_{\max}$ .

Поэтому наибольшие значения  $u_{\max}$  параметра  $\bar{u} = \Phi_a - u_1$  достигаются при  $u_1 \approx 0$  и близки к  $(\Phi_a)_{\max}$ . Соответствующее величине  $\bar{u}_{\max}$  значение азимута  $a_s$  (отсчитываемого от направления на юг против часовой стрелки), как показано в гл. 7, является наибольшим при  $\Omega_y = 0$  и близким к значению  $(a_s)_{\max} = a_s(\bar{u}_{\max})$ , где  $\bar{u}_{\max} = (\Phi_a)_{\max}$ .

Максимальному азимуту, очевидно, соответствует максимальная прибавка  $\Delta V_a$  к скорости, обусловленная вращением Земли. Ее величину можно получить из формул (4.2)–(4.4), которые пригодны для расчетов не только траекторий типа I, но и траекторий типа II.

Результаты расчета  $\Delta V_a(a_s)$  по формулам (4.2)–(4.4) для значений  $r_1 = r_{1\min}$  в силу малости изменения радиуса  $r_1$  изображаются кривой, близкой к представленной на рис. 8.6. Для  $a_s = (a_s)_{\max}$  находим:

$$\Delta V_\omega = (\Delta V_\omega)_{\max}, \quad \delta V_0 = (\Delta V_\omega)_{\max} - \Delta V_\omega(a'_0), \quad \delta\beta_1 = \frac{2\delta V_\omega}{V_H}.$$

Теперь нетрудно найти наименьшие значения необходимых энергетических затрат  $W$ . Для этого сдвигаем кривые (рис. 8.1) на величину  $\delta\beta_1$  вниз и находим значение  $W = W_{\max}$  по точке с координатами  $\theta_1 = 0$  и  $\beta_1 = \beta_{1\min}$ .

Для траекторий с фиксированной длиной  $\Phi_a$  активного участка и заданным азимутом  $a_s$ , меньшим максимального значения  $(a_s)_{\max}$ , на орбите Луны уже будет иметься поражаемый интервал, величина которого убывает до нуля при  $a_s \rightarrow (a_s)_{\max}$ . Определим величину этого интервала как функцию  $\Phi_a$ , используя связь долготы узла  $\Omega_y$  упрежденной точки на орбите Луны с величинами  $u = \Phi_a - u_1$ , где  $u_1$  — аргумент широты точки конца активного участка.

Из (7.2.2) при  $\Omega = 90^\circ + \Omega_y$  находим

$$\cos \Omega_y = \frac{\cos m}{\sin i_L}. \quad (5.2)$$



Заметим, что при полете по траектории типа II с фиксированным наклоном ее плоскости к плоскости лунной орбиты попадание в крайние точки поражаемого интервала требует (в отличие от полета по траектории типа I) наименьших энергетических затрат, а при попадании в середину этого интервала — наибольших. Действительно, вследствие постоянства азимута и слабой переменной длины активного участка  $\Phi_a(\theta_1, \beta_1)$  при движении упрежденной точки от края поражаемого интервала к его середине аргумент  $u_1$  широты монотонно возрастает и, следовательно, пассивная дальность монотонно уменьшается (рис. 7.17), а это согласно рис. 7.4 и 8.1 требует увеличения энергетических затрат. Необходимые энергетические возможности при различных значениях  $\Omega_y$  для траекторий типа II рассчитываются точно так же, как это делалось для траекторий типа I, причем роль величины  $u_0$  играет величина  $u$ . В качестве пулевого приближения для траекторий типа II удобно брать значения  $\theta_1 = 0$  и  $\beta_1 = \beta_{\min}$ .

Интересно выяснить, как увеличиваются возможности достижения Луны с увеличением активной дальности  $\Phi_a$ . Поскольку максимум скоростной прибавки, обусловленной вращением Земли, достигается при азимуте  $90^\circ$  (рис. 8.6), то с увеличением  $\Phi_a$  при  $\Omega_y = 0$  и  $\Phi_1 = 180^\circ$  выигрыш в скорости, возрастая, достигает максимума для значения  $\Phi_a$ , при котором максимальный азимут  $(a_s)_{\max} = 90^\circ$ . Направление полета при этом является чисто восточным.

С дальнейшим увеличением  $\Phi_a$  значение азимута становится меньше  $90^\circ$ , и выигрыш в скорости убывает. Таким образом, энергетически оптимальным для траекторий типа II является такое наклонение  $i$ , для которого азимут траекторий является чисто восточным. Соответствующее наклонение  $i_s = \Phi_0$ .

Расчет наибольшей прибавки скорости  $\Delta V_a$  при различных углах  $\Phi_a$  по формулам § 8.4 в рассматриваемом случае весьма прост: надо принять  $\Omega_y = 0$  и широту конца активного участка постоянной  $\Phi_1 = i_s$ . Функции  $\Delta V_a(\Phi_a)$  и  $\Delta \lambda(\Phi_a)$ , где  $\Delta \lambda$  есть угол между меридианами начала и конца активного участка, для начальной высоты  $H_1 = 300$  км и угла возвышения вектора начальной



скорости над местным горизонтом  $\theta_1 = 0^\circ$  представлены на рис. 8.10.

Расчет  $\Delta\lambda$  проводится по теореме синусов для сферического треугольника  $PB_0B_1$  (рис. 8.9)

$$\sin \Delta\lambda = \frac{\sin a_s \sin \Phi_a}{\cos \varphi_1}. \quad (5.5)$$

Найдем теперь величину  $\Phi_a$ , соответствующую максимально возможной добавке к скорости и определяемому

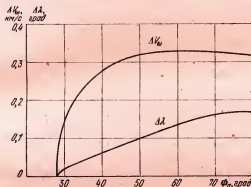


Рис. 8.10. Скоростная прибавка  $\Delta V_\omega$ , обусловленная вращением Земли, и протяженность  $\Delta\lambda$  (по долготе) активного участка траектории южного типа как функции угловой дальности  $\Phi_a$  активного участка.

условием, что дуга  $u = \Phi_a$  касается параллели  $\varphi_0$  точки старта, оканчиваясь в точке с  $\Omega_y = 0$ . Из прямоугольного треугольника с гипотенузой  $m = 90^\circ - i_L$  и катетами  $\Phi_a$  и  $90^\circ - \varphi_0$  имеем

$$\cos \Phi_a = \frac{\sin i_L}{\sin \varphi_0}. \quad (5.6)$$

Для рассматриваемого примера  $i_L = 18^\circ 20'$ ,  $\varphi_0 = 47^\circ$ ,  $\Phi_a = 65^\circ$ . Тогда из формулы (5.5) при  $a_s = 90^\circ$  и  $\varphi_1 = i_L$  получаем

$$\sin \Delta\lambda = \frac{\sin \Phi_a}{\cos i_L}, \quad (5.7)$$

откуда  $\Delta\lambda \approx 70^\circ$ .

Следует заметить, что, хотя энергетические затраты, необходимые для реализации оптимальных траекторий типа II, гораздо меньше затрат, необходимых для реализации траекторий типа I, реализация траекторий типа II требует в несколько раз более высоких точностей обеспечения величин начальной скорости и начальной высоты, чем реализация траекторий типа I. Объясняется это тем, что для достижения траекторий типа II необходимы минимальные или близкие к ним скорости полета. С ростом превышения начальной скорости над минимальной необходимые точности быстро снижаются. Отсюда следует, между прочим, что при постоянном азимуте траектории типа II для попадания в Луну в середине поражаемого интервала требуется обеспечение меньших точностей начальных данных, чем для попадания в Луну на краю поражаемого интервала.

Еще необходимо отметить, что на практике выбор азимута запуска КА с Земли в первую очередь определяется расположением районов, которые могут быть отведены под трассу запуска и тем самым изъяты из других видов использования. Поэтому на поверхности Земли имеется лишь небольшое число (единицы) трасс (и азимутов) запуска КА. В дальнейшем рассмотрении расчет примеров относится лишь к траекториям с северо-восточным направлением запуска. При этом КА выходит либо непосредственно на траекторию полета к Луне, либо на промежуточную орбиту ИСЗ, с которой через подходящее время выводится на траекторию перелета к Луне (см. гл. 11). Будем по-прежнему отличать такую траекторию буквой *N*, если она в основном проходит над северным полушарием Земли, и буквой *S* — если над южным.

## Глава 9

### НОМИНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДОСТИЖЕНИЯ ЛУНЫ С ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ И АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

#### § 9.1. Приближенный расчет номинальной траектории на основе долготной привязки ее концов

Пусть выполнены условия метода ТСД и пусть заданы наклонение  $i_0$  плоскости геоцентрической траектории к экватору и момент  $t_L$  встречи КА с Луной. Задание  $t_L$  фиксирует сферические координаты  $\alpha_L, \varphi_L, r_L$  окололунного конца  $L$  траектории, которые считаются совпадающими с координатами  $\alpha_L(t_L), \varphi_L(t_L), r_L(t_L)$  центра Луны  $m_L$ ; последние находятся по моменту  $t_L$  из Астрономического ежегодника. Тем самым задается и географическая долгота  $\lambda_L$  конца  $L$ , причем считаем  $|\lambda_L| < \pi$ .

Пусть рассматривается столь узкий пучок траекторий, что допустимо пренебрегать различием угловой дальности  $\Phi_2$  и высоты  $H_1$  конца  $B_1$  активного участка для различных траекторий пучка. Тогда вследствие фиксированности точки  $B_0$  старта и наклонения  $i_0$  будет фиксирована и точка  $B_1$ . Будем задавать ее положение географической долготой  $\lambda_B$ , геоцентрической широтой  $\varphi_B$  и радиусом  $r_B = r_G + H_1$ , причем считаем  $|\lambda_B| < \pi$ . Благодаря фиксированности долгот  $\lambda_L, \lambda_B$  концов пассивного участка время  $T_\lambda$  полета КА между ними можно выразить «с точностью» до целого числа  $n$  звездных суток через разность долгот концов и проекцию  $\Phi_0$  угловой дальности  $\Phi_1$  пассивного участка на плоскость экватора. Это выражение оказывается общим для задачи полета к Луне и задачи возвращения от Луны к Земле. Поэтому его будем выводить сразу для обеих задач.

Пусть в начальный момент  $t_n = t_b$  ( $t_n = t_L$ ) КА находится на географической долготе  $\lambda_n = \lambda_b$  ( $\lambda_n = \lambda_L$ ). Тогда в любой момент  $t \leq T_\lambda$  он находится на географической долготе

$$\lambda(t) = \lambda_n + \Phi_o(t) - \omega_o(t - t_n), \quad |\lambda_n| < \pi, \quad (1.1)$$

где  $\Phi_o(t)$  есть проекция на плоскость экватора текущей угловой дальности  $\Phi(t)$ . Функция  $\Phi(t) > 0$  по определению, причем является монотонно возрастающей. Функция  $\Phi_o(t)$  тоже является монотонно возрастающей, причем  $\Phi_o(t) > 0$  при  $|i_o| < 90^\circ$  (когда КА обходит полярную ось в направлении вращения Земли) и  $\Phi_o(t) \leq 0$  при  $|i_o| > 90^\circ$  (т. е. при обратном направлении обхода).

В конечный момент  $t_n = t_n + T_\lambda$  имеем  $t_n = t_L$  ( $t_n = t_b$ ),

$$\Phi(t_n) = \Phi_1, \quad \lambda(t_n) + 2\pi n = \lambda_n = \lambda_L \quad (\lambda_n = \lambda_b), \quad |\lambda_n| < \pi.$$

Здесь  $n$  есть целое число периодов, которое необходимо прибавить к углу  $\lambda(t_n)$ , чтобы привести его к диапазону  $(-\pi, \pi)$ . Из (1.1) при  $t = t_n$ , учтя, что  $T_\lambda = t_n - t_n$ , получим

$$\lambda_n - 2\pi n = \lambda_n + \Phi_o - \omega_o T_\lambda, \quad \text{где } \Phi_o = \Phi_o(t_n).$$

Отсюда

$$T_\lambda = n + (\lambda_n - \lambda_n + \Phi_o)/2\pi \text{ суток}, \quad (1.2)$$

поскольку  $2\pi/\omega_o = 1$  сут (звездные).

Рассмотрим проекцию  $\beta$  на плоскость экватора угла  $u$  (аргумента широты  $\varphi$  КА, рис. 9.1).

По теоремам синусов и косинусов для сферических треугольников со сторонами  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $u$  и  $u$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ - \varphi$  получим

$$\sin \beta = \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} i_o, \quad \sin u = \sin \varphi / \sin i_o, \quad \cos u = \cos \varphi \cos \beta.$$

Углы  $|u|$  и  $|\beta|$  принадлежат одинаковым четвертям, при этом  $\operatorname{sign} \beta = \operatorname{sign} u$  при  $|i_o| < 90^\circ$  и  $\operatorname{sign} \beta = -\operatorname{sign} u$  при  $|i_o| > 90^\circ$ . По смыслу углов  $u$ ,  $\beta$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_o$  имеем

$$\Phi_1 = u_n - u_n, \quad \Phi_o = \beta_n - \beta_n, \quad (n, k) = (B, L), (L, B). \quad (1.3)$$

Углы  $u_L$ ,  $u_B$  определяем по

$$\sin u_j = \sin \varphi_j / \sin i_o \quad (j = B, L). \quad (1.4)$$

При этом в случае  $n = B$ ,  $k = L$  будет  $u_B$  в  $-I$ ,  $+I$  четверти, а в случае  $n = L$ ,  $k = B$  — в  $IV$ ,  $V$  четвертях. Угол  $u_L$  во всех случаях берем во  $II$ ,  $III$  четвертях.

В основе этого определения лежит предположение, что наклонение  $i_0$  определяется в узле  $\Omega_0$ , ближайшем к перигею (и к точке  $B$ ), а не к Луне (точке  $m_L$ ) — в соответствии с Приложением 1.

Углы  $\beta_j$  ( $j = L, B$ ) находим по

$$\sin \beta_j = \operatorname{tg} \varphi_j / \operatorname{tg} i_0 \quad (j = L, B), \quad (1.5)$$

беря  $|\beta_j|$  в той четверти, которой принадлежит  $|u_j|$ .

Таким образом, задача приближенного расчета номинальной траектории сведена к задаче Ламберта с заданными радиусами

$$r_N = r_B, \quad r_K = r_L(t_L),$$

$$(r_N = r_L, \quad r_K = r_B),$$

угловой дальностью  $\Phi_1$  и временем перелета  $T_\lambda$  (1.2) между ними. При этом входящие в (1.3) величины  $u_j$  известны из (1.4), а входящие в (1.2) через  $\Phi_0$  величины  $\beta_j$  известны из (1.5). Решив эту задачу (§ 4.4, п. 1), найдем начальные данные — величину  $V_1$  начальной скорости, угол  $\theta_K$  с трансверсалью. Момент времени  $t_K(t_K) = t_L \mp T_\lambda$  известен до решения задачи Ламберта. В процессе решения задачи Ламберта находятся элементы  $p$ ,  $a$ ,  $e$  и аномалии: истинная  $\vartheta_K$  и средняя  $M_K$ . Находим элементы

$$\tau = t_K - \frac{M_K a^{3/2}}{\sqrt{\mu_G}}, \quad \omega_0 = u_K - \vartheta_K. \quad (1.6)$$

По определению  $\beta_L$  находим

$$\beta_0 = \alpha_L - \beta_L, \quad (1.7)$$

где угол  $\alpha_L(t_L)$  известен из Астрономического ежегодника, так что вместе с заданным углом  $i_0$  имеем полную систему элементов ( $p$ ,  $e$ ,  $\tau$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $i_0$ ) номинальной траектории.

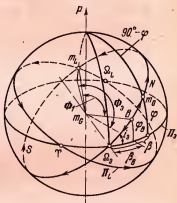


Рис. 3.1. Расположение трассы  $Bm_L$  северной ( $N$ ) и южной ( $S$ ) траекторий полета к Луне на невращающейся геоцентрической сфере.  $P_0$  и  $P_L$  — плоскости экватора и лунной орбиты.

Описанный выше приближенный способ расчета номинальной траектории (по формулам (1.2)—(1.7), (4.4.1), (4.4.8)—(4.4.11)) можно назвать *методом долготной привязки траектории*.

### § 9.2. Решение задачи о точке встречи КА с Луной при фиксированном угле начальной скорости с трансверсалью

Эта задача возникает при использовании фиксированной программы по углу тангажа для запуска КА с поверхности Земли непосредственно на траекторию полета к Луне. Если по каким-либо причинам старт не состоялся в расчетную дату, то естественно, не меняя программу по углу тангажа, стартовать в одну из следующих дат, варьируя только момент  $t_1$  «отсечки» двигателя в этой дате и величину  $V_1$  скорости в этот момент. Поскольку в данной задаче фиксированы не только географические координаты  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  точки старта и наклонение  $i_0$  плоскости траектории к экватору, но и угол  $\theta_1$  начальной скорости с трансверсалью, то уже нельзя задавать положение  $\Omega_y$  Луны  $m_L$  в момент  $t_L$  встречи: его придется вычислять путем решения задачи о точке встречи — упрежденной точке. При этом старт возможен в такой момент  $t_1$ , когда проходящая через начальную точку плоскость траектории, поворачиваясь в суточном движении вместе с Землей, пройдет через упрежденную точку

$$\Omega_y(t) = \Omega_L(t) + \omega_L T(r_1, V_1, \theta_1, r_2), \quad (2.1)$$

где  $T$  — время перелета. Схему перелета будем считать заданной и в расчетах — северной ( $N$ ). Задачу будем решать точнее, чем в § 9.1, — с учетом зависимостей  $\Phi_n$  и  $r_1$  от  $\theta_1$  (рис. 8.2).

Заметим, что в рассматриваемой задаче существует вполне определенное максимально возможное значение  $\theta_{1\max}$  угла  $\theta_1$ . Оно соответствует максимальному значению  $\Phi_{1\max}$  пассивной угловой дальности и минимальному значению  $\Delta V_{1\min}$  избытка начальной скорости над местной параболической, т. е. минимальному значению  $\Delta\beta_{1\min}$  величины  $\Delta\beta_1 = \frac{\Delta V_1}{V_\pi} \left( 2 + \frac{\Delta V_1}{V_\pi} \right)$ .

Максимальное значение  $\theta_{1\max}$  определяется последовательными приближениями. Задавшись какими-либо значениями  $\theta_1 < \theta_{1\max}$ ,  $\Delta\beta_1 > \Delta\beta_{1\min}$ , из рис. 8.2 находим  $r_1(\theta_1, \Delta\beta_1)$  и  $\Phi_a(\theta_1, \Delta\beta_1)$ . Затем находим величины

$$v = r_1/r_2, \quad \Phi = 180^\circ - [(u_0)_{\min} + \Phi_a],$$

где  $r_2 = 384\,400$  км — расстояние между центрами Земли и Луны, а  $(u_0)_{\min} = u_0|_{\varnothing_y=0}$  берется из рис. 8.4. Наконец, находим новые значения  $\Delta\beta_1$  и  $\theta_{1\max}$  по формулам (7.1.5) и

$$\cos^2 \theta_{1\max} = \frac{\sin^2 (\Phi/2)}{(1 - v^2) + v(2 - v) \sin^2 (\Phi/2)}, \quad (2.2)$$

получающейся с помощью выражения (7.1.6), повторяем итерации до установления величин  $\theta_1$  и  $\Delta\beta_1$  с нужной точностью.

В задаче с фиксированным углом  $\theta_1 = \text{const}$  величина  $\Delta V_1$  избытка начальной скорости над параболической для различных значений  $\varnothing_y$ , т. е. для различных суток месяца, будет, очевидно, существенно разной, так что время полета  $T$  и величина упреждения будут заметно меняться с изменением положения  $\varnothing_y$  точки встречи.

Задаваясь различными значениями  $\theta_1 = \text{const} < \theta_{1\max}$  и  $\varnothing_y$  и проводя аналогичные предыдущим итерации для определения величин  $\beta_1$ ,  $r_1$ ,  $\Phi_a$ ,  $T$ , находим последние как функции  $\varnothing_y$ , находим из (2.1)  $\varnothing_L(\varnothing_y)$ . Примерные кривые зависимостей  $\varnothing_L(\varnothing_y)$  при постоянных значениях  $\theta_1$  приведены на рис. 9.2. Кроме того, независимо от значения  $\theta_1$  имеем из гл. 8 (рис. 8.5) зависимость  $\lambda(\varnothing_y)$  (долготу точки  $B_0$ , отсчитываемую от оси  $X$  на рис. 8.3) и положение Луны  $\varnothing_L(t)$ , известное из Астрономического ежегодника.

Остается, задаваясь различными значениями  $t$  и интерполируя, определить на каждые сутки моменты времени  $t_1$  выхода КА на траекторию пассивного участка.

Для определения этих моментов времени с целью достижения Луны в окрестности наивыгоднейшей точки ( $\varnothing_y = 0$  — см. § 8.3) на ее орбите в заданном месяце заданного года следует воспользоваться Астрономическим ежегодником на этот год. Учитывая, что наивыгоднейшая точка  $\varnothing_y = 0$  соответствует наименьшему склонению Лу-

ны (относительно плоскости экватора), из ежегодника находим момент  $S_0$  звездного времени, когда Луна проходит эту точку. Пусть  $\alpha^0$  — прямое восхождение Луны в момент  $S_0$ , а  $t_0$  — момент среднего солнечного времени, соответствующий  $S_0$ .

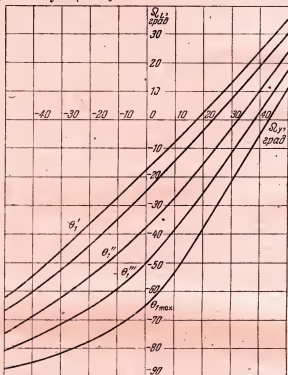


Рис. 9.2. Связь упрежденного ( $\Omega_y$ ) и текущего ( $\Omega_L$ ) положений Луны при нескольких фиксированных углах  $\theta_1$  вектора начальной скорости с трансверсалью ( $\theta_1' < \theta_1'' < \theta_1''' < \theta_{1\max}$ ).

Поскольку звездное время в угловой мере есть угол поворота гринвичского меридиана от точки  $\Upsilon$  весеннего равноденствия, а прямое восхождение  $\alpha^0$  — угол поворота Луны от точки  $\Upsilon$ , то согласно определению оси  $X$  (см. § 8.2 и рис. 8.3) имеем

$$\alpha_X^0 = \alpha^0 - 180^\circ, \quad \lambda_T = S - \alpha_X^0, \quad (2.3)$$



где  $\alpha_X^0$  — угол поворота меридиана этой оси от точки  $\Upsilon$ , а  $\lambda_r$  — угол поворота гринвичского меридиана от меридиана оси  $X$ . Следовательно, угол поворота меридиана точки старта от меридиана оси  $X$  в момент времени  $S$

$$\lambda_s = \lambda_r + \lambda_0, \quad (2.4)$$

где  $\lambda_0$  — географическая долгота точки старта  $B_0$ .

Формула (2.4) и вторая из формул (2.3) справедливы для любых значений  $S$ , а первая из формул (2.3) — только для значения  $S = S_0$ , т. е. для случая, когда Луна находится в наивыгоднейшей точке  $\varphi_y = 0$ . Обозначим соответствующее этому положению Луны значение  $\lambda = \lambda(S_0)$  на рис. 8.3 через  $\lambda^0$ . Теперь, задавшись значением угла  $\theta_1$  наклона вектора начальной гелиоцентрической скорости к местному горизонту и моментом времени  $t$ , находим из рис. 9.2 для момента  $t$  по значению  $\varphi_L = \omega_L(t - t_0)$  соответствующее значение  $\varphi_y(\varphi_L)$ , а по нему с помощью рис. 8.5 — необходимое значение  $\lambda(\varphi_y) = \lambda_y$ . С другой стороны, располагаемое значение  $\lambda$  поворота меридиана точки старта от меридиана оси  $X$  в момент времени  $t$

$$\lambda_s = \lambda^0 + \omega_G(t - t_0), \quad (2.5)$$

где  $\omega_G$  — угловая скорость суточного вращения Земли.

Найдя для двух значений  $t$  значения разности  $\Lambda = \lambda_s - \lambda_y$  и интерполируя по  $S$  на значение  $\Lambda = 0$ , в пределе получим (на каждые сутки) момент времени  $t_1$  выхода на пассивный участок траектории и соответствующие значения параметров  $\varphi_L(\varphi_y)$ ,  $\lambda(\varphi_y)$ ,  $T(\varphi_y)$ . Примерный характер изменения времени полета  $T(\varphi_y)$  от изменения положения  $\varphi_y$  точки встречи КА с Луной при постоянных углах  $\theta_1$  дан на рис. 9.3.

Рассмотрим на кривых  $T = T(\varphi_y)|_{\theta_1 = \text{const}}$  размещение точек, соответствующих попаданию в Луну в фиксированные даты пуска  $M$ ,  $M \pm 1$ ,  $M \pm 2$ . Эти точки образуют слабо искривленные наклонные линии (рис. 9.3). Характер наклона линий объясняется тем, что при фиксированном дне запуска для больших значений угла  $\theta_1$  требуются меньшие величины  $\Delta V_1$  и, соответственно, большие времена полета, большие упреждения и большие значения  $\varphi_y$ .

Величина поражаемого интервала  $2|\Omega_y|$  на орбите Луны, как указывалось в гл. 8, определяется располагаемыми энергетическими возможностями. Крайние значения  $|\Omega_y|$  полностью определяют диапазоны реализуемых значений угла  $\theta_1$ , избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости

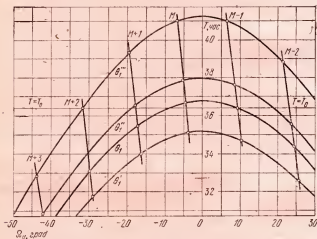


Рис. 9.3. Примерная зависимость времени полета  $T$  на пассивном участке траектории от положения  $\Omega_y$  Луны в момент встречи с КА при нескольких фиксированных углах  $\theta_1$  вектора начальной скорости с трансверсалью ( $\theta_1' < \theta_1 < \theta_1''$ ) М, М+1, ... — даты старта.

над местной параболической и конкретных дат запуска.

Уточнение развитой здесь приближенной методики дается в гл. 10.

### § 9.3. Выбор номинальной траектории с учетом прямой видимости встречи с Луной из заданного пункта

Встречающиеся с Луной траектории изображаются точками на кривых рис. 9.2, и задачей настоящего параграфа является выбор номинальной точки с учетом условия оптимальной видимости из заданного пункта КА перед его встречей с Луной.

Пусть, например, этот пункт, имеющий географическую долготу  $\lambda$ , расположен в северном полушарии (в частности им может быть начальная точка траектории полета). Под условием оптимальной видимости будем понимать требование, согласно которому угол возвышения направления пункт — КА над горизонтом пункта в определенный период в том случае, если для этого момента времени должен быть наибольшим.

В момент соударения с Луной этот угол будет наибольшим в этом случае, если для этого момента времени долгота КА равна долготе пункта. Это условие можно записать в виде (см. рис. 8.3)

$$180^\circ + [(\lambda_{B_0} - \lambda) - \sigma(a_0, \varphi_y)] = \omega_G(t_a + T_0) - 2\pi n, \quad (3.1)$$

где  $(\lambda_{B_0} - \lambda) = \text{const}$  — разность географических долгот точки старта  $B_0$  и пункта,  $\sigma$  — разность долгот точки старта и узла  $\varphi_y$  в момент старта, определяемая формулами (7.2.1—7.2.3) (рис. 8.5),  $\omega_G$  — угловая скорость суточного вращения Земли,  $t_a$  — время полета на активном участке траектории,  $T_0$  — оптимальное время полета на пассивном участке, а  $n$  — целое число звездных суток, содержащихся во времени  $T_0$ .

Действительно, разность отсчитываемых от меридиана оси  $X$  долгот точки встречи и узла в рассматриваемом приближении равна  $180^\circ$ . Эта величина в сумме с разностью  $(\lambda_B - \lambda) - (\sigma + \omega_G t_a)$  составляет с точностью до целого кратного  $2\pi$  угол поворота, который должна пройти точка наблюдения за время полета  $T_0$ , чтобы точка встречи оказалась на меридиане точки наблюдения (рис. 8.3). Нетрудно видеть, что соотношение (3.1) есть просто условие (1.2) привязки долгот концов траектории к заданным географическим долготам — начальной  $\lambda_B$  и конечной  $\lambda$ .

Чтобы угол возвышения объекта был наибольшим не в момент встречи, а на время  $\tau/2$  раньше, следует увеличить время полета  $T_0$ , определяемое из выражения (3.1), на величину  $\tau/2$ . Тогда для определения времени  $T_0$  получим формулу

$$T_0 = \frac{1}{\omega_G} [\pi(2n + 1) + (\lambda_B - \lambda) - \sigma(a_0, \varphi_y)] + \left( \frac{\tau}{2} - t_a \right). \quad (3.2)$$

Входящая в соотношение (3.2) величина  $\sigma$  довольно существенно зависит от азимута  $a_0$ : например, при увеличении  $a_0$  от  $35^\circ$  до  $60^\circ$  она увеличивается примерно на  $20^\circ$  для выбранной в гл. 7 точки старта. При этом время  $T_0$  уменьшается на величину порядка часа, т. е. относительно мало.

Если азимут постоянен (что в дальнейшем и будем предполагать), то величина  $\sigma$  при изменении  $\varphi_y$  в диапазоне  $|\varphi_y| < 30^\circ$  изменяется весьма слабо (рис. 8.5), так что для расчета примера с точностью порядка  $1^\circ$  (около 4 мин) можно считать величину  $\sigma$  постоянной и равной  $20^\circ$ . Тогда левая часть выражения (3.1) будет равна  $190^\circ$ , так что, приняв, например, за пункт наблюдения Москву ( $\lambda = 37^\circ,6$ ), получим время полета в часах:

$$T_0 = 23,93n + 12,45 + \left( \frac{\tau}{2} - t_0 \right). \quad (3.3)$$

Остается определить число  $n$ , которое может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4, так как время полета до лунной орбиты не может достигать 5 суток. Определим его для простоты расчета в предположении, что  $\tau/2 = t_a$  и что величины энергетически оптимальных начальных скоростей близки к величине местной параболической скорости. Таким скоростям соответствует время полета около двух суток. Следовательно, энергетически наиболее выгодными будут значения  $n = 1$  и  $n = 2$ . Для выбора одного из них заметим, что значение  $n = 2$  соответствует значительно меньшим величинам избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической, чем значение  $n = 1$ , и требует начальных данных с более высокими точностями, как можно ожидать, исходя из анализа плоской задачи (гл. 6). Поэтому примем  $n = 1$ . Тогда получим  $T = 36,68$  час. Заметим теперь, что время полета на пассивном участке траектории, согласно гл. 4 и рис. 4.5, слабо зависит от начальной высоты  $H_1$ , угла  $\theta_1$  наклона вектора начальной скорости над местным горизонтом и определяется в основном величиной избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над параболической. Поэтому при определении  $T(\varphi_y)$  и  $\Delta V_1(\varphi_y)$  получим для различных значений  $\varphi_y$  и  $\theta_1$  точки  $(T_1, \Delta V_1)$ , которые будут ло-

житься практически на одну кривую  $T(\Delta V_1)$  на рис. 4.5 (сплошная кривая  $r_L = 384\,400$  км на рис. 9.4).

По сплошной кривой на рис. 9.4 находим, что оптимальному в смысле видимости из заданного пункта времени полета  $T_0 = 36,4$  часа соответствует величина избытка  $\Delta V_1 = 0,158$  км/с.

Определим теперь диапазон допустимых значений времени полета  $T$ . Для этого построим угол возвышения  $\varepsilon$

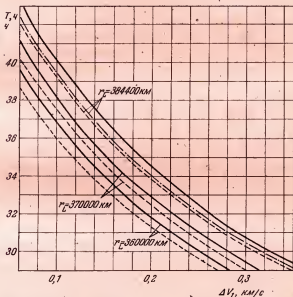


Рис. 9.4. Зависимость времени полета  $T$  на пассивном участке траектории от избытка  $\Delta V_1$  (начальной скорости над местной параболической) при различных расстояниях от центра Земли до точки встречи КА с Луной.

направления пункт — КА над горизонтом пункта наблюдения как функцию времени  $\Delta t$ , протекшего от момента  $t_m$  кульминации КА (при расчетах будем предполагать, что имеет место наименьшее склонение КА  $\delta(\delta \geq -i_L)$ , где  $i_L$  — по-прежнему угол между плоскостями земного экватора и орбиты Луны). Перемещением сна-



При  $T \geq T'' = T_2^e + \delta t$  встреча будет невидимой, так как произойдет слишком поздно, а при  $T \leq T' = T_1^e - \delta t$  она будет невидима, так как произойдет слишком рано. Вне диапазона  $(T'', T')$  имеем область гарантированной невидимости встречи, а при  $T' < T < T_1^e + \delta t$  и  $T_2^e - \delta t < T < T''$  — область возможной невидимости.

Нанеся полученный диапазон времени на рис. 9.3 и рассматривая соответствующие ему кривые  $T(\varnothing_y)|_{\theta_1 = \text{const}}$ , можно определить максимальное  $\theta_*$  и минимальное  $\theta_*$  значения угла  $\theta_1$ , при которых в окрестности точки  $\varnothing_y = 0$  еще возможна встреча с Луной, видимая из пункта наблюдения.

Таким образом, для кривых  $\theta_1 = \text{const}$  имеем диапазон  $(\theta_*, \theta^*)$ . При значении  $\theta_1 = \theta_1^*$  будем иметь некоторое максимальное количество дней месяца, в которое возможен запуск КА к Луне. Следовательно, даже при отсутствии ограничений энергетического характера весьма ограничено количество дней в месяце для запуска КА по траекториям с фиксированным значением угла возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом. Энергетические ограничения могут лишь уменьшить это количество дней.

При наличии узких энергетических границ, т. е. при условии  $|\varnothing_y| < |\varnothing_y|_{\text{max}}$ , вообще говоря, имеется целый диапазон значений  $\theta_1$ , для которых кривые  $T(\varnothing_y)|_{\theta_1 = \text{const}}$  всюду проходят в области видимости из пункта наблюдения. Поэтому оптимальное значение  $\theta_1$  следует искать с учетом расположения на кривых  $T(\varnothing_y)|_{\theta_1 = \text{const}}$  точек, соответствующих встрече в конкретном месяце, в то время как предыдущее рассмотрение имело место для любого месяца. Например, имея расчеты кривых  $T(\varnothing_y)$  (рис. 9.3) для конкретного месяца, интерполяцией можно найти параметры  $\theta_1^0$  или  $\theta_1^*$  кривых, проходящих через точку пересечения прямой  $T = T_0$  соответственно с линией  $M$  энергетически оптимальной даты или с линией  $M-1$  предыдущей даты. Характеристики траекторий с  $\theta_1 = \theta_1^0$  для других дат без труда находятся интерполяцией всех параметров, по линиям этих дат на значение  $\theta_1 = \theta_1^0$ .

### § 9.4. Расчет номинальной траектории попадания в Луну методом игнорирования возмущений

При анализе влияния разброса начальных данных, даже приближенном, недостаточно учитывать только влияние Земли, необходимо также учитывать и влияние Луны, по крайней мере в ее СД. Для расчета номинальных траекторий ниже развита приближенная методика, в которой притяжение Земли учитывается вне СД Луны и притяжение Луны — внутри СД.

Множество всех пространственных траекторий сближения является шестипараметрическим. Поскольку множество номинальных траекторий, попадающих в центр Луны, в пространственной задаче является четырехпараметрическим, то всегда можно задать произвольно какие-либо четыре величины, определяющие начальные данные, а остальные две величины найти из условия попадания в центр Луны. Затем, давая начальным параметрам те или иные отклонения и вычисляя соответствующие траектории, нетрудно определить влияние разброса начальных данных.

Задачу определения номинальной траектории можно решить с помощью итерационного процесса по двум переменным. Однако четыре произвольных параметра оказывается возможным выбрать таким образом, чтобы обойтись итерационным процессом по одной соответственно выбранной переменной.

Действительно, примем за произвольные параметры следующие величины: высоту  $H_1$  начала  $B_1$  пассивного участка траектории; избыток  $\Delta V_1$  начальной геоцентрической скорости над местной параболической; угол  $\alpha_1$  между вектором начальной скорости и начальным радиусом и угол  $i$  наклона плоскости траектории к основной плоскости (плоскости орбиты Луны). Эти четыре величины определяют плоскость и форму траектории и позволяют полностью определить траекторию сближения с Луной, если дана точка входа ее в СД Луны. При этом, если соответствующая траектория не попадает в центр  $m_L$  Луны, то входная селеноцентрическая скорость  $U_2$  для этой траектории, очевидно, направлена мимо точки  $m_L$ . Поскольку направление скорости  $U_2$  слабо зависит от положения точки  $B_2$  входа на СД (см. § 4.2), то можно ожи-



дать, что, выбирая новую точку  $B_2$  так, чтобы направление  $B_2 m_L$  было параллельно вектору  $U_2$ , соответствующему прежней точке  $B_2$ , всякий раз будем получать траектории, все более близкие к центру Луны.

Изложенная идея реализуется следующим образом (рис. 9.6а). Пусть  $\xi_B \eta_B \zeta_B$  — координаты точки входа  $B_2$  во вращающейся селеноцентрической системе координат, ось  $\xi_B$  которой постоянно направлена в центр  $m_G$  Земли, ось  $\eta_B$  лежит в плоскости лунной орбиты, а ось  $\zeta_B$  дополняет систему осей до правой системы координат. Тогда геоцентрические радиус  $r_2$ , скорость  $V_2$  и угол  $\alpha_2$  между векторами входной геоцентрической скорости и входного геоцентрического радиуса находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad r_2 &= \sqrt{(r_L - \xi_B)^2 + \eta_B^2 + \zeta_B^2}, \\ r_1 &= r_G + H_1, \quad v = r_1/r_2, \\ V_1 &= V_n + \Delta V_1, \quad V_n = \sqrt{2\mu_G/r_1}, \\ \Delta\beta_1 &= \frac{\Delta V_1}{V_n} \left( 2 + \frac{\Delta V_1}{V_n} \right), \\ \beta_2 &= \Delta\beta_1 + v, \quad V_2 = V_n \sqrt{\beta_2}, \\ \sin \alpha_2 &= v V_1 \cos \theta_1 / V_2, \quad \theta_1 = 90^\circ - \alpha_1. \quad \square \quad (4.1) \end{aligned}$$

Здесь  $r_L = 384\,400$  км — расстояние между центрами Земли и Луны,  $r_G = 6371$  км — радиус Земли,  $V_n$  — параболическая скорость для высоты  $H_1$ ,  $\mu_G = 398\,600$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup> — гравитационный параметр Земли,  $\Delta\beta = \beta_1 - 1$ , где  $\beta_1 = V_1^2/V_n^2$ . Формулы для  $\beta_2$  и  $\alpha_2$  представляют собой запись геоцентрических интегралов энергии и площадей соответственно для точек  $B_1$  и  $B_2$ .

Компоненты  $x_2, y_2, z_2$  скорости  $V_2$  в невращающейся геоцентрической системе координат  $xyz$ , оси которой параллельны соответственно осям  $\xi_B \eta_B \zeta_B$  в момент  $t_2$  входа КА в СД Луны, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \sin u_2 &= \zeta_B/r_2 \sin i, \\ x'_2 &= r_2 \cos u_2, \quad y'_2 = r_2 \sin u_2 \cos i, \\ x_2 &= \xi_B - r_L, \quad y_2 = \eta_B, \quad z_2 = \zeta_B, \end{aligned}$$

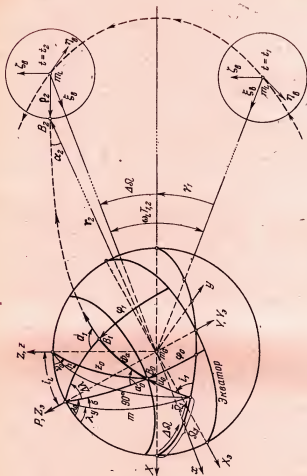


Рис. 9.6а. Траектория сближения с Луной вне ее сферы действия.



$$U = \sqrt{\dot{\xi}_B^2 + \dot{\eta}_B^2 + \dot{\zeta}_B^2},$$

$$\sin \alpha'_2 = \frac{1}{\rho_* U} [(\eta_B \dot{\xi}_B - \xi_B \dot{\eta}_B)^2 + (\xi_B \dot{\zeta}_B - \zeta_B \dot{\xi}_B)^2 + (\xi_B \dot{\eta}_B - \eta_B \dot{\xi}_B)^2]^{1/2}, \quad \square \quad (4.3)$$

где  $\rho_* = 66\,000$  км — радиус СД Луны, а  $V_L = 1,023$  км/с — скорость Луны. Отклонение траектории от центра Луны характеризуется величиной  $\sin \alpha'_2$ . Чем ближе траектория к попадающей в центр Луны, тем меньше  $\sin \alpha'_2$ . Если окажется, что  $|\sin \alpha'_2| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность, то номинальные значения  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  найдены. Если же  $|\sin \alpha'_2| > \varepsilon$ , то более точные значения  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  найдутся по формулам

$$\dot{\xi}_B = -\rho_* \dot{\xi}_B / U, \quad \dot{\eta}_B = -\rho_* \dot{\eta}_B / U, \quad \dot{\zeta}_B = -\rho_* \dot{\zeta}_B / U, \quad (4.4)$$

после чего расчет повторяется сначала.

В качестве нулевого приближения для величин  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  можно взять их значения  $\xi_{B0}, \eta_{B0}, \zeta_{B0}$  в той точке СД, в которой направление селеноцентрического радиуса обратно направлению селеноцентрической скорости на расстоянии орбиты Луны без учета притяжения последней. Эти значения могут быть вычислены по формулам (4.4) при значениях  $\dot{\xi}_B, \dot{\eta}_B, \dot{\zeta}_B$ , определяемых формулами:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_B &= -V_2 \cos \alpha_2, & \dot{\eta}_B &= V_L - V_2 \sin \alpha_2 \cos i, \\ \dot{\zeta}_B &= -V_2 \sin \alpha_2 \sin i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $V_2$  и  $\alpha_2$  находятся по формулам (4.1) при  $\xi_B = \eta_B = \zeta_B = 0$ . В проводившихся по формулам (4.1)–(4.4) расчетах траекторий, проходящих от центра Луны на расстоянии порядка 1 км, обычно требовалось не более 6 итераций, так что сходимость описанного процесса является достаточно быстрой.

Когда итерации по формулам (4.1)–(4.4) сойдутся с требуемой точностью, то легко рассчитываются все характеристики номинальной траектории. С помощью известных формул небесной механики (Приложение 8) по координатам  $x_2, y_2, z_2$  и скоростям  $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$  определяются недостающие геоцентрические кеплеровы элементы  $p, e,$

$\omega$ ,  $\tau$  траектории движения к СД Луны, а также по координатам  $\xi_b$ ,  $\eta_b$ ,  $\zeta_b$  и скоростям  $\dot{\xi}_b$ ,  $\dot{\eta}_b$ ,  $\dot{\zeta}_b$  находятся селеноцентрические кеплеровы элементы  $\Omega'$ ,  $i'$ ,  $p'$ ,  $e'$ ,  $\omega'$  траектории движения в СД в момент  $t_2$ .

По элементам  $p$ ,  $e$  и радиусам  $r_1$ ,  $r_2$  определяются истинные аномалии  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и время полета  $T_{1,2}$  вне сферы действия. Аналогично по элементам  $p'$ ,  $e'$  и селеноцентрическим радиусам  $\rho_*$  и  $\rho_L \approx 1738$  км ( $\rho_L$  — радиус поверхности Луны) находится время полета  $T_{2L}$  от границы сферы действия до соударения с Луной и полное время полета  $T = T_{1,2} + T_{2L}$ .

Заметим, что направление осей системы координат  $x y z$  (рис. 9.6а) зависит от выбранных значений  $H_1$ ,  $\Delta V_1$ ,  $\theta_1$ ,  $i$ , а интересно знать движение в какой-либо невращающейся системе координат с заранее фиксированным направлением осей, например, в системе  $X Y Z$ , ось  $Y$  которой направлена в нисходящий относительно экватора узел лунной орбиты Луны, дополняя оси  $Y$  и  $Z$  до правой системы сторону северного полюса  $P$  Земли, а ось  $X$  — в плоскости орбиты Луны, дополняя оси  $Y$  и  $Z$  до правой системы координат (рис. 9.6а). Характеристики траекторий в этой системе определяются только по ранее найденным ее параметрам, если заданы широта  $\varphi_0$  точки старта и активная угловая дальность  $\Phi_a$ . Так, долгота узла  $\Omega_y$  определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_1 &= \theta_1 + \omega_1, \quad u_0 = u_1 - \Phi_a, \\ \cos z_0 &= \sin u_0 \sin i, \quad \cos h = \cos u_0 / \sin z_0, \\ \cos v_0 &= \frac{\sin \varphi_0 - \cos i_L \cos z_0}{\sin i_L \sin z_0}, \\ \Omega_y &= v_0 - h \text{ или } \Omega_y = -v_0 - h \quad \square \quad (4.6) \end{aligned}$$

(в зависимости от того, правее или левее меридиана оси  $X$  хотим получить точку  $B_0$ ). Очевидно, при фиксированных значениях  $i$  и  $u_0$  существует два положения точки  $B_0$  с одной и той же величиной угла  $v_0$  (рис. 9.6а). В формулах (4.6)  $u_0$  есть аргумент широты точки старта  $B_0$ ;  $z_0$  — угловое расстояние точки  $B_0$  от оси  $z$ ;  $h$  — угол между дугами больших кругов, проведенных от оси  $z$  к точкам  $B_0$  и  $\Omega_y$  (рис. 9.6а);  $i_L$  — угол между плоскостями экватора и лунной орбиты.

Зная величины  $r_1$ ,  $i$ ,  $u_1$  и  $\Omega_y$ , можно по известным формулам небесной механики (Приложение 6) найти начальные координаты и скорости в системе XYZ:

$$\begin{aligned} X_1 &= r_1 (\cos u_1 \cos \Omega_y - \sin u_1 \sin \Omega_y \cos i), \\ Y_1 &= r_1 (\cos u_1 \sin \Omega_y + \sin u_1 \cos \Omega_y \cos i), \\ Z_1 &= r_1 (\sin u_1 \sin i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= V_1 (\cos \mathfrak{M}_1 \cos \Omega_y - \sin \mathfrak{M}_1 \sin \Omega_y \cos i), \\ \dot{Y}_1 &= V_1 (\cos \mathfrak{M}_1 \sin \Omega_y + \sin \mathfrak{M}_1 \cos \Omega_y \cos i), \\ \dot{Z}_1 &= V_1 \sin \mathfrak{M}_1 \sin i, \quad \mathfrak{M}_1 = u_1 + (90^\circ - \theta_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Азимуты  $a_0$  и  $a_1$  в точках старта  $B_0$  и начала  $B_1$  пассивного участка, широта  $\varphi_1$  точки  $B_1$  и углы  $\lambda_0$  и  $\Delta\lambda$  (соответственно угол между меридианами оси  $X$  и точки старта и угол между меридианами точек  $B_0$  и  $B_1$  на рис. 9.6a) находятся по следующим формулам сферической тригонометрии:

$$\begin{aligned} \cos m &= \sin i_L \cos \Omega_y, \quad \cos a_0 = \frac{\cos u_0 \cos \varphi_0 - \cos m}{\sin u_0 \cos \varphi_0}, \\ \sin \varphi_1 &= \sin \varphi_0 \cos \Phi_a + \cos \varphi_0 \sin \Phi_a \cos a_0, \\ \cos a_1 &= \frac{\sin \varphi_1 \cos \Phi_a - \sin \varphi_0}{\cos \varphi_1 \sin \Phi_a}, \\ \sin \Delta\alpha &= \frac{\sin \Phi_a \sin a_0}{\cos \varphi_1}, \quad \sin \lambda_X = \frac{\sin \Omega_y}{\sin m}, \\ \cos \sigma &= \frac{\cos u_0 - \cos m \sin \varphi_0}{\sin m \cos \varphi_0}, \quad \lambda_0 = \lambda_X + \sigma, \quad \square \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $m$  — угловое расстояние узла  $\Omega_y$  от полюса  $P$ ,  $\lambda_X$  — угол между меридианами узла и оси  $X$ , а  $\sigma$  — угол между меридианами узла и точки старта  $B_0$ .

Зная разность долгот узла в системах координат XYZ и  $xuz$

$$\Delta\Omega = \Omega_y - \overline{\Omega}, \quad (4.10)$$

найдем значение угла  $\gamma_1$  между направлением геоцентрического радиуса Луны в момент  $t_1$  отсечки двигателя и отрицательным направлением оси  $X$ , а также начальные

координаты и скорости Луны по формулам (рис. 9.5):

$$\gamma_1 = \omega_L T_{1,2} - \Delta \Omega, \quad (4.11)$$

$$X_L = -r_L \cos \gamma_1, \quad Y_L = r_L \sin \gamma_1, \quad Z_L = 0,$$

$$\dot{X}_L = -V_L \sin \gamma_1, \quad \dot{Y}_L = V_L \cos \gamma_1, \quad \dot{Z}_L = 0,$$

где  $\omega_L$  — угловая скорость обращения Луны.

Наконец, найдем координаты  $\xi_L, \eta_L, \zeta_L$  точки падения на поверхности Луны, скорость  $U_L$  соударения и угол  $\theta_L$  между ее направлением и поверхностью Луны в точке соударения:

$$\blacksquare \quad \cos \theta_L = \frac{1}{e'} \left( \frac{p'}{\rho_L} - 1 \right), \quad u_L = \vartheta_L + \omega', \quad \Omega' = \overline{\Omega}' - \omega_L T_{2,L},$$

$$\xi_L = \rho_L (\cos u_L \cos \Omega' - \sin u_L \sin \Omega' \cos i'),$$

$$\eta_L = \rho_L (\cos u_L \sin \Omega' + \sin u_L \cos \Omega' \cos i'),$$

$$\zeta_L = \rho_L \sin u_L \sin i',$$

$$U_L^2 = 2\mu_L \left( \frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_*} \right) + U^2,$$

$$\cos \theta_L = \frac{\rho_*}{\rho_L} \frac{U}{U_L} \sin \alpha'_2. \quad \square \quad (4.12)$$

Здесь  $\vartheta_L, u_L$  — истинная аномалия и аргумент широты точки соударения,  $\overline{\Omega}', \Omega'$  — соответственно долготы узла в системе  $m_L \xi_B \eta_B \zeta_B$  в момент  $t_2$  входа в СД и в момент  $t_L$  соударения,  $\mu_L$  — гравитационный параметр Луны,  $U_2$  — модуль входной селеноцентрической скорости,  $\alpha_2$  — ее угол с селеноцентрическим радиусом  $\rho_2$  на границе СД.

Заметим, что для траектории, достаточно точно попадающей в центр Луны, величина  $\theta_L$  близка к  $180^\circ$ , координаты точки попадания пропорциональны скорости соударения и угол  $\theta_L$  близок к  $90^\circ$ .

По формулам настоящего параграфа были проведены расчеты номинальных попадающих траекторий, результаты которых были сравнены с результатами точного расчета (с учетом возмущений от Земли и Луны). Различия в значениях координат на границе СД и на поверхности Луны составили всего лишь несколько десятков километров, что свидетельствует о достаточной точности приближенной методики.

### § 9.5. Расчет варьированных траекторий методом игнорирования возмущений

Когда номинальная траектория найдена, то для определения соответствующего влияния разброса начальных данных достаточно определить отклонения точек падения на поверхности Луны, отвечающих траекториям с различными известными отклонениями начальных данных от номинальных. Таким образом, в отличие от краевой задачи предыдущего параграфа, для определения отклоненных траекторий получается более простая задача — задача Коши. Однако, несмотря на то, что начальные данные КА и СД известны, задача все же является задачей о точке встречи. Проще всего ее решение получить последовательными приближениями — одномерными итерациями по времени на заданное расстояние  $\rho = \rho_*$  КА от центра  $m_L$  Луны. Ниже дается способ определения начальных данных для отклоненных траекторий и итерационный метод расчета.

Отклонения начальных данных от номинальных целесообразно задавать не в системе координат  $XYZ$ , а в системе  $hls$ , связанной с началом пассивного участка траектории и имеющей плоскость траектории  $lh$  своей основной плоскостью: ось  $h$  направлена по радиусу  $r_1$ , а ось  $l$  — по трансверсали в направлении полета. Отклонения начальных данных рассмотрим такие:

I. Отклонение начального радиуса-вектора КА от номинального.

II. Отклонение вектора начальной скорости КА от номинального.

III. Отклонение времени начала движения от номинального.

В настоящем параграфе будут рассмотрены лишь простейшие отклонения, т. е. отклонение только одной из компонент  $r_1$  или  $V_1$  в системе координат  $hls$  или отклонение только времени.

I. Варьируются начальные координаты.

1)  $\delta H_1 \neq 0$  (дается отклонение по высоте). Тогда  $r_1$ ,  $V_L$  и  $\Delta V_1$  заменяются соответственно величинами

$$\begin{aligned} r_1^B &= r_1 + \delta H_1 & V_n &= \sqrt{2\mu_G/r_1^B}, \\ \Delta V_1^B &= \Delta V_1 + 2\mu_G/(V_n + V_n^B) (\delta H_1/r_1 r_1^B). \end{aligned} \quad (5.1)$$



Поскольку при этом аргумент  $u_1$  широты, узел  $\Omega_y$  и наклонение  $i$  траектории не меняются, то по формулам (4.7) находятся варьированные значения  $X_1^B, Y_1^B, Z_1^B$ .

2)  $\delta l \neq 0$  (дается смещение в направлении полета по трансверсали). Вектор с компонентами  $L_1 = C_2 Z_1 - C_3 Y_1$ ,  $L_2 = C_3 X_1 - C_1 Z_1$ ,  $L_3 = C_1 Y_1 - C_2 X_1$ , где  $C_1, C_2, C_3$  — компоненты секториальной скорости, направлен по оси  $l$ . Найдя его модуль  $L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$ , получим варьированные координаты

$$X_1^B = X_1 + L_1 \delta l / L, \quad Y_1^B = Y_1 + L_2 \delta l / L, \quad Z_1^B = Z_1 + L_3 \delta l / L, \quad (5.2)$$

начальный радиус  $r_1^B$ , параболическую скорость  $V_n^B$  и избыток  $\Delta V_1^B$  начальной скорости над местной параболической:

$$r_1^B = \sqrt{r_1^2 + \delta l^2}, \quad V_n^B = \sqrt{2\mu_G / r_1^B},$$

$$\Delta V_1^B = \Delta V_1 + \frac{2\mu_G}{(V_n + V_n^B)} \frac{\delta l}{r_1 r_1^B} \frac{\delta l}{(r_1 + r_1^B)}. \quad (5.3)$$

При этом изменяется на малые первого порядка еще и угол  $\theta_1$ :

$$\sin \theta_1^B = (\dot{X}_1 X_1^B + \dot{Y}_1 Y_1^B + \dot{Z}_1 Z_1^B) / r_1^B V_1. \quad (5.3')$$

3)  $\delta s \neq 0$  (дается боковое отклонение). Тогда

$$X_1^B = X_1 + C_1 \delta s / C, \quad Y_1^B = Y_1 + C_2 \delta s / C,$$

$$Z_1^B = Z_1 + C_3 \delta s / C, \quad r_1^B = \sqrt{r_1^2 + \delta s^2}, \quad V_n^B = \sqrt{\frac{2\mu_G}{r_1^B}}, \quad (5.4)$$

$$\Delta V_1^B = \Delta V_1 + \frac{2\mu_G}{(V_n + V_n^B)} \cdot \frac{\delta s^2}{(r_1 + r_1^B) r_1 r_1^B}.$$

Хотя угол  $\theta_1$  изменяется тоже на малые второго порядка, влияние этих изменений не так существенно, как влияние  $\Delta V_1^B$ .

II. Варьируется вектор начальной скорости. Его вариациями будем считать вариации модуля  $\delta V_1$  и направления  $\delta \theta_1$  скорости в плоскости траектории и вариации боковой компоненты  $\delta \dot{s} = \dot{s}$  скорости (поскольку для номинальной траектории  $\dot{s} = 0$ ).

1)  $\delta V_1 \neq 0$ . Тогда  $\Delta V_1^B = \Delta V_1 + \delta V_1$ ,  $V_1^B = V_1 + \Delta V_1^B$ , и по формулам (4.8) находятся компоненты  $\dot{X}_1^B, \dot{Y}_1^B, \dot{Z}_1^B$  начальной скорости.

2)  $\delta \theta_1 \neq 0$ . Тогда  $\theta_1^B = \theta_1 + \delta \theta$ ,  $\mathfrak{M}_1^B = \mathfrak{M}_1 - \delta \theta_1$ . Компоненты скорости находятся по тем же формулам (4.8).

3)  $\delta s \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{X}_1^B &= \dot{X}_1 + C_1 \delta \dot{s} / C, & \dot{Y}_1^B &= \dot{Y} + C_2 \delta \dot{s} / C, \\ \dot{Z}_1^B &= \dot{Z}_1 + C_3 \delta \dot{s} / C, & V_1^B &= \sqrt{V_1^2 + \delta \dot{s}^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

а  $\Delta V_1^B$  находится как меньший корень квадратного уравнения  $(2V_1 + \Delta V_1^B) \Delta V_1^B = (2V_1 + \Delta V_1) \Delta V_1 + \delta \dot{s}^2$ .

III. Варьируется только момент  $t_1$  начала движения на пассивном участке, т. е.  $\delta t_1 \neq 0$ .

Тогда координаты и компоненты скорости находятся по сходным формулам:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_1 \cos i_L - Z_1 \sin i_L, & \dot{X}_0 &= \dot{X}_1 \cos i_L - \dot{Z}_1 \sin i_L, \\ Y_0 &= Y_1, & \dot{Y}_0 &= \dot{Y}_1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= X_1 \sin i_L + Z_1 \cos i_L, & \dot{Z}_0 &= \dot{X}_1 \sin i_L + \dot{Z}_1 \cos i_L; \\ \delta \lambda &= \omega_G \delta t_1; \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} X_0^B &= X_0 \cos \delta \lambda + Y_0 \sin \delta \lambda, & \dot{X}_0^B &= \dot{X}_0 \cos \delta \lambda - \dot{Y}_0 \sin \delta \lambda, \\ Y_0^B &= X_0 \sin \delta \lambda + Y_0 \cos \delta \lambda, & \dot{Y}_0^B &= \dot{X}_0 \sin \delta \lambda + \dot{Y}_0 \cos \delta \lambda, \\ Z_0^B &= Z_0; & \dot{Z}_0^B &= \dot{Z}_0; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} X_1^B &= X_0^B \cos i_L + Z_0^B \sin i_L, & \dot{X}_1^B &= \dot{X}_0^B \cos i_L + \dot{Z}_0^B \sin i_L, \\ Y_1^B &= Y_1^B, & \dot{Y}_1^B &= \dot{Y}_0^B, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$Z_1^B = -X_0^B \sin i_L + Z_0^B \cos i_L; \quad \dot{Z}_1^B = -\dot{X}_0^B \sin i_L + \dot{Z}_0^B \cos i_L.$$

Кроме того, угловое изменение положения Луны за время  $\delta t_1$  определяется по формуле  $\gamma^B = \gamma_1 - \omega_L \cdot \delta t_1$ .

Таким образом, для всех отклоненных траекторий имеем начальные координаты и скорости. По ним с помощью известных формул небесной механики (Приложе-

ние 8) находятся кеплеровы элементы  $\Omega^B, i^B, p^B, e^B, \omega^B$  участка движения к СД и аргумент широты для точки  $B_1$ .

Переходим теперь к итерационному процессу определения точки входа отклоненной траектории в СД.

Поскольку по точке  $(\vartheta_2, r_2)$  (где  $\vartheta_2$  — истинная аномалия, соответствующая радиусу  $r_2$ ) время полета  $T_{1,2}$  численно определяется проще, чем точка  $(\vartheta_2, r_2)$  по заданному времени полета  $T_{1,2}$ , то итерации на получение  $\rho_2 \rightarrow \rho_*$  выгодно вести не по времени, а по радиусу  $r_2$ .

Задаввшись какой-либо величиной  $r_2^{(n)}$  (равной, например, значению  $r_2$  для номинальной траектории), находим по величинам  $p^B, e^B, r_2^{(n)}$  истинную аномалию  $\vartheta_2^{(n)}$  из уравнения конических сечений и определяем время полета  $T_{1,2}^{(n)}$ . Затем находим координаты Луны в момент  $t_2^{(n)} = t_1^{(B)} + T_{1,2}^{(n)}$ .

$$X_L^{(n)} = -a_L \cos \varphi^{(n)}, \quad Y_L^{(n)} = -a_L \sin \varphi^{(n)}, \quad Z_L^{(n)} = 0, \quad (5.10)$$

где  $\varphi^{(n)} = -\gamma_1^B + \omega_L T_{1,2}^{(n)}$  — угол между направлением геоцентрического радиуса Луны в момент  $t_2^{(n)}$  и отрицательным направлением оси  $X$ . Теперь находим расстояние  $\rho_2^{(n)}$  в момент  $t_2^{(n)}$  по формуле

$$\rho_2^{(n)} = \sqrt{[X_2^{(n)} - X_L^{(n)}]^2 + [Y_2^{(n)} - Y_L^{(n)}]^2 + [Z_2^{(n)} - Z_L^{(n)}]^2}, \quad (5.11)$$

в которой  $X_2^{(n)}, Y_2^{(n)}, Z_2^{(n)}$  находятся с помощью формул (4.7) по величинам  $r_2^{(n)}, \Omega^B, i^B$  и  $u_2^{(n)} = \vartheta_2^{(n)} + \omega^B$ .

Если оказывается, что  $|\rho_2^{(n)} - \rho_*| > \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — требуемая точность, то применяем метод хорд, даем величине  $r_2^{(n)}$  малое приращение  $\Delta r_2$  (в расчетах было принято  $\Delta r_2 = 5000$  км) и производим расчет для  $r_2^{(n+1)} = r_2^{(n)} + \Delta r_2$ . Получив для значения  $r_2^{(n+1)}$  величину  $\rho_2^{(n+1)}$ , находим следующее приближение:

$$r_2^{(n+2)} = r_2^{(n)} + \frac{[\rho_* - \rho^{(n)}][r_2^{(n+1)} - r_2^{(n)}]}{(\rho^{(n+1)} - \rho^{(n)})}, \quad \rho_2^{(n+2)} = \rho_2[r_2^{(n+2)}]. \quad (5.12)$$

Повторяем итерации до тех пор, пока они с нужной точностью не сойдутся к предельным значениям. Обозна-

чим эти предельные величины через

$$r_2^B, T_{1,2}^B, t_2^B = t_1^B + T_{1,2}^B, \\ \rho_2^B = \rho_*, X_2^B, Y_2^B, Z_2^B, X_L^B, Y_L^B, Z_L^B, \theta_2^B, u_2^B, \varphi^B,$$

где  $\varphi^B = \omega_L T_{1,2}^B - \gamma_1^B$ .

Когда итерации сошлись, то из интеграла энергии находим входную геоцентрическую скорость  $V_2^B = V_2(r_2^B)$ , а из интеграла площадей — угол  $\alpha_2^B$  между вектором этой скорости и входным геоцентрическим радиусом; это возможно благодаря тому, что перед итерациями были найдены начальные данные  $r_1^B, V_1^B, \theta_1^B$  и элементы отклоненного конического сечения.

Далее находим величину аналога аргумента широты  $\mathfrak{M}_2^B = u_2^B + \alpha_2^B$  и по формулам (4.8) находим компоненты  $\dot{X}_2^B, \dot{Y}_2^B, \dot{Z}_2^B$  скорости в точке входа в СД, а затем определяем координаты и скорости в системе координат  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  при  $t = t_2^B$ :

$$\xi_B^B = (X_2^B - X_L^B) \cos \varphi^B + (Y_2^B - Y_L^B) \sin \varphi^B, \\ \eta_B^B = -(X_2^B - X_L^B) \sin \varphi^B + (Y_2^B - Y_L^B) \cos \varphi^B, \quad (5.13)$$

$$\zeta_B^B = Z_2^B;$$

$$\dot{\xi}_B^B = (\dot{X}_2^B - \dot{X}_L^B) \cos \varphi^B + (\dot{Y}_2^B - \dot{Y}_L^B) \sin \varphi^B,$$

$$\dot{\eta}_B^B = -(\dot{X}_2^B - \dot{X}_L^B) \sin \varphi^B + (\dot{Y}_2^B - \dot{Y}_L^B) \cos \varphi^B, \quad (5.14)$$

$$\dot{\zeta}_B^B = \dot{Z}_2^B.$$

По этим величинам в момент времени  $t_2^B$  находим в системе координат  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  значения кеплеровых элементов  $\Omega', i', p', e', \omega'$  селеноцентрического конического сечения, а по ним — время полета  $T_{2,L}^B$  от границы СД до поверхности Луны.

Чтобы вычислить по формулам (4.12) координаты  $\xi_L^B, \eta_L^B, \zeta_L^B$  точки падения на поверхности Луны, находим долготу узла в системе координат  $\xi_B, \eta_B, \zeta_B$  в момент соударения и аргумент широты. Затем из (4.12) находим величину скорости соударения и угол между ее направлением и поверхностью Луны в точке соударения.

### § 9.6. Влияние разброса начальных данных на точки входа в сферу действия Луны

Чтобы получить представление о влиянии разброса начальных данных, рассмотрим сначала картину расположения точек входа отклоненных траекторий в СД, а затем — картину расположения соответствующих точек падения. В системе координат  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$  точки входа на СД и поверхности Луны наиболее наглядным образом проецируются на плоскость  $\eta_n, \zeta_n$ , поскольку для начальных скоростей, не близких к минимальным, траектории попадания вблизи Луны не очень сильно отклоняются от направления Земля — Луна.

Рассмотрим в качестве примера номинальную попадающую траекторию с избытком начальной скорости над местной параболической  $\Delta V_1 = 0,170$  м/с, радиусом начала пассивного участка  $r_1 = 7000$  км и наклонением плоскости траектории к плоскости орбиты Луны  $i = 70^\circ$ .

Для рассматриваемой траектории координаты номинальной точки входа в СД, вычисленные по формулам § 9.5, оказались следующими:  $\xi_n = 62\,663$  км,  $\eta_n = -20\,218$  км,  $\zeta_n = 4539$  км (рис. 9.7). Малость величины  $\zeta_n$  по сравнению с величинами  $\xi_n$  и  $\eta_n$  объясняется тем, что цель находится в плоскости  $\zeta_n = 0$ , а компонента  $\zeta_n$  мала по сравнению с величиной входной селеноцентрической скорости (согласно геоцентрическому интегралу площадей, значение  $|\dot{\zeta}_n|$  не может превышать 0,2 км/с).

Лучи, выходящие из точки входа номинальной траектории в СД, представляют собой геометрические места точек входа отклоненных траекторий, получающихся при отклонении одного из начальных параметров от номинального. Величины отклонений указаны вдоль лучей цифрами:  $\delta H_1, \delta l, \delta s$  — в км,  $\delta V_1, \delta s$  — в м/с,  $\delta \theta_1$  — в угловых минутах,  $\delta t_1$  — в секундах. Стрелки указывают направления смещений точки входа, вызываемых положительными ошибками.

Видим, что направление смещений, обусловленных ошибками  $\delta l$ , близко к направлению смещений от ошибок  $\delta \theta_1$ .

Угол наклона обоих направлений смещений к оси  $\eta$  близок к  $70^\circ$ , т. е. к углу  $i$ . Объясняется это тем, что ошибки  $\delta l$  и  $\delta \theta_1$  не вызывают изменения плоскости траектории движения к СД и практически не сказываются на времени полета (зависящего в основном от начальной скорости).

Обратим внимание на то, что положительное значение ошибки  $\delta l$  вызывает смещение вверх, т. е. в ту же сторо-

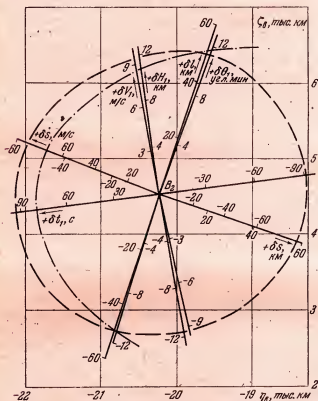


Рис. 9.7. Смещение точки входа траектории на сфере действия Луны при отклонении одного из шести начальных данных или начального момента времени от номинальных значений. Номинальное значение  $\Delta V_1 = +0.170$  км/сек. Точки пунктирной кривой соответствуют траекториям, касающимся поверхности Луны; точки штрихпунктирной кривой соответствуют траекториям, достигшим лунной поверхности в точках, отделяющих невидимую с Земли часть поверхности от видимой.

ну, что и ошибка  $\delta\theta_1 > 0$ , хотя, казалось бы, ошибка  $\delta l$  должна вызывать в основном увеличение начального аргумента широты, т. е. поворот орбиты и смещение точки входа вниз, в противоположную сторону. Смещение точки входа вверх при  $\delta l > 0$  объясняется тем, что ошибка  $\delta l > 0$  приводит к связанному с ней линейному изменению наклона вектора начальной скорости к местному горизонту  $\delta\theta_1 = \delta l / r_1 > 0$  (см. формулу (5.3')), оказывающему на смещение точки входа преобладающее влияние.

Действительно, из рис. 9.7 видно, что ошибки  $\delta l = 50$  м и  $\delta\theta_1 \approx 0,0035$  рад вызывают примерно одинаковые смещения точки входа, а сопряженные с  $\delta l$  величины  $\delta\omega_1$  и  $\delta\theta_1$  равны каждой значению  $\delta l / r_1 \approx 0,007$  рад (с точностью до малых второго порядка). Поскольку известно, что при начальных скоростях, близких к параболическим, изменение  $\delta\theta_1$  угла  $\theta_1$  вызывает поворот траектории на угол, примерно вдвое больший, т. е. на угол  $2\delta\theta_1$ , то влияние  $\delta\omega_1$  компенсирует лишь половину влияния  $\delta\theta_1$ : оставшаяся половина  $\delta\theta_1/2 = 0,0035$  рад как раз и вызывает такое смещение, как и ошибка  $\delta\theta_1 = 12'$ .

Смещения точки входа, вызываемые боковыми ошибками  $\delta s$  и  $\delta s$  в положении и в скорости (рис. 9.7), оказываются перпендикулярными плоскости траектории, поскольку эти ошибки практически не меняют времени полета.

Однако при положительных ошибках знаки смещений противоположны, потому что при  $\delta s > 0$  плоскость траектории поворачивается налево относительно начального радиуса-вектора, если смотреть с его конца, а при  $\delta s < 0$  она поворачивается направо, причем относительно геоцентрической прямой, параллельной вектору начальной скорости (если смотреть с его конца). Ошибка  $\delta V_1$  не вызывает поворота плоскости траектории, но существенно меняет время полета до СД. При  $\delta V_1 > 0$  траектория проходит выше номинальной и достигает сферы действия Луны в точке левее номинальной, поскольку вследствие уменьшения времени полета номинальная точка не успевает достигнуть плоскости отклоненной траектории.

Ошибки в начальном радиусе  $\delta r_1 = \delta H_1$  тоже не вызывают поворота плоскости траектории. Направление соответствующих смещений точки входа из-за этих ошибок

близко к направлению смещений, вызываемых ошибками  $\delta V_1$ , потому что ошибки  $\delta H_1$  влияют главным образом через изменение избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической. Изменение избытка  $\Delta V_1$  при фиксированном значении  $V_1$  обратно (по знаку) изменению местной параболической скорости в зависимости от радиуса. Действительно, изменение параболической скорости выражается формулой  $\delta V_{\pi} = -\frac{1}{2} V_{\pi} \frac{\delta r_1}{r_1}$ , по которой, например, при  $\delta r_1 = 12$  км и  $r_1 = 7000$  км получаем  $\delta(\Delta V_1) = -\delta V_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 10,4 \cdot \frac{12}{7000} \approx 0,009$  км/с. С другой стороны, из рис. 9.7 видно, что ошибка  $\delta V_1 = 9$  м/с приводит примерно к тому же смещению, что и ошибка  $\delta H_1 = \delta r_1 = 12$  км. Отсюда следует, что изменение начальной высоты при сохранении избытка начальной скорости над параболической сказывается весьма слабо. Этот вывод согласуется с результатами, известными для случая плоских траекторий полета [2—1957].

Наконец, ошибка  $\delta t_1$  не влияет на изменение формы траектории, а вызывает поворот ее как жесткого целого вокруг земной оси с запада на восток. Вследствие того, что угловая скорость  $\omega_0$  суточного вращения Земли почти в 30 раз превосходит угловую скорость  $\omega_L$  обращения Луны по орбите, при анализе влияния ошибки  $\delta t_1 \neq 0$  можно СД Луны считать неподвижной. Тогда ясно, что на сфере радиуса орбиты Луны при  $\delta t_1 > 0$  конец траектории будет смещаться влево и вниз для долготы узла  $\varnothing_y > 0$ ; влево и вверх — для  $\varnothing_y < 0$  (при  $|\varnothing_y| < 90^\circ$ ), а на СД эти смещения будут еще несколько повернуты против часовой стрелки вследствие неортогональности касательной плоскости к СД в номинальной точке входа  $B_2$  к геоцентрическому радиусу этой точки (рис. 9.7 соответствует случаю  $\varnothing_y > 0$ ).

Исследуем теперь изменение расположения лучей на СД (рис. 9.7) с изменением долготы узла траектории  $\varnothing_y$  при фиксированном азимуте прицеливания  $a_0$ . Из рис. 8.4 следует, что при  $a_0 = \text{const}$  и при  $|\varnothing_y| < 90^\circ$  наклонение траектории  $i(\varnothing_y)$  является монотонно возрастающей функцией. Поэтому при возрастании  $\varnothing_y$  пары лучей  $\delta l$ ,  $\delta \theta_1$  и  $\delta s$ ,  $\delta s$ , оставаясь ортогональными, будут поворачи-



чиваться против часовой стрелки. Пара лучей  $\delta V_1$ ,  $\delta H_1$  также поворачивается против часовой стрелки, оставаясь на примерно прежних расстояниях по оси  $\eta_a$  от нового положения пары лучей  $\delta l$ ,  $\delta \theta_1$ . Наконец, луч  $\delta t_1$  повернется в том же направлении, согласно соображениям предыдущего абзаца. При уменьшении  $\Omega_y$  все вращения будут происходить в обратном направлении, т. е. по часовой стрелке.

При изменении азимута  $a_0$ , например, при его уменьшении, как следует из рис. 8.4, значения  $i$  при всех значениях  $\Omega_y$  увеличиваются, причем примерно на одну и ту же величину. Соответственно будут поворачиваться против часовой стрелки все лучи, кроме луча  $\delta t_1$ , направление которого зависит главным образом от  $\Omega_y$  (при фиксированном значении избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической) и потому существенно не изменится.

Рассмотрим, наконец, изменение смещений точек входа на СД в зависимости от изменения избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над параболической.

Если рассмотренные выше изменения  $a_0$  и  $\Omega_y$  вызывали в основном повороты лучей вокруг номинальной точки входа, а на длине их сказывались незначительно, то изменение номинального значения  $\Delta V_1$  очень существенно отражается и на длине лучей, соответствующих фиксированным отклонениям начальных данных от номинальных значений. Так, длина лучей  $\delta V_1$  и  $\delta H_1$  быстро возрастает с приближением величины  $\Delta V_1$  к минимальному значению. Например, для траектории с параметрами  $\Delta V_1 = -0,084$  км/с,  $r_1 = 7000$  км при  $i \approx 70^\circ$  (рис. 9.8) длина лучей увеличивается примерно в четыре раза по сравнению с длиной при  $\Delta V_1 = +0,170$  км/с (ср. рис. 9.7 и 9.8). Объясняется это существенным возрастанием кривизны траектории и времени полета.

Длина луча  $\delta s$  с уменьшением величины  $\Delta V_1$  изменяется менее заметно, но сам луч искривляется. Объясняется это тем, что при малых значениях  $\Delta V_1$  боковая прибавка  $\delta s$  к скорости уже заметно изменяет время полета.

Длина и характер лучей  $\delta s$ ,  $\delta l$ ,  $\delta \theta_1$ ,  $\delta t_1$  меняются не так существенно из-за геометричности влияния отклонений  $\delta s$ ,  $\delta l$ ,  $\delta \theta_1$  и  $\delta t_1$  на смещение точки входа на СД.

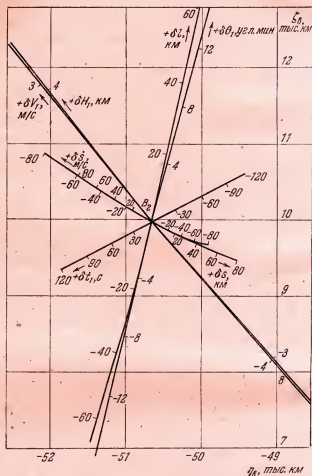


Рис. 9.8. Смещение точки входа траектории на сфере действия Луны при отклонении одного из шести начальных данных или начального момента времени от номинальных значений. Номинальное значение  $ΔV_1 = -0,084$  км/с.

Направление пар лучей  $\delta s$ ,  $\delta s$  и  $\delta l$ ,  $\delta \theta$ , не зависит от  $\Delta V_1$ . Отклонение направления лучей  $\delta V_1$ ,  $\delta H_1$  от направления лучей  $\delta l$ ,  $\delta \theta$ , возрастает соответственно увеличению влияния изменений времени полета из-за ошибок  $\delta V_1$ ,  $\delta H_1$ .

Направление лучей  $\delta t_1$  несколько поворачивается против часовой стрелки вследствие перемещения номинальной точки входа в сторону меньших значений  $\eta_*$  и уменьшения угла между касательной к геоцентрической траектории и поверхностью СД в точке входа.

Заметим, что при начальных скоростях, не близких к минимальным, линейность зависимости смещения  $d$  точки входа от отклонений начальных данных проявляется не только в более четкой прямолинейности лучей, но и в пропорциональности смещений отклонениям. Например, на рис. 9.7 нарушения прямолинейности и пропорциональности гораздо меньше тех, которые можно было бы заметить при таком графическом исполнении чертежа.

Отметим, что при учете второстепенных факторов (гл. 10) картина лучей на СД будет лишь несущественно отличаться от рассмотренной: появится сдвиг номинальной точки входа на несколько десятков километров, который вызовет поворот картины как целого на угол порядка тысячной доли радиана. Такого же порядка будут и угловые искажения самих лучей. Например, при учете возмущений в варианте расчета, представленного на рис. 9.3, точка входа в СД вместо координат, приведенных в начале § 9.3, будет иметь координаты  $\xi_* = 62\,675$  км,  $\eta_* = -20\,183$  км и  $\xi_* = 4533$  км, так что ее смещение составит лишь около 40 км.

### § 9.7. Влияние разброса начальных данных на точки падения

Рассмотрим картину точек падения на поверхности Луны (рис. 9.9), соответствующую описанной выше (рис. 9.7) картине точек входа на СД. Проходящие через номинальную точку падения лучи, отвечающие отклонениям  $x$  только одного из начальных данных от номинального, проходят довольно точно по меридианам лунной сферы, если за ее полюс принять номинальную точку падения  $B_*$ . Это говорит о том, что селеноцентрическая

скорость входа в СД Луны весьма мало отклоняется от селеноцентрической плоскости соответствующего луча на СД.

Смещение  $y$  точки падения от номинальной вдоль луча не всюду пропорционально отклонению соответствующего начального параметра, а только в некотором круге (с радиусом порядка 500 км). За этим кругом смещение

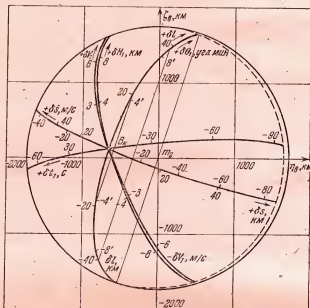


Рис. 9.9. Смещение точки падения на лунной поверхности при отклонении одного из шести начальных данных или начального момента времени от номинальных значений.

растет, причем чем дальше от круга, тем быстрее, так что у крайних точек, в которых траектории только касаются поверхности Луны, производная  $dy/dx$  делается неограниченной. Однако симметрия точек падения, отвечающих значениям  $x$  и  $-x$ , сохраняется вплоть до крайних точек луча. Это значит, что отклонения входной селеноцентрической скорости от номинальной, если они есть, тоже симметричны.

Покажем, что эти отклонения действительно имеются и направлены от центра Луны. Для этого заметим, что при скоростях, не близких к минимальным, отклонения величины  $V_2$  входной геоцентрической скорости и угла  $\alpha_2$  между ее направлением и геоцентрическим радиусом от номинальных значений с изменением геоцентрического радиуса точки входа в широком диапазоне  $r_L - \rho_* < r < r_L + \rho_*$  сравнительно невелики. Например, для рассматривавшейся на рис. 9.7 траектории эти отклонения составляют:  $|\delta V_2| < 0,09$  км/с и  $|\delta \alpha_2| < 0^\circ,9$  (рис. 4.5). Размеры пятна на СД, соответствующего крайним траекториям (траекториям касания), невелики по сравнению с указанным выше диапазоном  $2\rho_*$ . Их приближенно можно определить согласно гл. 7, считая вектор  $U_2$  входной селеноцентрической скорости не зависящим от положения точки входа на пятне. Тогда это пятно оказывается кругом радиуса  $d(U)$ , где  $U = |U_2|$  (рис. 4.10). Например, для рассматривавшейся на рис. 9.7 номинальной траектории  $U \approx 2,6$  км/с (рис. 4.5) и  $d(U) = 2340$  км.

Так как  $d(U)/2\rho_*$  составляет менее 0,02, а изменения величин  $V_2$  и  $\alpha_2$  внутри пятна должны составлять долю того же порядка от полученных выше величин  $\delta V_2$ ,  $\delta \alpha_2$ , то при рассмотрении траекторий попадания в Луну этими изменениями можно пренебречь. Следовательно, изменения направления вектора  $U_2$  должны быть связаны главным образом с отклонением направлений геоцентрических радиусов  $r_2$  (различных точек входа на пятне) от номинального. Нетрудно видеть, что это отклонение вызывает отклонение направления вектора  $U_2$  от центра Луны на наибольшую величину при расположении траектории в плоскости орбиты Луны. Для этого случая (рис. 9.10) приближенный расчет отклонения  $\Delta\theta_2$  вектора  $U_2$  от номинального производится по формулам ( $V_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $U$  находятся из рис. 4.5):

$$\sin \psi_2 \approx \frac{V_2 \cos \alpha_2}{U},$$

$$\sin \varphi_2 = \rho_* \cos \psi_2 / r_2, \quad r_2^2 = r_L^2 + \rho_*^2 - 2r_L \rho_* \sin \psi_2, \quad (7.1)$$

$$\Delta\varphi_2 = d(U) \sin \psi_2 / r_2, \quad U \cos \theta_2^\pm = V_L - V_2 \sin(\varphi_2 \pm \alpha_2),$$

$$\Delta\theta_2^\pm = \frac{V_2}{U} \left[ \frac{V_2}{U} - \frac{V_L}{U} \sin(\varphi_2 + \alpha_2) \right] \Delta\varphi_2, \quad (7.2)$$

причем (7.2) получается варьированием  $U \cos \theta_2$ ,  $U \sin \theta_2$  и исключением  $\Delta U$ .

Смысл обозначений виден из рис. 9.10. Результаты расчета отклонений  $\Delta \theta_2^+$  и  $\Delta \theta_2^-$  как функций избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической для

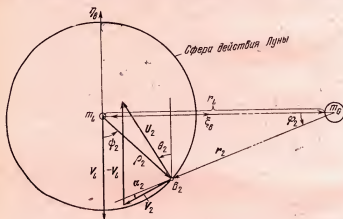


Рис. 9.10. Пересчет геоцентрических параметров движения (в плоскости лунной орбиты) в селеноцентрические параметры на сфере действия Луны.

нулевого угла  $\theta_1$  возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом и, соответственно, для наклонений  $i=0$  и  $i=\pi$  представлены на рис. 9.11. Там же показана зависимость уменьшения  $\Delta d^\pm = \rho_* \Delta \theta_2^\pm$  радиуса пятна на СД от изменения направления  $\theta_2$  скорости  $U_2$ . Видим, что уменьшение радиуса пятна на СД может достигать сотен километров. Фактически определенные контуры пятна на СД (на рис. 9.7 нанесены пунктирными линиями) согласуются с графиками на рис. 9.11. Заметим, что величина  $\rho_{\text{эфф}} = d - \Delta d$  по существу является эффективным радиусом Луны при попадании с Земли.

Определим теперь длину луча на поверхности Луны (рис. 9.9), т. е. угловое расстояние по лучу от номинальной точки падения до точки касания отклоненной траектории с поверхностью Луны. Если бы не было отклоне-

ния  $\Delta\theta_2$  селеноцентрической входной скорости, соответствующей точке касания, от номинальной, то, как нетрудно убедиться, для определения искомого углового расстояния имели бы формулу  $\Phi_k = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ , где  $\alpha$  — угол между выходной и входной селеноцентрическими скоростями

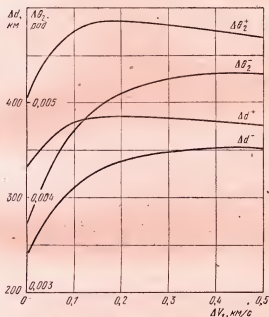


Рис. 9.11. Пределы изменений направления  $\Delta\theta_2$  селеноцентрической скорости входа и размеров  $\Delta d$  пятна на сфере действия вследствие отклонения точки входа от номинальной как функции избытка начальной скорости над местной параболической.

для траектории касания (рис. 4.10). С учетом отклонения  $\Delta\theta_2$  минимальная длина луча приближенно будет выражаться формулой

$$\Phi_k = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \Delta\theta_2. \quad (7.3)$$

Для варианта, представленного на рис. 9.7, получаем из рис. 4.10 и 9.11 для  $U \approx 2,6$  км/с величины  $\alpha$  и  $\Delta\theta_2$ , и формула (7.3) дает значение  $\Phi_k$  несколько большее  $100^\circ$ .

Заметим, что смещения точки встречи по лучам на поверхности не могут охватывать Луну полностью ни при какой начальной скорости: даже при минимальных скоростях угол  $\alpha < 120^\circ$  (рис. 4.10) и, следовательно,  $\Phi_k < 150^\circ$ . Значит, при любой фиксированной начальной скорости существует на Луне недостижимая область, близкая к кругу с центром в точке, противоположной номинальной. Для варианта, представленного на рис. 9.7, радиус этого круга оказывается порядка 900 км.

С помощью картины на СД (рис. 9.7) можно определить начальные данные, номинальные для попадания в видимую с Земли часть Луны (номинальные в том смысле, что величины предельных отклонений в начальных данных в противоположные стороны равны). Очевидно, для этого достаточно интерполяциями определить на лучах (на сфере действия) точки, соответствующие значению  $\xi_\lambda = 0$ , если вдоль соответствующих лучей на поверхности координата  $\xi_\lambda$  переходит через нуль. Соединив эти точки кривой (штрихпунктирная линия на рис. 9.7), отсечем от всего пятна область, соответствующую точкам падения на обратную сторону Луны. Тогда середина оставшейся области, очевидно, и будет отвечать номинальной траектории для попадания в видимую часть Луны. Эта средняя точка всегда смещена вправо и вниз от точки  $B_2$ .

Из рис. 9.7 видно, что предельно допустимые ошибки при попадании в видимую часть Луны имеют примерно тот же порядок, что и предельно допустимые ошибки при попадании во всю Луну. Величины последних по любому из начальных параметров при нулевых значениях ошибок по остальным параметрам, очевидно, можно определить из рис. 9.7 интерполяциями по соответствующему лучу на точку его пересечения с пунктирным кругом. Результаты этого определения представлены в табл. 9.1.

Изучим теперь характер зависимости отклонения точки падения от номинальной в результате ошибки в начальных данных. Для этого рассмотрим произвольный луч на поверхности Луны. Пусть  $y$  — угловое смещение точки падения по этому лучу, а  $x$  — соответствующее отклонение (линейная комбинация ошибок) в начальных данных. Покажем с помощью приближенной методики,



что функция  $y(x)$  в некоторой окрестности значения  $x=0$  имеет точку перегиба. Для этого сравним зависимости  $y(x)$  и  $\bar{y}(x)$  для притягивающей и непритягивающей Луны, пренебрегая отклонением направления

Т а б л и ц а 9.1

Ошибки	Предельная величина	Единица измерения
$\delta H_1$	11,6	км
$\delta l$	90,6	км
$\delta s$	96,4	км
$\delta V_1$	9,4	м/с
$\delta \theta_1$	51,4	угл. мин.
$\delta s$	58,4	м/с
$\delta t_1$	13,9	с

$\Delta \theta_2$  входной селеноцентрической скорости от номинального.

На границе СД Луны вектор  $U_2$  входной селеноцентрической скорости для траектории, отклоненной от номинальной на расстояние  $d$ , образует со входным селеноцентрическим радиусом такой угол  $\alpha(x)$ , что

$$\sin \alpha(x) = \frac{d(x)}{\rho_*}. \quad (7.4)$$

В случае непритягивающей Луны расстояние  $d$  между траекториями остается неизменным вплоть до поверхности Луны, так что получаем:

$$\sin \bar{y} = \frac{d(x)}{\rho_L}, \text{ т. е. } \sin \bar{y} = \frac{\rho_*}{\rho_L} \sin \alpha(x). \quad (7.5)$$

Для малых расстояний  $d$ , т. е. при малых значениях  $x$ , имеем:

$$\bar{y} = \frac{\rho_*}{\rho_L} \alpha(x). \quad (7.6)$$

В случае притягивающей Луны величина  $y$  будет меньше  $\bar{y}$ . Для определения этой разности найдем угол  $\Phi_{2,k}$  между селеноцентрическими радиусами точек входа и падения. Для движения по гиперболе в СД Луны с помощью формул теории конических сечений можно полу-

чить для малых значений  $x$ :

$$\Phi_{2, \kappa} = \left[ \sqrt{\left( \frac{\rho_*}{\rho_L} + \beta' - 1 \right) \beta' - \beta'} \right] 2\alpha(x).$$

Здесь  $\beta' = (U/U_n)^2 \geq 4$  (§ 3.4), где  $U = |U_2|$ , а  $U_n = 0,383$  км/с — селеноцентрическая параболическая скорость на расстоянии  $\rho_*$ . Далее имеем:

$$y = \alpha + \Phi_{2, \kappa} = \left\{ 1 + \frac{2 \left( \frac{\rho_*}{\rho_L} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho_*}{\rho_L} - 1 \right) \beta' + 1}} \right\} \alpha(x). \quad (7.7)$$

Величина в фигурных скобках для минимальных энергий траекторий попадания в Луну составляет около половины от  $\rho_*/\rho_L$ . Следовательно, вблизи номинальной траектории, т. е. при малых  $x$ , притяжение Луны уменьшает величину  $y$  примерно вдвое (для минимальных энергий). Вдали же от номинальной траектории, т. е. при больших  $x$ , это уменьшение исчезает.

В общем случае функция  $\bar{y}(x)$  имеет конечную производную в некоторой окрестности точки  $x=0$  (рис. 9.12). Функция же  $y(x)$  в окрестности точки  $x=0$  имеет производную, в 2 раза меньшую, чем функция  $\bar{y}(x)$ . Однако имеет место равенство  $y(0) = \bar{y}(0) = 0$ , и с увеличением  $x$  кривая  $y(x)$  асимптотически приближается к кривой  $\bar{y}(x)$ . Следовательно, кривая  $y(x)$  в окрестности точки  $x=0$  должна иметь точку перегиба. Вторые производные  $y''(x)$  в этой окрестности должны быть весьма близки к нулю, так как согласно § 9.3 функция  $d(x)$  в этой окрестности практически линейна.

Поскольку направление луча было выбрано произвольным, то из линейности функции  $y(x)$  и одинаковости ее преобразования в функцию  $y(x)$  для разных лучей  $l_1$  и  $l_2$  следует, что если величину  $x$  измерять в долях допустимого (предельного) отклонения  $x_d$ , то для произвольных направлений  $l_1$  и  $l_2$  отношение смещений  $y_1(x_1/x_{1d})$ :  $y_2(x_2/x_{2d})$  при всех  $x_1/x_{1d} = x_2/x_{2d}$  одинаково и весьма близко к единице. При этом имеет место как раз такой случай, когда при известных комбинациях ошибок на-

чальных данных для определения того, имеет место попадание или нет, не требуется знать старшие производные от смещения  $y(x)$ , а достаточно знать лишь первую производную  $y'(0)$ .

Действительно, смещение  $d(x)$  линейно и имеет производную, отличающуюся от производной  $y'(0)$  постоянным множителем. Этот множитель может быть получен из выражений (7.4) и (7.7). Зная линейную комбинацию ошибок  $x$  и величину  $y'(0)$ , можно найти  $d(x)$ . Очевидно, при  $d(x) < < \rho_{\text{эфф}}$  имеет место попадание, а при  $d(x) > \rho_{\text{эфф}}$  — промах.

Заметим, что относительная узость пучка попадающих траекторий и линейность смещения точки входа в СД вдоль соответствующего луча на пятне позволяют построить следующую приближенную методику прогнозирования точки падения на поверхности Луны (если отклонения  $\delta x_i$  начальных данных от номинальных известны достаточно точно). Зная на СД смещения  $d_i$ , вызываемые вдоль  $i$ -го луча единичными отклонениями параметров, и пользуясь линейностью смещения  $d(x)$ , найдем суммарное смещение точки входа на СД в виде векторной суммы  $d = \sum_{i=1}^7 d_i dx_i$ . А так как точки входа на СД практически однозначно соответствуют точкам на поверхности Луны, то на соответствующем криволинейном луче поверхности находим точку падения. При этом точность вычисления точки падения определяется главным образом точностью знания отклонений начальных данных от номинальных.

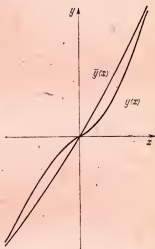


Рис. 9.12. Зависимость углового отклонения  $y(x)$  точки падения от номинальной ( $x$  — отклонения одного из начальных данных от номинального значения).

Заметим еще, что декартовы переменные, удобные в качестве зависимых переменных в задачах наземной стрельбы, в задаче стрельбы по Луне неудобны. Действительно, например, графики функций  $\eta(x)$  и  $\zeta(x)$  при  $x \rightarrow x_d$  имеют вертикальную касательную (что обусловлено касанием крайних траекторий к поверхности Луны), и по близости их к предельным значениям трудно судить о близости  $x$  к  $x_d$ .

Более удобными зависимыми переменными являются, например, функции  $y = \sqrt{\rho_{\min}} \cos i'$  и  $z = \sqrt{\rho_{\min}} \sin i'$ , где  $\rho_{\min}$  — минимальное расстояние траектории от центра Луны, а  $i'$  — наклон плоскости селеноцентрической траектории к какому-либо фиксированному лучу на поверхности Луны. В частности, при отыскании величин предельных ошибок в начальных данных, отвечающих траекториям касания с поверхностью Луны, интерполяции по величине ошибок целесообразно делать не с функцией  $y = \sqrt{\rho_{\min}(x)}$  на значение  $\rho_L$ , а с функцией  $y = \sqrt{\rho_{\min}}$  на значение  $\sqrt{\rho_L}$ , где  $\rho_L = 1738$  км — радиус Луны (это следует из особенности Луны как притягивающего центра, см. § 4.2).

Наконец, отметим, что пучок геоцентрических траекторий, соответствующих малым отклонениям начальных данных от номинальных, является монотонно (по геоцентрическому радиусу  $r$ ) расширяющимся примерно до границы СД, а затем, с приближением КА к Луне, — монотонно сужающимся (имеется в виду сближение с Луной на ветви, восходящей по отношению к Земле).

## Глава 10

### УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВТОРОСТЕПЕННЫХ ФАКТОРОВ

В гл. 9 была дана методика определения номинальных начальных данных и момента начала пассивного участка траектории достижения Луны (без учета влияния второстепенных факторов). Однако практически наиболее полезна такая методика, которая позволяет хотя бы приближенно учесть все факторы, заметно сказывающиеся на пассивном участке траектории полета к Луне. В настоящей главе излагается методика приближенного учета влияния притяжения Луны, эллиптичности ее орбиты, сжатия Земли, а также производится оценка влияния Солнца при выборе номинальной траектории попадания в Луну и номинального момента выхода на траекторию. Так как второстепенные факторы слабо влияют на изменение энергии движения и формы траектории, то в настоящей главе естественно принять за основу определения номинальных начальных данных методику гл. 9 и учесть влияние возмущающих факторов методом поправок. Это позволит одновременно выяснить, какие из возмущающих факторов наиболее заметно изменяют номинальные начальные параметры.

#### § 10.1. Анализ влияния Луны как материального тела

Приближенность изложенной в гл. 9 методики определения оптимальных начальных данных и момента начала пассивного участка номинальной (попадающей в центр Луны) траектории обусловлена прежде всего пренебрежением возмущениями от Луны. Рассмотрим, как изменит номинальные начальные данные учет влияния Луны.

Изменение энергетических затрат от учета влияния Луны несущественно, так как даже при полете в плоскости орбиты Луны, когда влияние Луны является наибольшим, минимальные скорости полета, необходимые для достижения Луны, вследствие учета ее влияния изменяются менее чем на 0,2 м/с (гл. 6).

Что касается других начальных параметров, то от учета влияния Луны они тоже меняются несущественно. Если определить все начальные параметры минимальной траектории без учета влияния Луны, а затем вычислить по этим начальным параметрам траекторию с учетом влияния Луны, то эта траектория все же пройдет через Луну, сместившись по ее поверхности на расстояние порядка сотен километров при скоростях полета, близких к минимальной скорости, и на расстояние порядка нескольких километров при скоростях, близких к параболической.

Отсюда следует, что кеплеровы элементы начального участка номинальной попадающей траектории, вычисленные без учета влияния Луны, несущественно отличаются от кеплеровых элементов траектории, попадающей в центр Луны и вычисленной с учетом ее влияния.

Необходимо, однако, заметить, что влияние Луны, весьма слабо изменяя форму траектории (вычисленной без учета этого влияния), заметно уменьшает время полета, и встреча КА с Луной происходит в некоторой более ранней точке ее орбиты, т. е. при меньших значениях угла  $\varphi_y$ .

Уменьшение времени полета обусловлено двумя причинами: во-первых, ускоряющим действием Луны, которое сказывается в основном в СД, и, во-вторых, тем, что соударение происходит не с центром Луны, а с ее поверхностью, т. е. в более ранний момент времени.

Уменьшение  $\Delta T_{\text{вх}}$  времени полета от первой причины, определенное с помощью численного интегрирования уравнений возмущенного движения, монотонно убывает (рис. 10.1) с увеличением избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической, что связано с увеличением селеноцентрической скорости входа в СД Луны.

Уменьшение  $\Delta T_{\text{вх}}$  от второй причины тоже монотонно убывает с ростом  $\Delta V_1$  (рис. 10.1), так как с увеличе-

нием входной селеноцентрической скорости увеличивается и скорость встречи КА с Луной.

Суммарное уменьшение

$$\Delta T = \Delta T_{\text{уск}} + \Delta T_{\text{вн}} \quad (1.1)$$

при значениях  $0,1 < \Delta V_1 < 0,2$  км/с составляет 1800—2000 с, т. е. около 30 мин. С учетом этой поправки построена штрихпунктирная кривая  $T(\Delta V_1)$  (рис. 9.4).

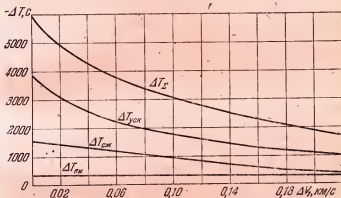


Рис. 10.1. Уменьшение  $\Delta T_i$  времени полета на пассивном участке от влияния различных факторов и суммарное уменьшение  $\Delta T_{\Sigma}$  ( $\Delta V_1$  — избыток начальной геоцентрической скорости над местной параболической).

Рассмотрим, как изменяется время выключения двигателя и соответствующие начальные данные с учетом уменьшения  $\Delta T$  времени полета и уменьшения долготы  $\varphi_y$  центра Луны в момент встречи, вызываемых возмущающим действием Луны.

Теперь угол  $\varphi_y$  уже не будет совпадать с начальной долготой узла, которую условимся обозначать  $\varphi_1$ . Очевидно,  $\varphi_y < \varphi_1$ , и

$$\varphi_1 - \varphi_y = \Delta \varphi_y = \omega_L \Delta T. \quad (1.2)$$

Если учесть, что угловая скорость обращения Луны  $\omega_L = 13,2^\circ/\text{сутки}$ , то при  $\Delta T$  порядка 30 мин получим величину  $\varphi_y$  порядка  $0^\circ \div 0^\circ 3'$ , которой можно пренебречь при точности методики порядка геоцентрического градуса.

Очевидно, оптимальное время  $T_0$  полета на пассивном участке траектории будет определяться вместо уравнения (9.3.1) уравнением

$$180^\circ + \lambda_B - \lambda - \sigma - \Delta \varphi_y = \omega_G T_0 - 2\pi n + \omega_G t_a. \quad (1.3)$$

Оно уменьшится несущественно на величину  $\Delta \varphi_y / \omega_G$ , т. е. на время порядка минуты (здесь  $\omega_G$  — угловая скорость вращения Земли).

Вследствие того, что оптимальное время полета  $T_0$  практически не изменилось, а все значения функции  $T(\Delta V_1)$  уменьшились на заметную величину  $\Delta T(\Delta V_1)$ , оптимальное значение избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической уменьшится: из рис. 9.4 находим по штрихпунктирной кривой  $\Delta V_1 = 0,152$  км/с.

Рассмотрим, далее, графики на рис. 8.5 и 9.2. Очевидно, если учесть влияние Луны, то зависимость угла  $\lambda$  между меридианами оси  $X$  и точки старта от долготы узла  $\varphi_y$ , являющаяся чисто геометрической, не изменится, а в силу малости величины  $\Delta \varphi_y$  зависимость  $\lambda(\varphi_y)$  (рис. 8.5) тоже можно считать прежней.

В зависимости (9.2.1)  $T$  изменится на величину  $\Delta T$ . Но поскольку произведение  $\omega_L \Delta T$  мало, то изменением величины  $\varphi_L$  можно пренебречь. Наконец, зависимость (9.2.5) остается прежней.

Таким образом, зависимости, по которым находились моменты выхода на пассивный участок траектории и соответствующие начальные данные, практически не изменятся. Объясняется это тем, что имеющиеся изменения  $\Delta T$  времени полета приводят к малым изменениям угла  $\varphi_y$  ( $\Delta \varphi_y = \omega_L \Delta T$ ), которые могут быть компенсированы весьма малыми изменениями момента выхода на пассивный участок траектории, так как  $\omega_G \gg \omega_L$ . Поскольку итерационная методика определения номинальных начальных данных сохраняется, то кривые на рис. 9.3 от учета влияния Луны качественно не изменятся. Значит, номинальные начальные данные изменятся только за счет опускания кривых  $T(\varphi_y)$  относительно неподвижной прямой  $T = T_0$  (рис. 9.3) на сравнительно малую величину  $\Delta T$ .

Заметим, что при этом изменятся и границы диапазона значений  $\Delta V_1$ , соответствующего условию видимости



КА из заданного пункта, хотя соответствующий диапазон  $T_{\min} < T < T_{\max}$  не изменится. По величине  $T_0$  легко находятся значения  $\theta_1^*$ ,  $\varphi_y$ , времена начала пассивного участка и соответствующие величины  $i$ ,  $\Phi_*$ ,  $r_1$ ,  $H_1$  для различных дат старта, при которых обеспечивается гарантированная видимость встречи из заданного пункта.

## § 10.2. Влияние эллиптичности орбиты Луны

Эксцентриситет орбиты Луны  $e_L \approx 0,0549$  и большая полуось  $a_L \approx 384\,400$  км определяют параметр  $p_L \approx 383\,240$  км, минимальное расстояние от Земли до Луны  $r_L^{(m)} = 363\,300$  км и максимальное расстояние  $r_L^{(M)} \approx 405\,500$  км. Минимальная и максимальная угловые скорости  $\omega_L^{(m)}$  и  $\omega_L^{(M)}$  обращения Луны приближенно находятся из интеграла площадей

$$r_2^2 \omega_L(r_2) = \sqrt{(\mu_G + \mu_L) p_L} \quad (2.1)$$

$$\omega_L^{(m)} = 2,27 \cdot 10^6 \text{ рад/с}, \quad \omega_L^{(M)} = 2,96 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$

Фактически за счет возмущающего действия Солнца и других возмущений экстремальные значения геоцентрического расстояния  $r_2$  от центра Земли до точки встречи с Луной и экстремальные значения угловой скорости обращения Луны несколько иные. Например, минимальное расстояние может быть меньше 360 000 км, а максимальная угловая скорость может превышать  $3 \cdot 10^{-6}$  рад/с.

Отличия расстояния от Земли до Луны и смещения Луны из точки с наименьшим склонением от их средних значений, соответствующих круговому движению, вычисляются по формулам:

$$\Delta r_2 = 384\,400 - r_2, \quad \Delta \varphi = \varphi_L - \omega_L(t - t_0), \quad (2.2)$$

где  $t$  — рассматриваемый момент всемирного времени, а  $t_0$  — момент прохождения Луной точки с минимальным склонением.

При определении номинальных начальных данных уменьшение расстояния до Луны (при отсутствии изменения направления вектора  $r_2$ ) приведет к уменьшению как времени полета, так и необходимой начальной скоро-

сти, а увеличение угловой скорости обращения Луны увеличит угловые расстояния между унрежденными точками, соответствующими понадаанию в Луну в различные сутки месяца. Уменьшение  $\Delta T_0$  времени полета за счет эллиптичности лунной орбиты при величине геоцентрической скорости полета вблизи орбиты Луны порядка 2 км/с даст поправку порядка нескольких часов, довольно стабильную по избытку  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической. Очевидно, эта поправка  $\Delta T_0$  наиболее заметно скажется на изменении номинального значения избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над параболической. Поскольку для разных месяцев и разных дней величины  $r_2$  отличаются на тысячи километров, то для каждого дня будет своя поправка  $\Delta T_0$  и соответственно для каждого дня месяца будут свои номинальные значения скорости и интервалы видимости соударения из заданного пункта.

Об уменьшении времени полета в зависимости от расстояния до Луны дают представление средня и нижня сплошныя кривыя на рис. 9.4, отвечающыя, соответственно, расстояниям  $r_2 = 370\,000$  км и  $r_2 = 360\,000$  км.

Заметим, что уменьшение избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической  $V_n$ , обусловленное только уменьшением расстояния, весьма невелико. Действительно, отношение  $\beta_1 = (V_1/V_n)^2$  зависит только от малого отношения  $\gamma$  начального геоцентрического радиуса  $r_1$  траектории к конечному  $r_2$  (см. формулы (7.1.3)). Нетрудно проверить, что при уменьшении  $r_2$  на величину порядка 20 000 км номинальное значение избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над параболической уменьшается примерно на 5 м/с. Заметим также, что эллиптичность орбиты Луны должна приводить еще к смещению  $\mathcal{L}_y^*$  энергетически оптимальной точки встречи на этой орбите из положения  $\mathcal{L}_y = 0$ , соответствующего минимальному склонению Луны, в сторону меньших радиусов  $r_2$ , т. е. для 1959—1960 гг. в сторону углов  $\mathcal{L}_L < 0$ . Однако из-за отмеченной выше малости влияния малых изменений  $\gamma$  на необходимые энергетические затраты указанное смещение не превосходит  $1,5^\circ$  [2—1965]. Поскольку эта величина мала по сравнению с суточным смещением Луны (составляющим более  $13^\circ$ ), то ею при анализе энергетических затрат в разные даты пуска можно пренебречь.

## § 10.3. Влияние сжатия Земли

Сжатие Земли увеличивает силу земного притяжения у экватора и уменьшает ее у полюсов, причем влияние сжатия убывает с увеличением геоцентрического расстояния  $r$  пропорционально его четвертой степени.

Возмущающее ускорение, обусловленное сжатием, в проекциях на радиус  $r$ , трансверсаль  $\tau$  и нормаль  $w$  к ним имеет соответственно компоненты [7—1957]:

$$\begin{aligned} R_{\text{сж}} &= \frac{\epsilon_1}{r^4} (3 \sin^2 \varphi - 1), \\ T_{\text{сж}} &= -\frac{\epsilon_1}{r^4} 2 \sin \varphi \sin i_3 \sin u_3, \\ W_{\text{сж}} &= -\frac{\epsilon_1}{r^4} 2 \cos i_3 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\epsilon_1 = \mu_G R_3 \left( \alpha - \frac{m}{2} \right)$ ,  $R_3$  — экваториальный радиус Земли;  $\alpha$  — коэффициент сжатия Земли;  $m = \omega_G^2 / g_3$ ,  $\omega_G$  — угловая скорость суточного вращения Земли;  $g_3$  — ускорение силы тяжести на экваторе;  $i_3$  — наклонение плоскости траектории к плоскости экватора;  $u_3$  — аргумент широты КА относительно плоскости экватора;  $\varphi$  — геоцентрическая широта КА.

Ниже в качестве примера рассматриваются траектории, плоскости которых наклонены к экватору на угол около  $65^\circ$ . При полете по таким траекториям сначала достигаются северные широты порядка  $65^\circ$ , а затем — южные до  $-18^\circ$ , и влияние сжатия в начале траектории частично компенсируется влиянием сжатия на остальной части траектории.

Вдоль рассматриваемых траекторий значение каждой из компонент (3.1) переходит через нуль. Поскольку влияние сжатия весьма быстро убывает с увеличением расстояния от центра Земли, то наибольшая компенсация должна иметь место для перемещений по радиусу и трансверсали, которым соответствуют компоненты  $R_{\text{сж}}$  и  $T_{\text{сж}}$ , переходящие через нуль при относительно малых значениях  $r$ . Меньшая компенсация будет иметь место

для компоненты  $W_{\text{ск}}$ , так как она переходит через нуль последней, лишь при  $\varphi = 0$ .

Для получения представления о влиянии сжатия в целом целесообразно оценить величину

$$J = \int_0^T \left( \int_0^t \frac{e_1}{r^4} dt \right) dt. \quad (3.2)$$

При этом можно считать, что движение КА с учетом сжатия Земли мало отличается от невозмущенного движения, т. е. от движения без учета сжатия, так что допустимо пользоваться той зависимостью  $r(t)$ , которая имеет место для невозмущенного движения:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad dt = \frac{r^2 d\vartheta}{\sqrt{\mu_{GP}}}. \quad (3.3)$$

Перейдя в (3.2) с помощью (3.3) от  $t$  к аргументу  $\vartheta$  — истинной аномалии текущей точки невозмущенной траектории, получим

$$J = e_1 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left( \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta / r^2 \right) r^2 d\vartheta / \mu_{GP}. \quad (3.4)$$

Произведя интегрирование выражения, стоящего в скобках, получим

$$J = \frac{e_1}{\mu_{GP}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[ (\vartheta - \vartheta_1) \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + 2e (\sin \vartheta - \sin \vartheta_1) + \frac{e^2}{4} (\sin 2\vartheta - \sin 2\vartheta_1) \right] \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}. \quad (3.5)$$

Для упрощения дальнейших преобразований положим  $e = 1$ , т. е. будем считать невозмущенную траекторию параболой. Это несколько завысит величину  $J$ , так как с уменьшением избытка  $\Delta V_1$  начальной скорости над местной параболической влияние сжатия должно сказываться сильнее. Получим при  $e = 1$ :

$$J = \frac{e_1}{\mu_{GP}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left( \frac{3}{2} \vartheta + 2 \sin \vartheta + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta - C \right) \frac{d\vartheta}{4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (3.6)$$

где

$$C = \frac{3}{2} \vartheta_1 + 2 \sin \vartheta_1 + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta_1.$$

Переходя к аргументу  $\alpha = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$  и интегрируя первое слагаемое в скобках по частям, после простых преобразований будем иметь:

$$J = \frac{e_1}{2\mu_{GP}} \left[ \left( \left( \frac{3}{2} \vartheta - C \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \quad (3.7)$$

Для параболической траектории с начальной высотой  $H_1 \approx 1000$  км. формула (3.7) дает величину  $J \approx 500$  км. Так как  $W_{\text{сж}} < \frac{e_1}{r^4}$ ,  $T_{\text{сж}} < \frac{e_1}{r^4}$ , а  $R_{\text{сж}} < \frac{3}{2} \frac{e_1}{r^4}$ , то изменение формы траектории, обусловленное сжатием Земли, относительно мало. Соответствующее смещение точки на СД составляет доли градуса, а с учетом компенсации оно может стать на порядок меньше.

Выше полагалось  $e = 1$  только для упрощения преобразований, а квадратуры берутся и вывод сохраняется при  $e \neq 1$ . Более того, и величина  $W_{\text{сж}}$  выражается в квадратурах, которые берутся в элементарных функциях.

Рассмотрим теперь изменение времени полета, обусловленное сжатием Земли. Очевидно, время полета

$T(r_2) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} ds/V$ , где  $r_2$  — геоцентрический радиус точки встречи,  $s$  — проходимый КА путь, а скорость полета  $V$  определяется интегралом энергии

$$V^2 = \left( \frac{2\mu_G}{r} - \frac{\mu_G}{a_1} \right) + 2e_1 \left( \frac{\sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{3}}{r_1^3} - \frac{\sin^2 \varphi - \frac{1}{3}}{r^3} \right), \quad (3.8)$$

в котором  $r_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $a_1$  — начальные радиус, широта и оскулирующая большая полуось траектории.

Изменение времени полета до Луны будет в основном происходить за счет изменения скорости движения на больших расстояниях от Земли, где КА находится большую часть времени полета, двигаясь с асимптотически убывающей скоростью. Учитывая малость изменения

формы траектории, оценим изменение  $\Delta T$  времени полета в предположении, что КА, достигнув расстояния  $r_2$  в возмущенном движении, проходит тот же путь  $s(r_2)$ , что и в невозмущенном движении, т. е. предположим, что

$$\delta s(r_2) = \int_0^{T(r_2)} \delta V dt + V(r_2) \delta T(r_2) = 0,$$

откуда

$$\delta T(r_2) = - \int_0^{T(r_2)} \delta V dt / V(r_2).$$

Отличие скорости  $\delta V$  возмущенного движения от скорости невозмущенного движения, обусловленное влиянием сжатия Земли, связано лишь с изменением  $\delta h$  константы в интеграле энергии (3.8) на фиксированном расстоянии  $r$  от Земли:

$$V\delta V = \delta h/2 = \varepsilon_1 \left( \frac{\sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{3}}{r_1^3} - \frac{\sin^2 \varphi - \frac{1}{3}}{r^3} \right).$$

Отсюда следует, что с течением времени величина  $|\delta V|$  монотонно растет от нуля до максимального значения

$$|\delta V(r_2)|_{\max} \approx \frac{\varepsilon_1}{V(r_2)} \frac{\left| \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{3} \right|}{r_1^3},$$

так что имеем оценку

$$|\delta T| < \tau_{\max}, \text{ где } \tau_{\max} = \frac{|\delta V(r_2)|}{V(r_2)} T. \quad (3.9)$$

Подставив, например,  $T \approx 1,5$  суток,  $r_1 = r_0 + 1000$  км,  $r_2 = 384\,400$  км,  $i_0 = 65^\circ$ , получим  $\tau_{\max} \approx 1000$  с.

Вычислим теперь изменение времени полета, используя снова предположение о том, что в возмущенном и невозмущенном движении по траектории при достижении некоторого фиксированного расстояния  $r$  проходит один и тот же путь  $s$ .

Получим формулу [2—1965]:

$$\Delta T_{\text{сж}} = - \frac{2 \sqrt{2\varepsilon_1} (J_1 + J_2)}{p^2 V_n^3(p)}, \quad (3.10)$$

где

$$J_1 = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{A d\theta}{(1 + 2e \cos \theta + e^2)(1 + e \cos \theta)^2},$$

$$J_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[(\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta + 2\alpha\beta \sin \theta \cos \theta) - \frac{1}{3}](1 + e \cos \theta) d\theta}{1 + 2e \cos \theta + e^2},$$

$$\alpha = \sin i_0 \sin \omega_0, \quad \beta = \sin i_0 \cos \omega_0,$$

$$A = \left( \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{p}{r_1} \right)^3,$$

$i_0$  — наклонение плоскости траектории к плоскости экватора,  $\omega_0$  — долгота перигея траектории, относительно экваториальной плоскости.

Интегралы  $J_1$  и  $J_2$  подстановкой  $x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  приводятся к интегралам от рациональных функций, которые легко берутся, причем значения их убывают по модулю с ростом  $e$  от единицы.

В случае  $e = 1$ , т. е. в случае параболической начальной скорости, интегрированием (3.10) получается формула

$$\Delta T_{\text{сж}} = \frac{\varepsilon_1}{2 \sqrt{2p^2 V_H^3}} \left[ 2\theta \left( \alpha^2 + \beta^2 - \frac{2}{3} \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \sin 2\theta - \right. \\ \left. - 2\alpha\beta \cos 2\theta - A \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left( 1 + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}, \quad (3.11)$$

которая для использовавшейся выше параболической траектории дает величину  $\Delta T_{\text{сж}} = -1630$  с. При этом интеграл  $J_2$  порождает в выражении (3.11) сумму первых трех слагаемых, которые составляют менее 0,001 от  $J_1$ , т. е. от члена с  $A$ , и величиной  $J_2$  в поправке  $\Delta T_{\text{сж}}$  можно пренебречь.

При гиперболической скорости величина  $\Delta T_{\text{сж}}$  меньше, чем при параболической скорости. Например, для траектории с  $\Delta V_1 = 0,130$  км/с и начальной высотой 1000 км поправка  $\Delta T_{\text{сж}}$  составляет приблизительно 750 с (рис. 10.1). Характер накопления поправки вдоль пара-

болической траектории представлен на рис. 10.2, где абсциссой является аргумент  $u$ , широты.

Отрицательность поправки  $\Delta T_{\text{сж}}$  означает, что обусловленное сжатием Земли ослабление падения скорости в начале полета (по сравнению со случаем невозмущенного движения) не полностью компенсируется усилением

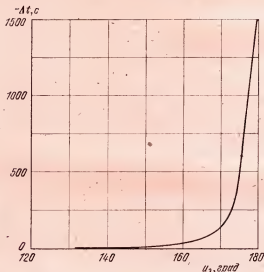


Рис. 10.2. Обусловленное сжатием Земли уменьшение  $\Delta t$  времени полета как функция аргумента широты  $u$  (относительно плоскости лунной орбиты) вдоль траектории КА.

падения скорости в конце полета, когда КА попадает в малые широты. При этом траектория под действием сжатия несколько распрямляется.

## § 10.4. Влияние Солнца

Солнце возмущает движение КА относительно Земли, так как сообщает различные ускорения КА и Земле. Компоненты этого возмущающего ускорения можно представить в виде (см. замечание 2 в Приложении 10)

$$2(1-\mu)\xi, \quad -(1-\mu)\eta, \quad -(1-\mu)\zeta \quad (4.1)$$



(где  $\mu$  — масса Земли), если принять за единицу массы сумму масс Земли и Солнца, за единицу длины — расстояние между центрами Земли и Солнца, а за единицу времени — величину  $P/2\pi$ , где  $P$  — сидерический год. Здесь предполагается, что ось  $\xi$  постоянно направлена на Солнце, оси  $\eta$  и  $\zeta$  проходят через центр Земли ортогонально оси  $\xi$  и членами порядка  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\zeta^2$  и выше можно пренебречь.

Из (4.1) можно получить радиальную и трансверсальную компоненты возмущающего ускорения, например, в плоскости  $\xi\eta$ :

$$F_r = \frac{2(1-\mu)\xi^2 - (1-\mu)\eta^2}{r}, \quad F_\tau = \frac{-3\xi\eta}{r}, \quad (4.2)$$

где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . С их помощью можно оценить влияние Солнца на траекторию попадания в Луну.

Из формул (4.2) следует, что радиальная компонента максимальна при движении по прямой Земля — Солнце, а трансверсальная — при движении по прямым, образующим угол  $45^\circ$  или  $135^\circ$  с прямой Земля — Солнце.

Влияние Солнца на боковое смещение  $x$  КА будет наибольшим в случае, когда максимальное возмущающее ускорение действует во время всего полета ортогонально траектории. Поэтому боковое смещение  $x$ , соответствующее чисто радиальному движению под углом  $45^\circ$  к направлению Земля — Солнце, может служить оценкой для бокового смещения в других случаях. Для определения модуля наибольшего смещения имеем  $\xi = \eta = r\sqrt{2}/2$ , так что с помощью второй из формул (4.2) получаем уравнение

$$\ddot{x} = 3r(t)/2. \quad (4.3)$$

При его интегрировании можно использовать закон  $r(t)$ , имеющий место для невозмущенного движения. Предполагая для оценки, что невозмущенное движение происходит с параболической скоростью

$$dr/dt = \sqrt{2\mu/r},$$

с учетом нулевых начальных данных получим:

$$\dot{x} = 3r^{5/2}/5\sqrt{2\mu}, \quad x = 3r^4/40\mu. \quad (4.4)$$

Если подставить сюда  $r = \frac{384\,400}{150 \cdot 10^6} = 2,56 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu^{-1} = 332\,000$  (учитывая, что расстояние Земля — Солнце принято за единицу), то получим  $x \approx 160$  км. Это значит, что боковым смещением, вызываемым возмущающим влиянием Солнца, в рассматриваемой задаче можно пренебречь.

Что касается радиального смещения, то, во-первых, величина его должна быть того же порядка, что и бокового смещения, а, во-вторых, в задаче о попадании в Луну существенно главным образом изменение  $\Delta T'$  времени полета, обусловленное этим смещением. Оценку величины  $\Delta T'$  можно получить, интегрируя уравнение движения по радиальной траектории при максимальном чисто радиальном возмущении от Солнца

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + 2(1-\mu)r. \quad (4.5)$$

Получим интеграл энергии

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right) + 2(1-\mu)(r^2 - r_1^2), \quad (4.6)$$

где  $a$  — большая полуось орбиты,  $r_1$  — начальный радиус.

Подставив  $\dot{r}$  в выражение  $T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\dot{r}}$ , аналогично случаю учета сжатия Земли получим

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \left[ 1 + 2 \frac{(1-\mu)(r^2 - r_1^2)}{\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right)} \right]}}.$$

откуда определяем изменение  $\Delta T'$  времени полета, вызываемое действием Солнца:

$$\Delta T' \approx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{(1-\mu)(r^2 - r_1^2) dr}{\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right)^{3/2}}. \quad (4.7)$$

Считая для оценки начальную скорость параболической,

получим

$$-\Delta T' = \frac{1-\mu}{(2\mu)^{3/2}} \int_{r_1}^{r_2} (r^2 - r_1^2) r \sqrt{r} dr \approx \frac{r_2^{3/2}}{9 \sqrt{2\mu^{3/2}}}.$$

Имея в виду, что единица времени  $e_t = 365 \cdot 86400 \text{ с}/2\pi$ , получаем  $\Delta T' \approx 170 \text{ с}$ .

Таким образом, Солнце изменяет время полета менее чем на 3 минуты. Если это изменение не учитывать, то рассматриваемая приближенная методика оказывается довольно простой и дает точность порядка градуса. Если же попытаться учесть это изменение, то точность приближенной методики заметно не возрастет, так как будет определяться другими неучтенными факторами.

Таким образом, при точности приближенной методики порядка градуса необходимо учитывать только влияние эллиптичности орбиты Луны и сжатия Земли. В силу слабости влияния этих факторов на форму траектории и на энергетические возможности, учет этих факторов сводится, как и в § 10.1, к учету изменения (уменьшения) времени полета на пассивном участке траектории. Суммарное уменьшение времени полета  $\Delta T_z(\Delta V_1)$  от учета влияния притяжения Луны, конечности ее размеров и сжатия Земли представлено на рис. 10.1, времена полета с учетом этого уменьшения представлены на рис. 9.4 пунктирными кривыми.

Расчет номинальных начальных данных с учетом всех второстепенных факторов проводится аналогично тому, как он описывается в гл. 9, только теперь вводятся поправки на эллиптичность лунной орбиты к расстояниям и угловым положениям Луны. Учитывается и суммарное изменение времени полета за счет эллиптичности лунной орбиты и других второстепенных факторов. Последнее делается точно так же, как в § 10.1.

На рис. 10.3 приведены примеры расчета номинального времени полета  $T(\mathcal{Q}_0)$  с учетом второстепенных факторов для тех же дат  $(M-2) \div (M+3)$ , что и на рис. 9.3. Видим, что условия видимости встречи можно сделать оптимальными, если на каждый день задавать угол возвышения  $\theta_1$ , обеспечивающий оптимальное время полета  $T_0$ . Видим также, что с помощью приближенной методи-

ки путем непосредственной проверки всегда можно выяснить, обеспечивается или нет на каждую дату заданного интервала дат удовлетворительная видимость встречи при заданной совокупности кривых  $T = T(\theta_y)|_{\theta_y = \text{const.}}$

Заметим, что для кеплерова движения Луны относительно Земли, зная соотношение масс Земли и Луны как материальных точек, с помощью третьего закона Кеплера по большой полуоси орбиты  $a_L = 384\,400$  км и сидерическому месяцу можно получить гравитационный параметр Земли  $\mu_0 = 397\,529$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>. Он отличается от истинного на величину, пропорциональную влиянию возмущений на

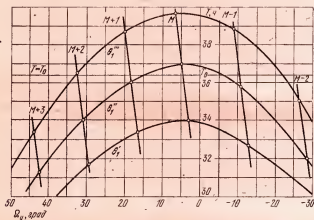


Рис. 10.3. Примерный вид зависимости времени полета  $T$  на пассивном участке траектории от упрежденного положения  $\Omega_y$  Луны в окрестности энергетически оптимальной даты  $M$  старта в одном месяце с учетом влияния второстепенных факторов (сравнить с рис. 9.3).

геоцентрическое движение Луны. При переходе от кеплерова движения к реальному следует учитывать влияние изменения  $\mu_0$  на время полета. Однако при точности расчета порядка  $1^\circ$  этим изменением (составляющим в величине  $\mu_0$  около  $1/400$ , а в величине  $\sqrt{\mu_0}$ , входящей в выражение для определения параболической скорости, около  $1/800$ ) можно пренебречь.

Заметим также, что при временах полета порядка 1,5 суток расчет эфемерид с точностью порядка  $1^\circ$  можно

проводить без учета второстепенных факторов, если принять условие, что полное время полета выбрано таким же, как и для точного расчета. При этом разность приближенного и точного аргументов широты, в начале и в конце полета равная нулю, достигает максимума в районе  $15\,000 \div 25\,000$  с полета, не превышая  $0^\circ,5$ . Возможное отличие попадающих в Луну приближенных траекторий в направлении, ортогональном их плоскости, оказывается еще меньше.

Заметим, наконец, что точность изложенной приближенной методики была неоднократно проверена численным интегрированием с полным учетом всех возмущений по начальным данным, полученным с помощью приближенной методики для различных дней и месяцев. Эти проверки подтверждают, что приближенная методика действительно обеспечивает точность углового сближения траектории с Луной порядка  $1^\circ$ . При этом ее точность по величине начальной скорости составляет около  $1$  м/с и по углу возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом — около  $0^\circ,1$ .

## Глава 11

### ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА К ЛУНЕ С ОРБИТЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ

В данной главе рассматриваются краевые задачи точного расчета траекторий полета с орбиты ИСЗ к Луне, т. е. в заданную точку на ее поверхности либо на полностью или частично заданную орбиту ИСЛ.

При этом сначала анализируется расчет запуска у Земли и рассматривается решение стандартной краевой задачи. Затем к этой задаче сводится расчет траекторий в различных задачах полета к Луне.

#### § 11.1. Особенности расчета запуска КА к Луне с орбиты ИСЗ

Как было показано в гл. 7, затраты топлива при запуске КА к Луне из заданной точки  $B_0$  земной поверхности и с заданным наклоном  $i_0$  к экватору могут намного превосходить минимальные затраты, необходимые для удаления от Земли на расстояние  $r_L$  Луны. Дело в том, что при полете с минимальными затратами в момент достижения расстояния Луны геоцентрическая угловая дальность полета близка к  $180^\circ$  и не равна необходимой, т. е. геоцентрическому углу между направлениями на точку старта и на Луну. Чтобы обеспечить любые необходимые дальности полета при минимальных затратах топлива, выгодно запуск с одним активным участком заменить таким запуском с двумя активными участками, что в конце первого активного участка КА выводится на низкую орбиту  $y_1$  ИСЗ, плоскость которой содержит упрежденную точку, а в конце второго — на принадлежащую той же геоцентрической плоскости траекторию  $\Gamma_{1,2}$  перелета к Луне.

При этом первый активный участок (выведения на орбиту  $y_1$ ) имеет известные продолжительность  $t'_a$  и угловую дальность  $\Phi'_a$ , так как выполняется по жесткой программе [4—1957]. Он вычисляется раз навсегда в системе координат, связанной с поверхностью Земли, независимо от даты старта и момента старта (внутри этой даты). В частности, однажды вычисляется и далее является известной географическая долгота  $\Omega_\gamma^{(r)}$  узла орбиты ИСЗ на экваторе.

Любую наперед заданную долготу  $\Omega_\gamma$  узла орбиты ИСЗ в невращающейся геоцентрической экваториальной системе координат  $m_G x_0 y_0 z_0$  можно реализовать выбором момента  $t_\Omega$  запуска ИСЗ внутри любой даты всемирного времени. Связь  $\Omega_\gamma$  с  $t_\Omega$  определяется геометрическими соотношениями (рис. 9.1) и значением звездного времени  $S_0$  в ноль часов всемирного времени

$$\begin{aligned}\omega_G t_\Omega &= \Omega_\gamma - \omega_G S_0 - \Omega_\gamma^{(r)}, \\ \Omega_\gamma^{(r)} &= \lambda_B - \beta_B, \quad \sin \beta_B = \operatorname{tg} \varphi_B \operatorname{ctg} i_\gamma,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где  $\varphi_B, \lambda_B$  — заданные географические широта и долгота точки старта  $B_0$  на поверхности Земли;  $\omega_G$  — угловая скорость вращения Земли;  $i_\gamma$  — наклонение к экватору орбиты  $y_1$ .

Долгота  $\Omega_\gamma$  восходящего узла орбиты ИСЗ задается такой, какой она получается из заранее решаемой точной краевой задачи перелета к Луне. Эта задача решается методом последовательных приближений, в котором начальное значение  $\Omega_0$  долготы узла траектории перелета находится из приближенного условия прохождения плоскости орбиты ИСЗ через упрежденную точку встречи с Луной методом долготной привязки (§ 9.1).

Пусть КА пребывает на орбите  $y_1$  время  $t_{исв}$ , а второй активный участок начинается в некоторый момент  $t_a$  в той точке  $B_a$  орбиты ИСЗ, угловое расстояние которой от расчетного начала  $B_1$  пассивного участка равно активной угловой дальности  $\Phi'_a$ , необходимой для разгона от имеющейся на орбите ИСЗ геоцентрической энергии  $h_1$  до энергии  $h_2$ , близкой к минимальной, необходимой для преодоления расстояния Земля — Луна. Посколь-

ку разность  $h_1 - h_1'$  приближенно известна, то второй активный участок имеет известные продолжительность  $t_a''$ , длину  $\Phi_a''$ , высоту  $H_1''$  и угол  $\theta_1$  вектора скорости с трансверсалью.

Моменты  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$  и продолжительность  $t_a'$  участка выведения КА на орбиту ИСЗ определяют продолжительность

$$t_{\text{исз}} = t_{\omega} - t_{\Omega} - t_a' \quad (1.2)$$

пребывания КА на орбите ИСЗ ( $t_{\text{исз}}$  может превышать период обращения ИСЗ).

Поскольку упрежденная точка (сближения с Луной) движется впереди Луны по ее орбите с угловой скоростью  $\omega_L$ , равной одному обороту в месяц, а плоскость запуска ИСЗ поворачивается вместе с Землей с угловой скоростью  $\omega_G$ , равной одному обороту в сутки, то запуск к Луне через северное полушарие возможен лишь один раз в сутки (как и запуск с поверхности Земли при том же азимуте). При этом разгон со спутниковой орбиты в случае небольшой его продолжительности начинается на восходящем\*) полувитке орбиты, потому что модуль склонения Луны не превышает  $30^\circ$ , а угловая дальность пассивного полета к Луне близка к  $180^\circ$  (при энергетических затратах, близких к минимальным).

Однако в тех же сутках при том же азимуте возможен еще запуск к Луне через южное полушарие. При этом старт должен быть примерно через полсутки после возможного старта для запуска через северное полушарие, когда вращающаяся с Землей плоскость запуска ИСЗ снова пройдет через упрежденную точку. В этом случае разгон к Луне с орбиты ИСЗ должен начинаться на ее нисходящем полувитке. Таким образом, меняя стартовый полувиток орбиты ИСЗ с восходящего на нисходящий, можно делать два запуска к Луне каждые сутки соответственно по северной  $N$  и южной  $S$  траекториям.

В рассматриваемых задачах перелета к Луне в конце его заданы либо два условия (например, две селеноцен-

\*) Восходящем в том смысле, что на нем в системе  $m_G x_G y_G z_G$  компонента скорости  $z_G > 0$ .



трические координаты  $\alpha_{\text{сц}}$ ,  $\delta_{\text{сц}}$  конца траектории на лунной поверхности), либо три (например, координаты  $\alpha_{\text{сц}}$ ,  $\delta_{\text{сц}}$  и время  $T$  полета). Соответственно краевая задача расчета начальных данных будет двух- или трехпараметрической.

Для удовлетворения двух заданных условий в конце полета необходимо подбирать два из значений начальных данных. Эти данные в § 2.3 были названы аргументами краевой задачи. За аргументы здесь удобно принять параметры  $t_{\text{л}}$  и  $t_{\omega}$ , потому что смещения траектории при изменении  $t_{\text{л}}$  происходят под достаточно большим углом ( $\sim 60^\circ$ ) к смещениям при изменении  $t_{\omega}$  (см. рис. 9.7, 9.8, где изменению параметров  $t_{\text{л}}$  и  $t_{\omega}$  соответствуют изменения  $\delta t$  и  $\delta l$ ).

Если требуется удовлетворить трем граничным условиям у Луны, то необходимы три аргумента для решения краевой задачи. За них удобно принять  $t_{\text{л}}$ ,  $t_{\omega}$  и геоцентрическую энергию  $h_1$  в конце разгона с орбиты ИСЗ.

Из решения краевой задачи находятся начальный момент  $t_{1\text{н}}$  и вектор  $V_1$  начальной скорости пассивного участка  $\Gamma_{1,2}$  траектории перелета в предположении, что она начинается в точке  $B_1$  на орбите ИСЗ, т. е. разгон является импульсным. Разность  $W = V_1 - V_1$ , где  $V_1$  — скорость ИСЗ в точке  $B_1$ , представляет собой затраты характеристической скорости при импульсном переходе с орбиты ИСЗ на траекторию  $\Gamma_{1,2}$ .

Если же разгон совершается не импульсно, а за некоторое время  $t_a = t_1 - t_{\omega}$ , то затраты топлива определяются характеристической скоростью

$$W_a = \int_{t_{\omega}}^{t_1} (P/m(t)) dt, \quad (1.3)$$

где  $P$  — постоянная тяга:  $P = P_{\text{уд}} \dot{G} = v_0 G_0$ , вес КА  $G = mg = G_0 - \dot{G}(t - t_{\omega})$ , так что [1—1966]

$$W_a = \int_{t_{\omega}}^{t_1} \{g v_0 / [1 - (v_0/P_{\text{уд}})(t - t_{\omega})]\} dt \quad (1.4)$$

зависит лишь от  $t_{\omega}$ , тяговооруженности  $v_0$  и удельной тяги  $P_{\text{уд}}$ . Вектор тяги  $P$  при этом может поворачиваться в

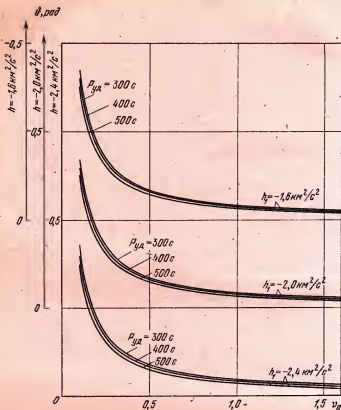


Рис. 11.1. Зависимость энергетически оптимального начального угла тангажа  $\Phi$  от начальной тяговооруженности  $v_0$  КА для различных значений удельной тяги  $P_{уд}$  при разгоне КА с круговой орбиты ИСЗ (радиуса  $\sim 6575$  км) до трех значений геоцентрической энергии  $h_1$ .

плоскости векторов  $V_7$ ,  $V_1$  (совпадающей с плоскостью орбиты ИСЗ благодаря выбору момента  $t_0$  запуска ИСЗ), т. е. угол тангажа  $\theta$  (угол вектора тяги с начальной трансверсалью) может изменяться по некоторому закону

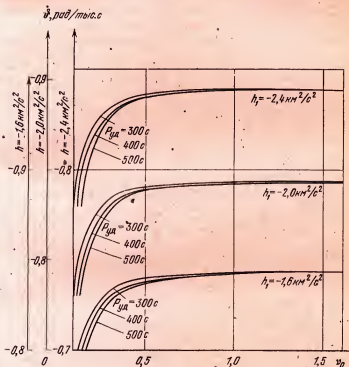


Рис. 11.2. Зависимость энергетически оптимальной постоянной скорости  $\dot{\theta}$  изменения угла тангажа КА от начальной тяговооруженности  $v_0$  при разгоне КА (с круговой орбиты ИСЗ радиуса  $\sim 6575$  км) с различными значениями удельной тяги  $P_{уд}$  до трех значений геоцентрической энергии  $h_1$ .

$\theta(t)$ . Если исследовать управление  $\theta = \theta(t)$  на активном участке разгона с орбиты ИСЗ, следуя [4—1957], то оказывается, что программы типа

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}(t - t_0), \quad (1.5)$$

где  $\theta_0 = \theta(t_0)$ ,  $\dot{\theta} = \text{const}$ , близки к оптимальным.

Параметры  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}$  программы (1.5) управления углом тангажа обычно определяются с помощью численной минимизации характеристической скорости. При заданной спутниковой орбите их оптимальные значения  $\theta_0^{\text{opt}}$  и  $\dot{\theta}_{\text{opt}}$  зависят лишь от характеристик гравитационного поля, параметров  $v_0$ ,  $P_{\text{уд}}$  и от энергии  $h_1$  в конце разгона.

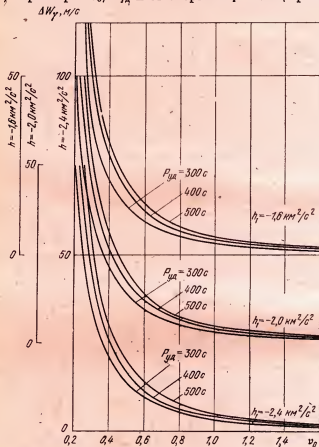


Рис. 11.3. Зависимость потерь  $\Delta W_\gamma$  характеристической скорости от начальной тяговооруженности при разгоне КА (с круговой орбиты ИСЗ радиуса  $\sim 6575$  км) до трех значений геоцентрической энергии  $h_1$  для различных значений удельной тяги  $P_{\text{уд}}$ .

Для случая разгона с круговой орбиты ИСЗ (высотой  $\sim 200$  км) с целью полета к Луне на рис. 11.1 и 11.2 представлены полученные численным путем оптимальные зависимости  $\phi_0(v_0)$  и  $\dot{\phi}(v_0)$  при постоянных значениях параметров  $P_{уд}$ ,  $h_1$ . На рис. 11.3 изображена зависимость потерь  $\Delta W_T$  характеристической скорости у Земли

$$\Delta W_T = W_a - W \quad (1.6)$$

(при постоянных параметрах  $P_{уд}$ ,  $h_1$ ), т. е. превышение затрат характеристической скорости  $W_a$  при линейной программе по углу тангажа (1.5) над затратами  $W$  импульсного разгона.

Видно, что потери скорости  $\Delta W_T$  не превышают 50 м/с для рассматриваемого диапазона параметров.

## § 11.2. Расчет начального приближения методом долготной привязки и пример расчета попадания в заданную точку картинной плоскости у Луны

1. Рассматриваемые задачи расчета траекторий сближения с Луной являются существенно нелинейными. Действительно, расстояние  $\rho_\pi$  селеноцентрической траектории от центра Луны, как показано в § 4.2, есть квадратичная функция модуля вектора  $\mathbf{b}$  прицельной дальности (при  $b \ll r_L$ ), а сам вектор  $\mathbf{b}$  является линейной вектор-функцией отклонения любого начального данного от соответствующего начального данного осевой траектории пучка (проходящей через центр Луны). Селеноцентрическую плоскость  $K_L$ , ортогональную вектору оскулирующей в периселении скорости «на бесконечности» [2—1964], иногда называют *картинной плоскостью*. Вектор  $\mathbf{b} \in K_L$  (согласно определению его в  $K_L$ ).

Вместо координат  $H$ ,  $R$  картинной плоскости можно использовать и другие, в которых траектория  $\Gamma = \Gamma_{1,2} + \gamma$  сближения с Луной характеризуется точкой  $K_L$ , координаты  $H$ ,  $R$  которой линейно зависят от вариаций начальных данных. Пусть выбран способ счета координат  $H$ ,  $R$  по траектории  $\Gamma$ . Тогда каждую из двухпараметрических краевых задач полета к Луне можно сводить к линеаризованной стандартной краевой задаче реализации пары  $(H, R)$  значений координат  $H$ ,  $R$  — пары, соответствующей выполнению двух условий, заданных у Лу-

ны. Обычно сначала удается вычислить  $H$ ,  $R$  приближенно, пренебрегая возмущениями от Земли и пр., а затем на каждой итерации их приходится перевычислять, уточняя.

Для рассмотрения задач данной главы оказывается удобным принять за  $H$ ,  $R$  селеноцентрические координаты вектора с направлением радиуса-вектора  $\rho_\pi$  периселения траектории и с модулем  $\sqrt{\rho_\pi}$  в плоскости  $K_L$ , проходящей через вектор  $\rho_\pi$  перпендикулярно вектору  $U_\pi$  селеноцентрической скорости в периселении. Орт  $H^0$ ,  $R^0$  определим формулами

$$H^0 = \frac{U_\pi^0 \times \xi^0}{|U_\pi^0 \times \xi^0|}, \quad R^0 = H^0 \times U_\pi^0, \quad (2.1)$$

где  $\xi^0(t_\pi)$  — орт направления  $m_L m_G$  в момент  $t_\pi$  прохождения периселения. Обозначив  $\rho_\pi^* = \rho_\pi / \rho_L$ , положим по определению

$$H = \sqrt{\rho_\pi^*} (H^0 \cdot \rho_\pi^0), \quad R = \sqrt{\rho_\pi^*} (R^0 \cdot \rho_\pi^0), \quad (2.2)$$

где  $\rho_\pi^0$  — орт направления  $\rho_\pi$ .

Момент  $t_\pi$  прохождения периселения при численном интегрировании уравнений определяется условием

$$\xi_0 \dot{\xi}_0 + \eta_0 \dot{\eta}_0 + \zeta_0 \dot{\zeta}_0 = 0, \quad (2.3)$$

где  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  — координаты КА в невращающейся селеноцентрической геоэкваatorialной системе координат. В момент  $t = t_\pi$  в ней находятся элементы  $\Omega'$ ,  $i'$ ,  $p'$ ,  $e'$ ,  $\omega'$ ,  $\tau'$  и орты вектора  $\rho_\pi$  при  $u' = \omega'$ :

$$\begin{aligned} (\rho_\pi^0)_\xi &= \cos \omega' \cos \Omega' - \sin \omega' \sin \Omega' \cos i', \\ (\rho_\pi^0)_\eta &= \cos \omega' \sin \Omega' + \sin \omega' \cos \Omega' \cos i', \\ (\rho_\pi^0)_\zeta &= \sin \omega' \sin i'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Начальные значения аргументов  $t_{\Omega_0}$ ,  $t_\omega$ ,  $h$  находятся по элементам траектории  $\Gamma_{1,2}$  перелета. Эти элементы  $\Omega_0$ ,  $i_0$ ,  $\omega_0$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\tau$  можно найти в предположении, что у орбиты  $y_T$  ИСЗ заранее известны элементы  $p_T$ ,  $e_T$ ,  $i_T$ ,  $\omega_T$ ,  $u_T$ , что заданы точка  $B_0$  старта ИСЗ, номер полувитка спутниковой орбиты, с которого производится разгон к

Луне, высота  $H_{B_1} = H_1$  конца  $B_1$  активного участка разгона и угол  $\theta_{B_1} = \theta_1$  вектора скорости в точке  $B_1$  с трансверсалью, а также число  $n$  целых звездных суток полета к Луне и момент  $t_L$  встречи с Луной (точнее, прилета в картинную плоскость).

Заданием точки  $B_0$ , элементов орбиты ИСЗ и номера разгонного полувитка задаются наклонение  $i_0$  траектории  $\Gamma_{1,2}$  перелета ( $i_0 = i_T$  для восходящего полувитка,  $i_0 = -i_T$  для нисходящего), полушарие (северное  $N$  при  $0 < i_0 < \pi$  или южное  $S$  при  $-\pi < i_0 < 0$ ), над которым происходит перелет, и географическая долгота  $\varnothing_{\Gamma}$  узла, ближайшего к перигею траектории  $\Gamma_{1,2}$  (на экваторе  $\varnothing_{\Gamma} = \varnothing_{\gamma}^{(r)}$  при  $i_0 > 0$  и  $\varnothing_{\Gamma} = 180^\circ + \varnothing_{\gamma}^{(r)}$  при  $i_0 < 0$ ). Заданием  $i_0$  и  $\varnothing_{\Gamma}$  задается связь широты  $\varphi_B$  точки  $B$  с ее географической долготой  $\lambda_B$ . Действительно, по определению углов  $\lambda_B$ ,  $\varnothing_{\Gamma}$  и угла  $\beta_B$ , введенного в § 9.1,

$$\lambda_B = \varnothing_{\Gamma} + \beta_B, \quad (2.5)$$

так как направление  $\varnothing_{\Gamma}$  является направлением  $\varnothing_0$ , отнесенным к географической системе координат, а угол  $\beta_B$  связан с  $\varphi_B$  формулой (9.1.5). Поэтому для нахождения траектории  $\Gamma_{1,2}$  применимы формулы метода долготной привязки (§ 9.1).

3. Как и к рассмотренной в § 9.1 задаче, к задаче вычисления элементов траектории  $\Gamma_{BL}$  перелета орбита ИСЗ — Луна имеется парная задача: найти элементы траектории  $\Gamma_{LB}$  возвращения от Луны к Земле на трассу с заданным наклонением  $i_0$  и географической долготой  $\varnothing_{\Gamma}$  узла. Положение  $L$  Луны при этом задается моментом  $t_L$  начала движения, заданы также высота  $H_B$  конца  $B$  траектории возвращения и угол  $\theta_B$  вектора скорости с трансверсалью\*). В обеих задачах широта  $\varphi_B$  конца  $B$  траектории неизвестна, поэтому неизвестны углы  $\alpha_B$ ,  $\beta_B$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_0$ , введенные в § 9.1, и поэтому задачу вычисления элементов траектории  $\Gamma_{BL}$  (или  $\Gamma_{LB}$ ) приходится решать по формулам § 9.1 итерациями по одному параметру. При этом выгодно не повторять многократно решение соответствующей задачи Ламберта из § 9.1, а включить ее решение, т. е. счет времени перелета, в итерационный

\*) Например, это угол входа в атмосферу на высоте  $H_B$  ее верхней границы.

цикл. Этот счет выполняется по обычным формулам (4.4.9)–(4.4.14) и его результат  $T_\Phi$  не обязан сразу совпадать с результатом  $T_\lambda$  расчета времени перелета по формуле (9.1.2). Поэтому целью итераций должно быть сближение  $T_\lambda$  с  $T_\Phi$  до совпадения. За аргумент при итерациях можно взять какой-либо из углов, например,  $\Phi$  или  $\varphi_B$ . В последнем случае почти сохраняется тот же порядок счета, который использовался в задаче § 9.1.

А именно, находятся углы  $u_j$  из (9.1.4),  $\beta_j$  из (9.1.5),  $j = L, B$ ;  $\Phi$  и  $\Phi_0$  из (9.1.3),  $\lambda_B$  из (2.5), время  $T_\lambda$  из (9.1.2),  $r_B = r_G + H_B$ , скорость  $V_B$  из (4.4.1), элементы  $p, a, e$  из (4.4.8), истинные  $\vartheta_B, \vartheta_L$  и средние  $M_B, M_L$  аномалии из (4.4.9)–(4.4.11), время  $T_\Phi$  из (4.4.14). Меняя  $\varphi_B$ , добьемся, чтобы стало  $T_\lambda = T_\Phi$  с заданной точностью, и найдем элементы  $\Omega_0, \omega_0, \tau$  из (9.1.7), (9.1.6).

Заметим, что, угол  $\theta_B$  используется здесь в формулах (4.4.1), (4.4.8), (4.4.9) при вычислении  $T_\Phi$ . В частном случае  $\theta_B = 0$  точка  $B$  является перигеем траектории перелета, и можно использовать более простые формулы  $e = (\bar{r}_\pi - r_L)/(r_L \cos \Phi - \bar{r}_\pi)$ ,  $p = \bar{r}_\pi(1 + e)$ ,  $a = p/(1 - e^2)$  вместо (4.4.1), (4.4.8) (где  $\bar{r}_\pi$  — заданный радиус перигея  $B$ ) и не использовать половину формул (4.4.9)–(4.4.11), поскольку  $\vartheta_B = E_B = M_B = 0$ .

Для определения  $t_0$  находим долготу узла орбиты ИСЗ  $\Omega_\gamma = \Omega_0$  при  $i_0 > 0$  или  $\Omega_\gamma = \Omega_0 - 180^\circ$  при  $i_0 < 0$ . Тогда  $\Omega_0$  получаем по формулам (1.1). При этом дата старта  $D(t_B) = D(t_L) - n$ . Момент начала разгона с орбиты ИСЗ  $t_0 = t_L - T_\Phi - t_a''$ ;  $t_{\text{исз}}$  находится по формуле (1.2); энергия траектории перелета  $h_1 = -\mu_0(1 - e^2)/p$ .

Сравнение результатов расчета траектории перелета описанным приближенным методом с результатами точного решения уравнений движения показывает [1–1974], что приближенный метод дает географическое положение точки  $B$  с точностью порядка 100 км и погрешности: скорости  $\delta V_B = 1,5$  м/с, времени перелета  $\delta T \leq 5$  мин, элементов  $\delta p \leq 4$  км,  $\delta e \leq 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta \omega \leq 2^\circ, 2$ ,  $\delta \Omega \leq 2^\circ$ .

Начальные значения, получаемые методом долготной привязки, обеспечивают значение  $\rho_\lambda < 10$  тыс. км для времен перелета порядка 4,5 сут. Эта оценка уменьшается пропорционально уменьшению времени полета. Та-



кой точности начальных значений аргументов оказывается вполне достаточно для устойчивой сходимости рассматриваемых краевых задач.

Время счета начальных значений аргументов на ЭВМ-222 не превышает 5 с. Время решения стандартной краевой задачи не превышает 12 мин. В дальнейшем стандартная краевая задача называется иногда задачей попадания в заданную точку  $(H, R) \in K_L$  (картинной плоскости  $K_L$ ).

**З а м е ч а н и е.** Вместо удовлетворения условий стандартной краевой задачи можно пытаться удовлетворить просто заданные условия у Луны, считая две (или три) невязки в этих условиях функциями и используя те же аргументы  $t_0, t_*$  (или  $t_0, t_*, h_1$ ). При этом отпадает необходимость в перевычислении функций (обязательном в стандартной краевой задаче), однако для функций-невязок область сходимости может быть настолько узкой, что начальное приближение, получаемое методом долготной привязки, может оказаться непригодным.

### § 11.3. Расчет траектории попадания в заданную точку лунной поверхности

Пусть точка  $y_\lambda$  на лунной поверхности, в которую надо попасть, задана селеноцентрическими сферическими долготой и широтой  $\alpha_{\text{сц}} = \bar{\alpha}_{\text{сц}}, \delta_{\text{сц}} = \bar{\delta}_{\text{сц}}$  и пусть заданы момент  $t_L$  встречи с Луной и целое число  $n$  суток, содержащееся во времени полета до Луны. Здесь  $\delta_{\text{сц}}$  отсчитывается от плоскости  $\xi\eta$  лунной орбиты, а  $\alpha_{\text{сц}}$  — от орта  $\xi^0 = -r_L^0(t_L)$ .

Укажем способ вычисления координат  $H, R$  в картинной плоскости по заданным координатам  $\alpha_{\text{сц}}, \delta_{\text{сц}}$  через вычисление селеноцентрических элементов траектории. Сначала с помощью метода долготной привязки (§§ 9.1 и 11.2) находим параметры  $t_0, t_*, h_1$  и время перелета  $T$ . Для пучка траекторий с геоцентрической энергией  $h_1$  найдем селеноцентрические скорость  $U_\infty$  «на бесконечности», долготу  $\alpha_{\text{сц}}$  и широту  $\delta_{\text{сц}}$  оси пучка (направления —  $U_\infty$ ) по формулам § 5.2 (или § 5.4 и по графикам рис. 5.1). Проведем плоскость  $\Pi_{\text{сц}}$  селеноцентрической траектории  $\gamma$  через ось  $O_\pi$  пучка и точку  $y_\lambda(\alpha_{\text{сц}},$



щадей с учетом зависимости (4.4.22) от угловой дальности  $\Phi'$  угла  $\alpha'$  между скоростью  $U$  и радиусом  $\rho_L$  в точке  $\bar{y}_\lambda$ :

$$U = \sqrt{\frac{2\mu_L}{\rho_L} + U_\infty^2}, \quad \sin \gamma = \frac{U_\infty \sin \Phi'/2}{U},$$

$$\alpha' = \frac{\Phi'}{2} + \gamma, \quad p' = \frac{(\rho_L U \sin \alpha')^2}{\mu_L}, \quad a' = \frac{\mu_L}{U_\infty^2}, \quad (3.4)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{p'}{a'}}, \quad \bar{\rho}_\pi = \frac{p'}{1 + e'}.$$

Находим истинную аномалию в точке  $\bar{y}_\lambda$

$$\cos \vartheta' = \frac{p'/\rho_L - 1}{e'}, \quad 0 \leq \vartheta' \leq \pi, \quad (3.5)$$

и аргумент широты  $\omega'$  периселения

$$\omega' = u_{\text{оп}} + \Phi' + \vartheta'. \quad (3.6)$$

Теперь находим при  $u = \omega'$  орт  $\rho_\pi$  по формулам (2.4). (Заметим, что для углов  $\Phi' < 20^\circ$  расчет по формулам (3.4)–(3.6) можно исключить, положив в (3.6)  $\Phi' + \vartheta' = 180^\circ$ .)

Заменив в (2.4)  $\omega'$  на  $\omega = \omega' + 90^\circ$ , получим орт  $U_\pi^0$  скорости в периселении. По моменту  $t_L$  встречи находим орт  $\xi^0(t_\pi) = -r_L^0(t_L)$ . Тогда из (2.1), (2.2) по  $\rho_\pi^0$ ,  $U_\pi^0$ ,  $\xi^0(t_\pi)$  находим точку  $(\bar{H}, \bar{R}) \in K_L$  ( $K_L$  — картинная плоскость).

Решение стандартной краевой задачи обеспечит попадание в заданную точку на лунной поверхности, если после каждой итерации перевычислять значения  $\bar{H}$  и  $\bar{R}$  со все более точным учетом влияния возмущений от Луны. Такой учет можно реализовать, вычисляя  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$  по той гиперболе  $\gamma$  нового (на каждой итерации) пучка гипербол, которая проходит через заданную точку  $\bar{y}_\lambda$ . Для этого сначала найдем элементы  $\mathcal{O}'$ ,  $i'$ ,  $\omega'$ ,  $p'$ ,  $e'$ ,  $\tau'$  гиперболы  $\gamma$ , оскулирующей в ближайшей к Луне точке  $\rho_\pi(\alpha_\pi, \delta_\pi)$  траектории, вычисленной с полным учетом возмущений. В плоскости гиперболы  $\gamma$  построим ось пучка  $O_\pi$ , а по направлению  $\rho_\pi^0$  оси пучка (асимптоты) и точке

$\bar{y}_\lambda$  в той же плоскости построим гиперболу  $\bar{\gamma}$  пучка. По ее элементам  $\varnothing', i', p', e', \omega', \tau'$  найдем векторы  $\rho_\pi$ ,  $U_\pi$  и орт  $\xi^0(\tau')$ , а по ним —  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$ .

Вычислим сначала модуль вектора  $U_\infty$  и угол  $\vartheta_\infty$  между оскулирующей осью  $O_\pi$  пучка и направлением  $\rho_\pi^0$ . Так как для периселения  $\alpha' = 90^\circ$ , то из (4.4.21) получим

$$U_\infty^2 = U_\pi^2 - \frac{2\mu_L}{\rho_\pi}, \quad \operatorname{tg} \frac{\vartheta_\infty}{2} = \frac{U_\pi}{U_\infty}, \quad 0 < \frac{\vartheta_\infty}{2} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.7)$$

Далее определим (рис. 11.4) угол  $u_{оп}$  между  $\rho_\pi^0$  и линией узлов  $\Omega'$  траектории  $\gamma$  по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{\varnothing} &= \alpha_\pi - \varnothing', \quad \cos u_\pi = \cos \alpha_{\varnothing} \cos \delta_\pi, \\ \sin u_\pi &= \sin \alpha_{\varnothing} \cos \delta_\pi / \cos i'_\pi, \\ u_{оп} &= u_\pi - \vartheta_\infty. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Затем по  $u_{оп}$ ,  $\varnothing'$ ,  $i'$  вычислим, используя формулы (2.4), направляющие косинусы оси пучка (орт  $\rho_{оп}^0$ ), по ним найдем  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}$ , по ним — угол  $\Phi'$  между осью пучка и радиусом-вектором  $\rho_L$  по формулам (3.1), (3.2).

Далее из соотношений (3.4)–(3.6) находим элементы  $p', e', a', \rho_\pi$ , аргумент  $\omega'$  широты перицентра гиперболы  $\bar{\gamma}$ . Затем, предполагая, что при движении по  $\gamma$  граница  $\rho = \rho_*$  СД пересекается в тот же момент  $t^*$ , что и по  $\gamma$ , найдем по формулам (4.4.13), (4.4.14)

$$M_1 = 0, \quad M_* = M_2, \quad \tau = t_* + M_* \frac{a'^{3/2}}{\sqrt{\mu_L}}. \quad (3.9)$$

Наконец, пересчитав вектор  $\rho_\pi$  в геоэкваториальную систему координат (Приложение 2) и взяв из Астрономического ежегодника  $\xi^0(\tau) = -\bar{r}_L^0(\tau)$ , по формулам (2.1), (2.2) находим новые значения  $\bar{H}$ ,  $\bar{R}$ .

Замечания. 1. Если задано время  $\bar{t}$  встречи с поверхностью Луны, то решается трехпараметрическая краевая задача с аргументами  $t_{\varnothing}, t_\omega, h_1$  и функциями  $\bar{H}, \bar{R}, \bar{t}$ . Если поверхность Луны не пересекается, то назначается  $\tau = \bar{t}$  вместо счета (3.9), а если пересекается,

то в (3.9) при счете  $\tau$  берется  $\rho = \rho_L$  вместо  $\rho = \rho_*$  и момент  $t$  вместо  $t_*$ .

2. Если орбита  $y_1$  — круговая с высотой  $H \leq 200$  км и если  $t_{\text{ИСЗ}}$  превосходит период обращения ИСЗ, то интегрировать систему (1.4.1) на участке полета по орбите ИСЗ необходимо с учетом влияния атмосферы.

Заметим, что аргумент  $t_*$  удобно отсчитывать от времени прохождения спутником либо восходящего узла (при полете к Луне по схеме  $N$ ), либо нисходящего узла (при полете по схеме  $S$ ) того витка орбиты ИСЗ, с которого КА разгоняется к Луне.

#### § 11.4. Расчет траекторий перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ

Здесь рассматриваются два случая (в порядке возрастания сложности расчета):

- 1) случай незаданного наклонения  $i_\lambda$  орбиты  $y_\lambda$  ИСЛ (или незаданной долготы  $\Omega_\lambda$  узла);
- 2) случай полностью заданной орбиты ИСЛ.

В каждом из этих случаев может быть еще подслучай, когда момент  $t_{\text{вых}}$  выхода на орбиту ИСЛ не задан. Начнем с этого подслучая, как с более простого.

1. Пусть в этом подслучае первого случая в невращающейся системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$ , совпадающей в момент  $t_{\text{вых}}$  с вращающейся  $m_L \xi_* \eta_* \zeta_*$ , заданы элементы  $\Omega_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, \omega_\lambda$  орбиты ИСЛ и пусть геоцентрические энергии  $h_1$  и наклонение  $i_1$  на траектории перелета Земля — Луна как-то зафиксированы. По ней находим приближенно (см. § 5.2) селеноцентрические долготу и широту ( $\alpha_{\text{оп}}, \delta_{\text{оп}}$ ) оси  $O_\pi$  пучка селеноцентрических гипербол (рис. 11.4). Если угол  $\Delta \Omega_\lambda$  между осями  $O_\pi$  и  $\Omega_\lambda$  превосходит  $90^\circ$ , то заменим  $\Omega_\lambda$  на  $(\Omega_\lambda \pm 180^\circ)$  с таким знаком, чтобы  $\Omega_\lambda$  стал узлом, ближайшим к оси  $O_\pi$ .

Чтобы затраты топлива были меньше, выгодно плоскость селеноцентрического участка траектории перелета выбрать совпадающей с плоскостью орбиты ИСЛ. Поэтому в первом случае строим гиперболу с узлом  $\Omega'_\lambda = \Omega_\lambda$ , ближайшим к оси  $O_\pi$  пучка. Тогда по узлу  $\Omega'_\lambda$  и точке  $O_\pi$  находится однозначно аргумент широты

оси  $O_{\text{оп}}$ ,  $|u_{\text{оп}}| \leq 90^\circ$  (см. рис. 11.4) с помощью формул

$$\begin{aligned} \cos u_{\text{оп}} &= \cos \delta_{\text{оп}} \cos \Delta \Omega, \quad \Delta \Omega = \alpha_{\text{оп}} - \Omega_{\lambda}, \\ \text{sign} \sin u_{\text{оп}} &= \text{sign} [(-\Delta \Omega_{\lambda} + 90^\circ) \sin \delta_{\text{оп}}]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соответствующее наклонение  $i'$  плоскости гиперболы, равное наклонению  $i_{\lambda}$  орбиты ИСЛ, находим, как в § 5.2, по

$$\begin{aligned} \cos i' &= \cos i_{\lambda} = \frac{\cos \delta_{\text{оп}} \sin \Delta \Omega}{\sin u_{\text{оп}}}, \\ \text{sign} \sin i' &= \text{sign} \sin i_{\lambda} = \text{sign} [(90^\circ - \Delta \Omega_{\lambda}) \delta_{\text{оп}}]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Исходя из соображений экономии топлива, здесь рассматривается селеноцентрическая гипербола, обходящая центр Луны в том же направлении, что и ИСЛ, и пересекающая заданную орбиту ИСЛ в двух точках с заданным расстоянием  $\rho_{\lambda}$  от Луны. Из этих двух точек выделим одну точку, задавши знак ее истинной аномалии  $\vartheta_{\lambda}$ , где

$$\cos \vartheta_{\lambda} = \frac{p_{\lambda}/\rho_{\lambda} - 1}{e_{\lambda}}. \quad (4.3)$$

Получим  $u_{\lambda} = \vartheta_{\lambda} + \omega_{\lambda}$ . Далее находятся  $\bar{H}$  и  $\bar{R}$  так, как это делалось в § 11.3 по точке на поверхности Луны, и решается точная краевая задача. Так как в этой задаче на каждой итерации находится новая оскулирующая гипербола, проходящая через тот же радиус  $\rho_{\lambda}$ , то по ней, как и в § 11.3, строится новая ось пучка (вообще говоря, с новой величиной  $U_{\infty}$  при той же величине  $h_1$ ).

Интересно найти гиперболу, касающуюся орбиты ИСЛ, поскольку известно [4—1975], что при малых  $e_{\lambda}$  такой переход по затратам характеристической скорости близок к оптимальному. Проще всего это сделать путем численного решения уравнения  $\alpha' = \alpha_{\lambda}$ , выражающего совпадение углов направлений скорости с радиусом на эллипсе и на гиперболе в общей их точке  $M$ . Пусть  $\vartheta_{\lambda}$  — истинная аномалия в  $M$ . Для вычисления углов  $\alpha_{\lambda}$  и  $\alpha'$  по  $\vartheta_{\lambda}$  находим радиальную компоненту скорости на эллипсе и гиперболическую скорость  $U$  в точке  $M$ :

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu_L}{p_{\lambda}}} e_{\lambda} \sin \vartheta_{\lambda}, \quad U = \sqrt{U_{\infty}^2 + \frac{2\mu_L}{\rho_{\lambda}}}. \quad (4.4)$$

Здесь константа  $U_\infty$  находится, как в § 5.2. Далее находим угловую дальность полета  $\Phi_\infty$  по гиперболе и углы  $\alpha'$  и  $\alpha_\lambda$  скорости с общим радиусом  $\rho_\lambda$  на гиперболе и на эллипсе с помощью (4.4.22) и интеграла энергии:

$$u_\lambda = w_\lambda + \theta_\lambda, \quad \Phi_\infty = u_\lambda - u_{оп}, \quad \alpha' = \pi - \frac{\Phi_\infty}{2} - \gamma, \quad (4.5)$$

$$\sin \gamma = \frac{U_\infty}{U} \sin \frac{\Phi_\infty}{2}, \quad \cos \alpha_\lambda = \frac{V_r}{V_\lambda}, \quad \alpha_\lambda - \text{в I, II четверти,}$$

$$V_\lambda^2 = \frac{2\mu_L}{\rho_\lambda} - \frac{\mu_L}{a_\lambda}, \quad a_\lambda = \frac{p_\lambda}{1 - e_\lambda^2}.$$

Численное решение уравнения  $\alpha_\lambda = \alpha'$  можно ускорить, если найти  $d\alpha_1/d\theta$  и  $d\alpha'/d\theta$  дифференцированием соотношений (4.4), (4.5), определяющих  $\alpha_1$  и  $\alpha'$ , и применить метод Ньютона.

**З а м е ч а н и е.** В случае, когда долгота  $\Omega_\lambda$  не задана, а задано наклонение, необходимо согласно § 5.2 задать еще  $\text{sign} \cos \Delta \Omega_\lambda$ .

2. Рассмотрим теперь аналогичный подслучай (с незаданным моментом выхода на орбиту ИСП) для второго случая, когда задана орбита ИСП элементами  $\Omega_\lambda, i_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, \omega_\lambda$ . В этом подслучае опять величины  $h_1, i_1$  геоцентрических энергии и наклонения считаются заданными; значит, известны будут и координаты  $\alpha_{оп}, \delta_{оп}$  оси  $O_\Pi$  пучка селеноцентрических гипербол. Опять сделаем  $|\Delta \Omega_\lambda| \leq 90^\circ$ , заменив, если надо,  $i_\lambda$  на  $-i_\lambda$ . Отличие от предыдущего подслучая будет в том, что, вообще говоря, ось  $O_\Pi$  не лежит в заданной углами  $\Omega_\lambda, i_\lambda$  плоскости орбиты ИСП и задача перехода с гиперболы на эллипс является существенно пространственной. Касание гиперболы с эллипсом здесь невозможно, однако задача решается, как в предыдущем случае: задается точка встречи на эллипсе, например ее истинной аномалией  $\theta_\lambda$ , находятся по ней начальные значения прицельных параметров  $\bar{H}$  и  $\bar{R}$ , как в задаче попадания в Луну, и так же решается краевая с перевычислением  $\bar{H}, \bar{R}$  на каждой итерации.

Заметим, что можно обеспечить счет начального и последующих значений прицельных параметров, если орты

картинной плоскости  $K_L$  определить иначе:

$$H^0 = U^0 \times C_\lambda^0 / |U^0 \times C_\lambda^0|, R^0 = H^0 \times U^0, \quad (4.6)$$

где  $C_\lambda^0 = \rho_\lambda^0 \times U_\lambda^0 / |\rho_\lambda^0 \times U_\lambda^0|$ , а  $U$  — скорость на гиперболе в точке  $\rho = \rho_\lambda$  встречи. Здесь орт  $H^0$  всегда находится в плоскости орбиты ИСЛ, а плоскость  $K_L$  проходит через Луну перпендикулярно вектору скорости на гиперболе в точке  $\rho_\lambda$ . Поэтому следует на всех итерациях задавать  $\bar{H} = \sqrt{\rho_\lambda}$ ,  $\bar{R} = 0$ , и с изменением номера итерации перевычисляются лишь орты  $H^0, R^0$ .

В рассмотренных подслучаях можно было обойтись двухпараметрической краевой задачей, потому что не был задан момент  $t = \bar{t}$  встречи КА с орбитой ИСЛ. Если этот момент задан, то начальная энергия геоцентрической траектории перелета не может быть произвольной, а должна вместе с  $t_\Omega$  и  $t_\omega$  подбираться путем решения трехпараметрической краевой задачи с аргументами  $t_\Omega, t_\omega, h_1$  и функциями  $\bar{H}, \bar{R}, \bar{t}$ . Вычисление величин  $\bar{H}, \bar{R}, \bar{t}$  производится по вектору  $\rho_\lambda$  так же, как и в § 11.3 по вектору  $\rho_L$  точки, заданной на поверхности Луны.

После решения рассмотренных краевых задач остается свободной истинная аномалия  $\phi_\lambda$  точки пересечения гиперболы и орбиты ИСЛ (кроме случая их касания  $\alpha' = \alpha_\lambda$ ). Если не задано время этого пересечения, то будет свободна также энергия  $h_1(t_\lambda)$  геоцентрической траектории перелета. Этой свободой можно воспользоваться для минимизации модуля разности  $W_\lambda = U - U_\lambda$  скоростей в точке пересечения. В случае круговой орбиты ИСЛ с незадаанным наклонением  $i_\lambda$  оптимальна гипербола в плоскости орбиты ИСЛ, имеющая минимальное значение энергии  $h'$ . В некомпланарном случае оптимизация гораздо сложнее и рассмотрена в гл. 14—17. Их результаты применимы здесь в силу симметрии прямого и обратного движений [5—1960].

Если ИСЛ уже существовал до встречи с КА, прилетающим от Земли, то необходимо при точном расчете встречи учитывать прецессию орбиты ИСЛ под влиянием возмущений от Земли, Солнца и пр., особенно при больших эксцентриситетах ( $e_\lambda > 0,3$ ), временах существования и размерах орбиты ИСЛ. Сделать это можно,



например, путем вычисления положений ИСЛ численным интегрированием.

Расчет торможения КА при его переходе на орбиту ИСЛ целесообразно (в целях экономии времени вычисления) делать отдельно от расчета траектории перелета к Луне. При этом исходными данными являются резуль-

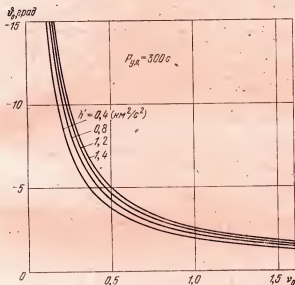


Рис. 11.5. Зависимость оптимального угла тангажа  $\vartheta_0$  от начальной тяговооруженности  $v_0$  при переходе КА с круговой орбиты ИСЛ (радиуса  $\sim 1800$  км) на селеноцентрические гиперболы четырех энергий  $h'$  ( $P_{уд}$  — удельная тяга).

таты решения краевой задачи перелета к Луне и постоянные тяга  $P$  и удельная тяга  $P_{уд}$  двигателя.

Угол  $\vartheta$  тангажа КА на участках торможения у Луны допустимо принимать постоянным, так как потери характеристической скорости в случае ограниченности рассматриваемых тяговооруженностей диапазоном  $0,1 \leq v_0 \leq 1,5$  не превышают 5 м/с (см. рис. 11.5, 11.6).

В плоской задаче перехода КА с траектории Земля — Луна на орбиту ИСЛ краевая задача является двухпараметрической. За ее аргументы можно принять время включения двигателя  $t_{\omega_\lambda}$  (его удобно отсчитывать в об-

ратную сторону от момента  $\bar{t} = t_k$ ) и угол тангажа  $\theta_0$ . За функции в этой краевой задаче удобно принять модуль радиуса-вектора  $\rho_\lambda$  и угол  $\alpha_\lambda$  между векторами  $\rho_\lambda$  и  $U_\lambda$ . Заканчивать активный участок удобно в момент достижения заданной селеноцентрической энергии  $\bar{h}_\lambda = -\mu_L(1 - e_\lambda)^2/\bar{\rho}_\lambda$ .

При пространственном маневре у Луны необходимо еще отклонять вектор  $P$  тяги КА от плоскости селеноцентрической гиперболы на необходимый угол  $\psi_0$  рыскания.

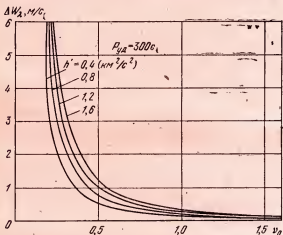


Рис. 11.6. Зависимость потерь  $\Delta W_\lambda$  характеристической скорости от начальной тяговооруженности  $v_0$  при переходе КА с круговой орбиты ИСЛ (радиуса  $\sim 1800$  км) на селеноцентрические гиперболы четырех энергий  $h'$  ( $P_{уд}$  — удельная тяга).

В результате краевая задача становится трехпараметрической, с аргументами  $t_{\omega_\lambda}$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  и функциями  $\rho_\lambda$ ,  $\alpha_\lambda$ ,  $I$  (угол между векторами  $S_\lambda$  и  $S'(t_k)$  кинетических моментов орбиты ИСЛ и получившегося в конце торможения селеноцентрического эллипса). Здесь предполагается, что активный участок заканчивается при достижении селеноцентрической энергии  $\bar{h}_\lambda$ .

Начальные значения аргументов  $t_{\omega_\lambda}$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  можно определить приближенно, полагая маневр импульсным. В плоском случае найдем импульсное приращение скорости

$W_\lambda$  по известным направлениям  $\alpha'$  и  $\alpha_\lambda$ , модулям  $U$  и  $U_\lambda$  скорости на гиперболе и эллипсе соответственно в точке  $\rho_\lambda$  их пересечения (или касания) по теореме косинусов

$$W_\lambda^2 = U^2 + U_\lambda^2 - 2UU_\lambda \cos(\alpha' - \alpha_\lambda). \quad (4.7)$$

Далее найдем по формуле Циолковского затраты  $G_0 - G_\kappa$  топлива на приращение скорости  $W_\lambda$

$$\ln(G_0/G_\kappa) = W_\lambda/P_{уд}g_0, \quad (4.8)$$

где  $G_0$ ,  $G_\kappa$  — земной вес КА до и после приращения скорости соответственно,  $g_0 = 9,81$  м/с<sup>2</sup>. Считая заданным вес  $G_0$  КА на момент начала торможения, определим продолжительность  $t_a$  активного участка

$$t_a = (G_0 - G_\kappa) P_{уд}/P. \quad (4.9)$$

Момент  $t_{\omega\lambda}$  включения двигателя зададим соотношением

$$t_{\omega\lambda} = t_\lambda - t_a/2, \quad (4.10)$$

где  $t_\lambda$  — время пересечения (касания) гиперболы и заданной орбиты ИСЛ в точке  $\rho_\lambda$ .

Начальный угол тангажа  $\theta_0$  в плоском случае определяется из рассмотрения плана скоростей  $U$ ,  $U_\lambda$ ,  $W_\lambda$  в точке пересечения гиперболы с эллипсом по формуле

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \beta + \pi/2 - \alpha_\lambda, \\ \cos \beta &= U_\lambda/2W_\lambda + W_\lambda/2U_\lambda - U^2/2U_\lambda W_\lambda, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\beta$  есть угол вектора  $W_\lambda$  с вектором  $U_\lambda$ , отсчитываемый от  $U_\lambda$  в сторону радиуса  $\rho_\lambda$ .

В пространственном случае импульсное приращение  $W_\lambda$  скорости вычисляется по формуле

$$W_\lambda^2 = U^2 + U_\lambda^2 - 2UU_\lambda (\cos \alpha_\lambda \cos \alpha' + \sin \alpha_\lambda \sin \alpha' \cos I), \quad (4.12)$$

где  $\alpha'$ ,  $\alpha_\lambda$  — углы между радиусом-вектором  $\rho_\lambda$  и векторами скорости в движениях по гиперболе и по эллипсу (соответственно) в их точке пересечения  $\rho_\lambda$ ;  $I$  — угол между их плоскостями (рис. 11.7). Далее время  $t_a$  активного участка и момент  $t_{\omega\lambda}$  запуска двигателя определяют прежними формулами (4.8—4.10).

Считая торможение импульсным, найдем начальные приближения для углов тангажа  $\theta_0$  и рыскания  $\psi_0$  из

соотношений

$$W_\lambda = U_\lambda - U, \quad \theta = 90^\circ - \alpha', \quad \theta_\lambda = 90^\circ - \alpha_\lambda,$$

проецируя векторы  $U$ ,  $U_\lambda$ ,  $W_\lambda$  на  $\rho_\lambda$ ,  $\tau$ ,  $b$  (рис. 11.7):

$$\blacksquare \quad U = (U \sin \theta, U \cos \theta, 0),$$

$$U_\lambda = (U_\lambda \sin \theta_\lambda, U_\lambda \cos \theta_\lambda \cos I, U_\lambda \cos \theta_\lambda \sin I),$$

$$W_\lambda = (W_\lambda \sin \vartheta_0, W_\lambda \cos \vartheta_0 \cos \psi_0, W_\lambda \cos \vartheta_0 \sin \psi_0);$$

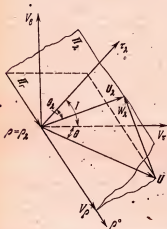


Рис. 11.7. Расположение векторов скорости  $U_\lambda$  и  $U$  в плоскостях  $\Pi_\lambda$  орбиты ИСЛ и  $\Pi_\tau$  селеноцентрической гиперболической.

$$\sin \vartheta_0 = \frac{U_\lambda \sin \theta_\lambda - U \sin \theta}{W_\lambda},$$

$$\sin \psi_0 = \frac{U_\lambda \cos \theta_\lambda \sin I}{W_\lambda \cos \vartheta_0},$$

$$\cos \psi_0 = \frac{U_\lambda \cos \theta_\lambda \cos I - U \cos \theta}{W_\lambda \cos \vartheta_0}.$$

□ (4.13)

Здесь угол тангажа  $-90^\circ < \vartheta_0 < 90^\circ$  отсчитывается от трансверсальной плоскости в точке  $\rho_\lambda$ , а угол рыскания  $0^\circ < \psi_0 < 360^\circ$  отсчитывается от трансверсали  $\tau$  гиперболической против часовой стрелки в сторону кинетического момента (бинормали  $b$ ) гиперболической.

### § 11.5. Приближенное вычисление характеристических скоростей перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ с учетом эллиптичности лунной орбиты

При проектировании КА желательно уже при начальной стадии работы знать величину характеристической скорости, необходимой для выполнения задачи полета. Простые формулы для затрат характеристической скорости на полет к Луне можно получить лишь приближенным методом ТСД. Однако погрешность этого метода —

порядка 100 м/с, что бывает недопустимо при проектировании. Переход к более точным методам расчета движения (ИБ, МКС, ЧИ) приводит к краевой задаче, что значительно усложняет анализ траекторий и минимизацию характеристической скорости. Поэтому имеет смысл рассмотреть излагаемый ниже приближенный графо-аналитический метод расчета характеристической скорости с погрешностью менее 20 м/с. Используемые в этом методе графики получены в результате точного расчета (методом ЧИ) опорной сетки траекторий перелета за время  $2 \text{ сут} \leq T \leq 10 \text{ сут}$  между орбитами ИСЗ и ИСЛ (и обратно). При этом учитывалось влияние сжатия Земли, притяжения Солнца и бралось реальное движение  $r_L(t)$  Луны.

Пусть орбита ИСЗ  $y_T \in Y_T$ , где  $Y_T$  есть множество круговых ( $e_T = 0$ ) орбит ИСЗ с заданным радиусом  $r_{кр}$  ( $6371 \text{ км} \leq r_{кр} \leq 6700 \text{ км}$ ) и наклонением  $i_T$  ( $40^\circ \leq i_T \leq 160^\circ$ ), с незадавленными остальными элементами  $\Omega_T, \omega_T, \tau_T$ . Пусть круговая орбита ИСЛ  $y_\lambda \in Y_\lambda$  имеет заданные радиус  $\rho_{кр}$  ( $1738 \text{ км} \leq \rho_{кр} \leq 2500 \text{ км}$ ) и наклонение  $i_\lambda$  ( $10^\circ \leq i_\lambda \leq 170^\circ$ ). Пусть орбиты  $Y_\lambda$  имеют незадавленные остальные элементы  $\Omega_\lambda, \omega_\lambda, \tau_\lambda$ .

Рассмотрим перелет с орбиты  $y_T \in Y_T$  на орбиту  $y_\lambda \in Y_\lambda$  (и обратно), предполагая, что маневр разгона (или торможения) как вблизи Луны, так и вблизи Земли является плоским (в силу незадавленности долгот узла  $\Omega_T$  орбит ИСЗ  $y_T$  и долгот узла  $\Omega_\lambda$  орбит ИСЛ  $y_\lambda$ ).

Суммарная характеристическая скорость, необходимая для перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ (или обратно)

$$W = W_T + W_\lambda, \quad (5.1)$$

где  $W_T, W_\lambda$  — затраты характеристической скорости на маневр у Земли и у Луны соответственно.

При расчете опорной сетки траекторий был взят ряд положений Луны на интервале времени, покрывающем месяц (сентябрь 1971 г.). Для каждой траектории перелета граничные условия  $y_T \in Y_T$  и  $y_\lambda \in Y_\lambda$  при заданном полном времени перелета удовлетворялись путем решения соответствующей точной краевой задачи. В результате находились затраты  $W_T$  и  $W_\lambda$  характеристической скорости на активных участках разгона и торможения.

Величина  $W_T$  затрат у Земли при заданном радиусе  $r_{кр}$  орбиты ИСЗ зависит не только от времени перелета  $T$ , но еще и от расстояния  $r_L$  Луны — Земля. Каждой величине  $r_L$  Астрономический ежегодник относит единственную величину  $V_L$  скорости Луны (и обратно). Поэтому будем рассматривать (рис. 11.8) вместо  $W_T(T, r_L)$  за-

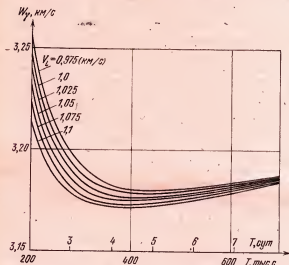


Рис. 11.8. Зависимость затрат  $W_T$  характеристической скорости от времени  $T$  полета и от модуля скорости  $V_L$  Луны.

висимость  $W_T(T, V_L)$  (она оказалась удобнее для графоаналитического метода). Эта зависимость в силу обратности движения определяет необходимые характеристические скорости не только при разгоне КА с орбиты ИСЗ для полета к Луне, но и при переходе на орбиту ИСЗ с пассивного участка возвращения от Луны к Земле.

Заметим, что возвращение от Луны на орбиту ИСЗ требует гораздо больших затрат топлива, чем возвращение на поверхность Земли с торможением в земной атмосфере (при спуске вдоль заданной на Земле трассы). А для аэродинамического торможения и спуска необходимо, чтобы перигейный участок траектории возвращения располагался в достаточно плотных слоях атмосферы.

В опорных точных расчетах траекторий перелета между Землей и Луной влияние атмосферы не учитывалось, однако бралась высота перигея  $H_{\pi} \approx 50$  км, потому что при полете к Луне по этим траекториям начальные высоты могут быть и большими 50 км, в то же время такие траектории пригодны и для возвращения как на орбиту

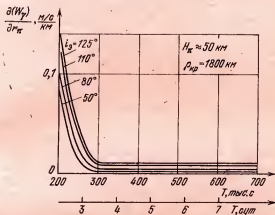


Рис. 11.9. Зависимость производной  $\frac{\partial W_{\gamma}}{\partial r_{\pi}}$  от времени  $T$  полета КА и наклона  $i_{\gamma}$  плоскости траектории КА к экватору.

ИСЗ, так и в атмосферу Земли. Были рассчитаны затраты характеристической скорости на разгон от местной круговой скорости до скорости в перигейной точке траектории полета к Луне. Эти затраты  $W_{\gamma}(T)|_{V_L=\text{const}}$  представлены на рис. 11.8.

Для пересчета маневра от высоты  $H_{кр} = 50$  км к реально осуществимым высотам были численно найдены при различных наклонениях  $i_{\gamma}$  плоскости траектории к экватору производные (рис. 11.9)  $\partial W_{\gamma}/\partial r_{\pi}$  функции затрат по радиусу  $r_{\pi}$  круговой орбиты (связь наклонений  $i$  и  $i_{\gamma}$  при различных долготах  $\Omega$  узла траектории дана в Приложении 3, рис. П.5).

Опорные расчеты показали, что с погрешностью менее 5 м/с можно считать функцию  $W_{\gamma}(T, V_L)$  не зависящей от наклонения  $i_{\gamma}$  к экватору и что соответствующие функции  $W_{\gamma}(T)|_{V_L=\text{const}}$  имеют минимумы при временах

перелета  $4,4 \text{ сут} < T < 4,9 \text{ сут}$  (рис. 11.8). При этих временах реализуются траектории с апогеями, лежащими на орбите Луны. Такие траектории можно назвать обобщенными гомановскими.

Затраты  $W_\lambda$  характеристической скорости на маневр КА у Луны зависят от ряда параметров. Однако расчеты показали, что имеет место почти полная симметрия траекторий относительно плоскости орбиты Луны и перпендикулярной к ней плоскости, проходящей через ось  $m_L m_G$ . Этого следовало ожидать [5—1960], поскольку задача близка к ограниченной круговой задаче трех точек. Такая симметрия позволяет при фиксированных высотах круговых орбит  $H_{\text{кр}}$  ИСЗ и  $H'_{\text{кр}}$  ИСЛ представить величину  $W_\lambda$  как функцию лишь трех параметров: времени перелета  $T$ , угла  $i$  наклонения плоскости траектории перелета к плоскости лунной орбиты и параметра  $\chi = V_L \sin \vartheta_L$ , где  $V_L = V_L(t)$  — скорость Луны, а  $\vartheta_L$  — ее оскулирующая истинная аномалия в момент  $t_L$  маневра у Луны. Использование аргумента  $\chi$  дает возможность представить зависимость  $W_\lambda(\chi) \Big|_{\substack{T=\text{const} \\ i=\text{const}}}$  в виде замкнутой кривой. Для точек одной половины этой кривой  $|\vartheta_L| < 90^\circ$ , для точек другой  $90^\circ < \vartheta_L < 270^\circ$ . Замкнутость кривых упрощает использование рассматриваемого графоаналитического метода (в частности, позволяет избежать экстраполяции).

Как показало сопоставление результатов точного расчета траекторий перелета с орбиты ИСЗ к Луне и с орбиты ИСЛ к Земле, благодаря отмеченной выше симметрии движений кривые  $W_\lambda(\chi)$  в задаче перехода с траекторий Земля — Луна на орбиту ИСЛ симметричны относительно оси ординат  $W_\lambda$  кривым  $W_\lambda(\chi)$  в задаче возвращения с орбиты ИСЛ к Земле (несмотря на несимметричный характер возмущений). Поэтому кривые  $W_\lambda(\chi)$ , вычисленные для высоты  $H_{\text{кр}} \approx 50 \text{ км}$  и изображенные на рис. 11.10,  $a—г$ , пригодны как для задачи полета с орбиты ИСЗ к Луне, так и для задачи возвращения с орбиты ИСЛ к Земле, если ввести по оси абсцисс две шкалы: прямую (для перелетов Земля — Луна) и обращенную (для перелетов Луна — Земля). Параметром кривой семейства с  $T = \text{const}$  является  $40^\circ < |i| < 140^\circ$ . Значениям  $i > 0$  отвечают северные траектории перелета Зем-



ля — Луна и южные — обратного перелета. Для остальных траекторий обоих перелетов  $i < 0$ .

Заметим, что величина  $W_\lambda$  при фиксированном радиусе  $\rho_{кр}$  орбиты ИСЛ слабо зависит от высоты  $H_{кр}$  (при  $H_{кр} \ll r_G$ ) и совсем не зависит от наклона  $i_\lambda$  этой орбиты, если плоскость селеноцентрического движения в течение маневра не изменяется. Это объясняется относительной узостью рассматриваемого пучка селеноцентрических траекторий: действительно, все диапазоны наклонов  $i_\lambda$  реализуются незначительным (по сравнению с радиусом  $\rho_*$  СД) смещением точки входа КА на СД.

Характер зависимости  $W_\lambda(T, i, \chi)$  от  $i$  следует из формулы (4.2.4), полученной методом ТСД. Действительно, при фиксированных высоте  $H_\pi$  перигея (на рис. 11.10,  $a-g$   $H_\pi \approx 50$  км) и времени перелета в (4.2.4) будут фиксированы геоцентрическая энергия  $h = h_1$  и кинетический момент  $C = C_1$ .

С другой стороны, при фиксированном радиусе орбиты ИСЛ ( $\rho_{кр} = 1800$  км на рис. 11.10,  $a-g$ ) и оптимальном маневре (близком к импульсному касательному) имеем скорости  $U_\pi = U_\lambda + W_\lambda$  в периселении гиперболы и  $U = (2\mu_L/\rho_* + U_\pi^2 - 2\mu_L/\rho_\pi)^{1/2}$  на СД, где  $U_\lambda = \sqrt{\mu_L/\rho_\lambda}$ ,  $\rho_\pi = \rho_\lambda$ . Подставляя  $U_\pi$ , получим  $(W_\lambda + U_\lambda)^2 = 2\mu_L(1/\rho_\pi - 1/\rho_*) + U^2$  ( $U^2$  согласно (4.2.4) зависит только от  $i = i_1$ ). (При фиксированном положении Луны радиус  $r_L$  точки входа на СД согласно предыдущему замечанию меняется незначительно.) При этом  $W_\lambda$  должно монотонно расти с ростом  $|i|$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , т. к. убывает  $U$ . Это и подтверждают расчеты (рис. 11.10,  $a-g$ ).

Рассмотрим еще приращение  $\delta W_\lambda$  функции  $W_\lambda$  от приращения  $i$ . Варьируя последнее равенство, получим  $(W_\lambda + U_\lambda)\delta W_\lambda = \delta U^2/2$ . Из (4.2.4)  $\delta U^2 = 2V_L C \sin i \delta i / r_2$ , т. е. функция  $dU^2/di$  максимальна по модулю при  $i = 90^\circ$ . То же относится и к функции  $dW_\lambda/di$ :  $dW_\lambda/di = V_L C \sin i / r_2 (W_\lambda + U_\lambda)$ . Полагая согласно предположению метода ТСД  $r_2 = r_L$ ,  $V_L = \sqrt{\mu_G/r_L}$  и подставляя приближенные значения  $r_1 = 6500$  км,  $C = r_1 V_\pi(r_1)$ ,  $W_\lambda = 1$  км/с,  $U_\lambda = 1,7$  км/с, при  $i = 90^\circ$  и  $\delta i = 20^\circ$  получим  $\delta W_\lambda = (dW_\lambda/di)\delta i \approx 20$  м/с. Точная зависимость от  $T$  приращения  $\delta W_\lambda$ , вызванного приращением  $i_1$  от  $80^\circ$  до  $100^\circ$ , близка к найденной приближенной константе и пред-

ставлена на рис. 11.11 (она мало изменяется с  $T$ , так как малы относительные изменения  $\delta C/C$  и  $\delta W_\lambda/(W_\lambda + U_\lambda)$  на рассматриваемом диапазоне изменения  $T$ ). Точные расчеты обнаруживают и другие эффекты, которые методом ТСД так просто не объясняются. В частности, апсидальные значения  $W_\lambda^{(\alpha)} > W_\lambda^{(\pi)}$  при  $T < 3,5$  сут и  $W_\lambda^{(\alpha)} < W_\lambda^{(\pi)}$  при  $T > 3,5$  сут (рис. 11.10, а—г). Здесь  $W_\lambda^{(\alpha)}$   $W_\lambda^{(\pi)}$  — затраты при положениях Луны соответственно в апогее  $\alpha$  и перигее  $\pi$  ее орбиты (затраты  $W_\lambda^{(\pi)}$  отмечены точками  $\pi_L = (0, W_\lambda(0))$  на рис. 11.10, а—г).

Влияние эллиптичности лунной орбиты проявляется еще в наклоне хорды петли  $W_\lambda(\chi)$  к оси абсцисс на рис. 11.10, а—г. Хордой здесь удобно считать прямую  $p$ ,

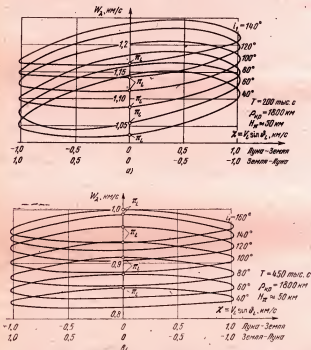


Рис. 11.10. Зависимость затрат  $W_\lambda$  характеристической скорости от траектории и плоскости

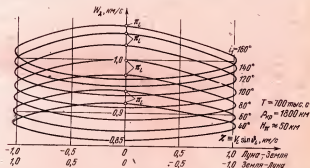
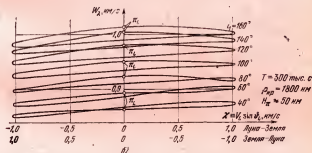
соединяющую две точки петли с вертикальными касательными. Эти точки соответствуют положениям Луны  $\theta_L = 90^\circ, 270^\circ$ , т. е. расстоянию  $r_L = p_L$  от Земли. Рассмотрим разности

$$\Delta W_a = W_\lambda^{(\alpha)} - W_\lambda^{(\pi)}$$

и

$$\Delta W_p = W_\lambda|_{\theta_L=90^\circ} - W_\lambda|_{\theta_L=270^\circ}.$$

Их зависимость от  $T$  (полученная путем точных расчетов) является монотонно убывающей (рис. 11.11). При этом  $\Delta W_p = 0$  (т. е. хорда  $p$  горизонтальна) при  $T = 5$  сут, т. е. для обобщенных гомановских перелетов. При  $T > 7$  сут функции  $\Delta W_a(T)$  и  $\Delta W_p(T)$  приближаются сверху соответственно к константам  $\Delta W_a^{(m)} = -12$  м/с и  $\Delta W_p^{(m)} =$



параметра  $\chi = V_L \sin \theta_L$  при различных углах  $i_L$  наклонения плоскости лунной орбиты.

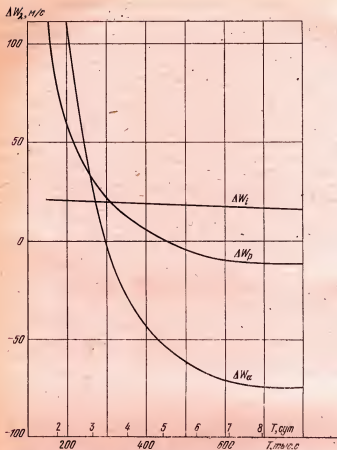


Рис. 11.11. Зависимость от времени  $T$  полета характерных изменений затрат  $W_\lambda$  при изменениях истинной аномалии от  $0$  до  $180^\circ$  — кривая  $\Delta W_\alpha(T)$ , от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  — кривая  $\Delta W_p(T)$  и наклона  $i$  геоцентрической траектории перелета с  $40^\circ$  до  $60^\circ$  — кривая  $\Delta W_i(T)$ .

$= -7,5$  м/с (рис. 11.11). Таким образом, с ростом  $T$  наклон хорды  $p$  к абсциссе асимптотически убывает.

Опорные расчеты функции  $W_\lambda$  затрат были проведены для круговой орбиты ИСЛ с радиусом  $\rho_{кр} = 1800$  км. Для пересчета затрат на другие радиусы  $\rho_{кр}$  селеноцентрических круговых орбит были найдены численно производные (рис. 11.12)  $\partial W_\lambda / \partial \rho_{кр}$  при различных наклонениях

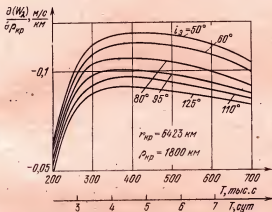


Рис. 11.12. Зависимость производной  $\frac{\partial W_\lambda}{\partial \rho_{кр}}$  характеристической скорости маневра у Луны от времени  $T$  перелета и наклонения  $i_0$  траектории перелета к экватору.

$i_0$  плоскости траектории к экватору (переход от  $i_0$  к  $i$  при любой долготе  $\Omega$  узла дан в Приложении 3, рис. П.5).

Функции затрат  $W_T(T, V_L)$ ,  $W_\lambda(T, i, \chi)$  (рис. 11.8, 11.10, а—г) оказались пригодными для любых дат перелета. Это проверялось точными численными расчетами траекторий и неизменно подтверждалось (с точностью порядка 10 м/с) как в задаче перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ, так и в задачах возвращения с орбиты ИСЛ на орбиту ИСЗ или в земную атмосферу. Поэтому графики на рис. 11.8, 11.10, а—г можно использовать в следующем графоаналитическом методе.

Пусть заданы момент  $t_L$  маневра у Луны числом  $n$  целых суток перелета Земля — Луна, радиус  $\rho_{кр}$  круговой

орбиты ИСЛ, наклонение  $-180^\circ < i_0 < 180^\circ$  к экватору и радиус  $r_\pi$  в перигее пассивного участка траектории перелета. Тогда найдем из Ежегодника по моменту  $t_L$  аргумент широты  $u_L$ , истинную аномалию  $\theta_L$ , скорость  $V_L$  Луны и аргумент  $\chi = V_L \sin \theta_L$ . Полагая, что линия узлов траектории относительно плоскости лунной орбиты проходит через центр Луны в момент  $t_L$ , находим долготу  $\Omega = u_L - 180^\circ$ , отсчитываемую от восходящего узла  $\Omega_L$  лунной орбиты, узла, ближайшего к перигею, а по углам  $\Omega$  и  $i_0$  находим наклонение  $-180^\circ < i < 180^\circ$  (по простым формулам Приложения 3).

Независимо от этого без решения краевой задачи по простым формулам (§§ 9.1 и 11.2) методом долготной привязки траектории находим время  $T$  перелета. По  $(T, i, \chi)$  находим затраты  $W_\lambda$  из соответствующего графика рис. 11.10,  $a-g$ , а по  $(T, V_L)$  находим затраты  $W_\gamma$  из рис. 11.8. Суммарные затраты  $W_\Sigma = W_\lambda + W_\gamma$ . (В случае возвращения в атмосферу берется  $W_\gamma(T, V_L) = 0$ .) Сравнение такого приближенного вычисления суммарных затрат с точными показало, что погрешность  $|\delta W_\Sigma| \leq 15$  м/с.

В качестве примера применения графоаналитического метода приведем результаты расчета функций  $W_\Sigma^{(\alpha)}$  и  $W_\Sigma^{(\pi)}$  от  $T$  в случаях положения Луны в апогее  $\alpha$  и перигее  $\pi$  ее орбиты при различных наклонениях  $i_1$  (рис. 11.13). Эти функции достигают минимальных значений 4–4,2 км/с при временах полета  $T = 4 \div 5$  сут, причем  $W_\Sigma^{(\alpha)} > W_\Sigma^{(\pi)}$  для времен полета  $T < 3,4$  сут и  $W_\Sigma^{(\alpha)} < W_\Sigma^{(\pi)}$  для  $T \geq 3,7$  сут. Объясняется это тем, что производная функции  $h_1(T)$  (рис. 4.5) имеет разные знаки для дуг перелетов, содержащих и не содержащих апогей.

Из рис. 11.13 следует диапазон изменения характеристической скорости  $W_\Sigma$ , необходимой для перелета между круговыми орбитами ИСЗ ( $r_{кр} = 6575$  км) и ИСЛ ( $r_{кр} = 1800$  км) при изменении  $i_1$  от  $40^\circ$  до  $160^\circ$ , времени перелета от 2,3 до 8 сут для любых положений Луны на ее орбите. При этом рассматриваются лишь такие орбиты ИСЗ и ИСЛ, линии узлов которых свободны.

Вводя в  $W_\Sigma$  поправки, учитывающие гравитационные потери и потери, вызванные неоптимальностью управления вектором тяги на активном участке (рис. 11.3,

11.6), можно весьма экономно вычислять энергетические затраты, необходимые для перелетов между орбитами ИСЗ и ИСЛ.

Если маневр торможения (разгона) у Луны пространственный, то к величинам  $W_1$ , определяемым с помощью

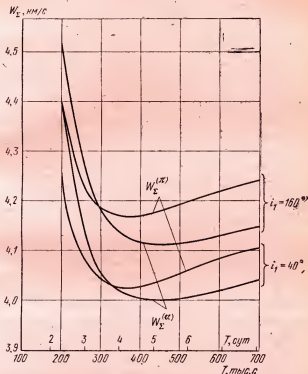


Рис. 11.13. Изменение диапазона затрат характеристической скорости, необходимой для перелета между Луной и Землей, с изменением времени  $T$  перелета.

рис. 11.10, а—г, необходимо добавить дополнительные затраты  $W_1$  характеристической скорости. Вычисление  $W_1$  можно произвести, например, опираясь на результаты работы [1—1974], а если угол  $0^\circ < I < 30^\circ$ , то — с помощью методов работы [2—1975].

## Г л а в а 12

### ПОСАДКА НА ПОВЕРХНОСТЬ ЛУНЫ

Посадка на поверхность Луны возможна: 1) непосредственно с траектории Земля — Луна и 2) с предварительным выходом на орбиту ИСЛ.

Непосредственная посадка на поверхность Луны была опробована при полетах советских автоматических станций «Луна-2, 5, 7, 8, 9, 13».

Посадка с предварительным выходом на орбиту ИСЛ была применена при полете советских автоматических станций «Луна-16, 17, 20, 21» и др., американских аппаратов типа «Сервейер» и пилотируемых кораблей, запущенных по программе «Аполлон».

Траектории непосредственной посадки в зависимости от угла наклона их к поверхности Луны подразделяются на вертикальные (угол между касательной к селеноцентрической траектории и поверхностью Луны в точке прилунения близок к  $90^\circ$ ) и наклонные (траектория пересекает поверхность Луны под острым углом).

Траектория посадки на поверхность Луны после предварительного выхода на орбиту ИСЛ может иметь один активный участок или два и более активных участков, разделенных пассивным полетом в течение некоторого времени. При этом приближение к поверхности Луны также может быть вертикальным или наклонным.

В данной главе рассматривается непосредственная вертикальная посадка в импульсной постановке, с конечной продолжительностью активного участка, а также посадка с предварительным выходом на орбиту ИСЛ. При последующем переходе с орбиты ИСЛ на поверхность Луны рассмотрены случаи непрерывно работающего двигателя и случай двух его включений, разделенных участком пассивного полета.



### § 12.1. Вертикальная посадка непосредственно с траектории Земля — Луна

В случае непосредственной посадки абсолютно оптимальным по затратам характеристической скорости является одноимпульсный маневр с направлением импульса противоположно вектору скорости на минимальном расстоянии  $\rho_L$  от центра Луны (маневры типа IVб — II по классификации [4—1975]). Скорость, необходимая для абсолютно оптимального торможения КА, зависит лишь от начальной селеноцентрической энергии траектории, поскольку конечная энергия  $h' = -2\mu_L/\rho_L$  фиксирована.

Траектории посадки, близкой к вертикальной, обеспечивают достижение поверхности Луны вблизи той точки  $y_0$ , через которую проходит попадающая в центр Луны траектория. Точки  $y_0$  вертикальной посадки на поверхность Луны при фиксированных наклонении  $i$ , секториальной скорости  $S$  начального участка геоцентрической траектории движения образуют на поверхности Луны кривую  $Y_n$ , параметром вдоль которой является энергия движения. Координаты точек кривой  $Y_n$  на лунной поверхности полностью определяются графиком на рис. 5.1, поскольку при вертикальном движении координаты  $\alpha_{сц}$ ,  $\delta_{сц}$  КА на СД те же что и на Луне. Область близких к вертикальной посадке на поверхность Луны расположена вокруг кривой  $Y_n$ . При любых наклонениях  $i$  близкая к вертикальной посадка на поверхность Луны непосредственно с траектории Земля — Луна осуществима лишь в область с селеноцентрическими координатами  $-11^\circ \leq \delta_{сц} \leq 11^\circ$ ,  $230^\circ \leq \alpha_{сц} \leq 350^\circ$  при  $10 \geq T_{1,2} \geq 1$  сут.

Рассмотрим вначале задачу о вертикальной непосредственной посадке КА на поверхность Луны в упрощенной постановке, полагая ускорение  $g_L$  лунной силы тяжести и тягу  $P$  постоянными.

Пусть  $H_0$  — высота КА над поверхностью Луны, с момента  $t_0$  достижения которой начинается отсчет времени  $t$ . Пусть торможение, начавшееся в момент  $t_0$ , кончается в точности на поверхности Луны. Пусть  $U_0 < 0$  — скорость КА на высоте  $H_0 > 0$ , а  $t_{дв}$  — время активного полета КА. Определим время  $t_{дв}$  из условия, что КА, достигнув поверхности Луны ( $H=0$ ), имеет скорость

$U = 0$ . Уравнения радиального движения КА возьмем в виде:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{P}{m} - g_L, \quad \frac{dH}{dt} = U, \quad m(t) = m_0 - |\dot{m}|(t - t_0), \quad (1.1)$$

$$m_0 = \frac{G_0}{g_0}, \quad \dot{m} = \text{const},$$

где  $m$  — масса КА,  $H$  — высота над лунной поверхностью,

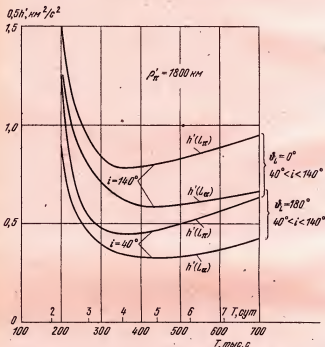


Рис. 12.1. Зависимость селеноцентрической энергии  $h'$  от времени  $T$  перелета при различных наклонениях  $i$  для двух положений Луны: на минимальном ( $\theta_L = 0^\circ$ ) и максимальном ( $\theta_L = 180^\circ$ ) расстояниях от Земли (при фиксированном радиусе  $\rho_\pi$  периселения траектории).

$g_0, g_L$  — ускорения силы тяжести на поверхностях Земли и Луны соответственно,  $G_0$  — вес КА на Земле. Введем, как и в § 11.1, начальную тяговооруженность — отноше-

ние тяги КА к его начальному весу:

$$v_0 = P/G_0, \quad P = g_0 P_{уд} |\dot{m}| = \text{const}, \quad (1.2)$$

$|\dot{m}| = v_0 G_0 / g_0 P_{уд}$ , и

$$\frac{dU}{dt} = \frac{g_0 P_{уд}}{P_{уд}/v_0 - (t - t_0)} - g_L, \quad \frac{dH}{dt} = U. \quad (1.3)$$

Интегрирование уравнений (1.3) с начальными данными

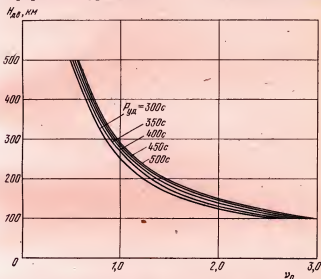


Рис. 12.2. Зависимость высоты  $H_{дв}$  включения двигателя от начальной тяговооруженности  $v_0$  (для различных значений удельной тяги  $P_{уд}$ ) при мягкой посадке на поверхность Луны.

$H(t_0) = H_0 > 0$ ,  $U(t_0) = U_0 < 0$  на интервале времени от начала  $t_0$  до конца  $(t_0 + t_{дв})$  торможения позволяет получить систему двух трансцендентных уравнений относительно  $t_0$  и  $t_{дв}$ :

$$H_0 + U_0(t_0 + t_{дв}) - g_L \frac{(t_0 + t_{дв})^2}{2} + g_0 P_{уд} [(P_{уд}/v_0 - t_{дв}) \ln(1 - t_{дв} v_0 / P_{уд}) + t_{дв}] = 0, \quad (1.4)$$

$$U_0 - g_L(t_0 + t_{дв}) - g_0 P_{уд} \ln(1 - t_{дв} v_0 / P_{уд}) = 0.$$

Эти уравнения определяют зависимость времени  $t_{\text{дв}}$  работы двигателя от  $H_0$ ,  $U_0$ ,  $v_0$ ,  $P_{\text{уд}}$ ,  $t_0$ . По определению высота начала торможения

$$H_{\text{дв}} = H_0 + U_0 t_0 - g_L \frac{t_0^2}{2}. \quad (1.5)$$

При фиксированной селеноцентрической энергии  $h'$  пучка гипербол скорость  $U_0$  на высоте  $H_0$  (над поверхностью

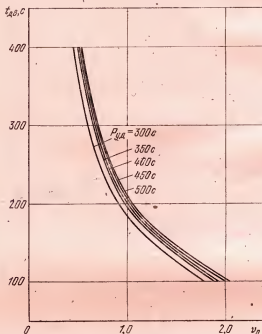


Рис. 12.3. Зависимость времени  $t_{\text{дв}}$  работы двигателя от начальной тяговооруженности  $v_0$  при посадке с различными значениями удельной тяги  $P_{\text{уд}}$ .

$\rho = \rho_L$  Луны) не зависит от ее направления и находится из интеграла энергии

$$U_0 = \left( \frac{2\rho_L}{\rho_L + H_0} + h' \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Поскольку  $h'$  для попадающих в центр Луны траекторий зависит лишь от времени полета  $T$ , скорости  $V_L$  Луны и геоцентрического наклона  $i$  в перигее, то здесь можно определять  $h'$  из двухпараметрического семейства зависимостей (рис. 12.1), полученных в результате решения краевой задачи попадания в центр Луны по методу § 11.3. Параметрами являются положение  $L$  Луны на ее

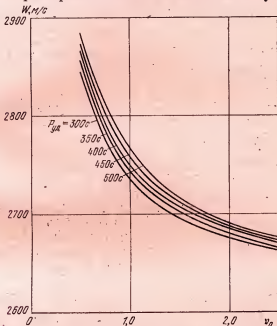


Рис. 12.4. Зависимость затрат  $W_\lambda$  характеристической скорости на торможение (при посадке на Луну) от начальной тяговооруженности  $v_0$  для двигателей различной удельной тяги  $P_{уд}$ .

орбите и наклонение  $i$ . На рис. 12.1 даны лишь крайние кривые  $h'(T)$  для положений Луны в перигее ( $L_n$ ), в апогее ( $L_a$ ) и для наклонений  $i = 40^\circ, 140^\circ$ .

Исследование соотношений (1.4) позволяет получить все характеристики траекторий вертикальной посадки на поверхность Луны, в частности, зависимости  $t_{дв}$ ,  $H_{дв}$  и затрат характеристической скорости  $W$  от  $v_0$  ( $0,1 \leq v_0 \leq 1,5$ ) для постоянных значений  $P_{уд}$ . На рис. 12.2–12.4

$P_{\text{ул}} = 300, 350, 400, 500$  с,  $U_0 = 2550$  м/с, что соответствует траектории перелета от Земли к Луне за время  $T \approx 3,3$  сут. Энергетические затраты  $W$ , естественно, убывают с ростом  $v_0$ . Они превышают затраты импульсного торможения при  $v_0 \geq 2$  на 250—350 м/с (рис. 12.4). Высота  $H_0$  включения двигателя и время  $t_{\text{дв}}$  его работы увеличиваются с убыванием  $v_0$  и могут достигать  $500 \div 600$  км и  $400 \div 500$  с соответственно при  $v_0 = 0,5$  (рис. 12.2, 12.3).

### § 12.2. Выбор номинального направления тяги с учетом неперпендикулярности приближения к поверхности Луны

Известно [2—1967], что при реализации вертикальной посадки ориентация тормозного импульса против расчетного вектора скорости приводит к значительной оста-

точной боковой скорости даже при относительно малых отклонениях прицельной дальности от нуля. При этом величина боковой скорости, естественно, пропорциональна величине  $d$  прицельной дальности. Например, при  $d = 100$  км получим из интеграла площадей угол скорости  $U_{\text{л}}$  с радиусом  $\rho_{\text{л}}$  в точке Л (рис. 12.5) на Луне:

$$\alpha_{\text{л}} \approx \sin \alpha_{\text{л}} = dU_{\infty}/\rho_{\text{л}}U_{\text{л}},$$

$$U_{\text{л}}^2 = 2\mu_{\text{л}}/\rho_{\text{л}} + U_{\infty}^2. \quad (2.1)$$

Погрешность направления импульса  $\delta\alpha_{\text{л}} = \Phi_{\text{л}} - \alpha_{\text{л}}$ , где угловая дальность  $\Phi_{\text{л}}$  находится по формуле (4.4.21):

$$\text{tg } \Phi_{\text{л}}/2 = \sin \alpha_{\text{л}}/(k + \cos \alpha_{\text{л}}),$$

$$k = U_{\infty}/U_{\text{л}}.$$

Рис. 12.5. Параметры траектории посадки с траектории Земля—Луна непосредственно на лунную поверхность.

Так как  $\text{tg } \Phi_{\text{л}}/2 \approx \Phi_{\text{л}}/2$ , то  $\delta\alpha_{\text{л}} = \frac{1-k}{1+k} k \frac{d}{\rho_{\text{л}}} \approx 70'$  при  $d = 200$  км и  $U_{\infty} = 1,3$  км/с. Соответствующая боковая скорость  $U_0 = U_{\text{л}}\delta\alpha_{\text{л}} \approx 54$  м/с.

Направить тормозной импульс против вектора скорости в момент прилунения с учетом членов первого и второго порядка малости по прицельной дальности  $d$  позволяет недавно открытое [1—1965] свойство пучка гиперболических траекторий с одинаковым вектором  $U_\infty$  скорости «на бесконечности». Это свойство заключается в том, что направление  $-\rho_B^0$  на центр Луны, определяемое на некотором подходящим образом выбранном расстоянии  $\rho_B$ , общим для всех траекторий пучка, совпадает с направлением вектора скорости в точке торможения с точностью порядка  $d^2$ . Направляя тягу по направлению  $\rho_B^0$ , можно уменьшить остаточную боковую скорость во много раз.

Приведем вывод указанного выше свойства. Пусть  $\rho_B$  — расстояние до точки  $B$ , в которой направление  $-\rho_B^0$  на центр Луны совпадает с направлением вектора скорости  $U_L$  в точке  $L$  прилунения КА,  $\alpha_L$  — угол между  $U_L$  и  $\rho_L$ ,  $\theta_L = 90^\circ - \alpha_L$ ,  $\Phi$  — угловая дальность между  $\rho_B$  и  $\rho_L$  (рис. 12.5). Тогда условие  $\rho_B^0 = U_L^0$  дает  $\alpha_L = \Phi$ , и формула (4.4.1) дает после тождественных преобразований

$$\rho_B = 2\beta_L \rho_L (1 + \cos \alpha_L), \quad (2.2)$$

где  $2\beta_L = U_L^2 / \mu_L$ .

Разложением  $\cos \alpha_L$  в ряд получим

$$\rho_B = \rho' \left( 1 - \frac{\alpha_L^2}{4} + \dots \right) \equiv \rho' + \Delta \rho(\alpha_L), \quad (2.3)$$

$$\rho' = 4\beta_L \rho_L = 2U_L^2 \rho_L / \mu_L. \quad (2.4)$$

Основной член  $\rho'$  не зависит от  $\alpha_L(d)$ . Член

$$\Delta \rho \equiv \rho_B - \rho' < 0, \quad |\Delta \rho| < \rho' \alpha_L^2 / 4 \equiv \Delta \rho_M. \quad (2.5)$$

При малых  $d$  получим с помощью интеграла площадей (2.1)

$$\Delta \rho_M \approx \frac{\rho'}{4} \left( \frac{U_\infty}{U_L \rho_L} \right)^2 d^2 = \frac{U_\infty^2}{2\mu_L} d^2. \quad (2.6)$$

Видим, что с точностью до величин порядка  $d^2$  расстояние  $\rho_B$  постоянно для всего пучка траекторий и равно  $\rho'$ .

Пусть направление вектора  $\rho_B$  с модулем  $\rho'$  используется как направление вектора импульса торможения на фактической траектории. Оценим ошибки этого метода торможения. Расстояние  $\rho'$  отличается от нужного  $\rho_1$  на величину  $\delta\rho$ , и от этого появляется ошибка в угле ориентации

$$\delta\gamma \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha_B \delta\rho}{\rho_B} \approx \frac{U_\infty d}{U_{BPB} \rho_B} \delta\rho \approx \frac{U_\infty d}{U' (\rho')^2} \delta\rho \equiv k_1 d \delta\rho, \quad (2.7)$$

где

$$U_B = \sqrt{U_\infty^2 + 2\mu_L/\rho_B} \approx U' \equiv \sqrt{U_\infty^2 + 2\mu_L/\rho'}, \\ k_1 \equiv U_\infty/U' \rho'^2.$$

При  $\rho' = 8350$  км,  $U_\infty = 1,3$  км/с получим

$$k \approx 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ угл. мин./км}^2.$$

Методическую ошибку в определении ориентаций импульса оценим, положив  $\delta\rho = -\Delta\rho_M$ :

$$\delta\gamma < \delta\gamma_M \approx k_1 \frac{U_\infty^2}{2\mu_L} d^3 \equiv k_M d^3, \quad k_M \equiv \frac{U_\infty^3 \mu_L}{8\rho_L^4 U' U_d^4}, \quad (2.8)$$

$\delta\gamma$  является величиной третьего порядка относительно  $d$ . Для  $\Delta\gamma_M = 5'$  получим  $d = 1100$  км (при прежних константах). При  $d = 200$  км методическая ошибка  $\delta\gamma_M < 2''$ ;  $\delta U_c = U_d \delta\gamma < 3$  см/с, т. е. пренебрежимо мала, и боковая скорость определяется другими ошибками. Например, если расстояние  $\rho'$  определяется бортовым прибором с ошибкой  $\delta\rho$ , постоянной для всего пучка, то возникающая от этого ошибка в направлении тяги

$$\delta\gamma = k_1 d \delta\rho \quad (2.9)$$

линейна по отклонению  $d$ . Если  $d = 200$  км,  $\delta\rho = 100$  км, то  $\delta\gamma = 0,66$  угл. мин.

Если величина  $U_\infty$  изменилась по сравнению с расчетной на  $\delta U_\infty$ , то согласно (2.4) ошибка в определении  $\rho'$

$$\delta\rho' = 2\rho' U_\infty \delta U_\infty / U_\infty^2. \quad (2.10)$$

Соответствующая ошибка  $\delta\gamma$  по формуле (2.9) определя-



ется при  $\delta\rho = \delta\rho'$ . Если  $\delta U_\infty = 10$  м/с, то  $\delta\rho' = 27$  км, при этом  $\delta\gamma = 0,2$  угл. мин для  $d = 200$  км.

Проведенный анализ ошибок показывает, что данный метод ориентации дает возможность при довольно грубых траекторных измерениях существенно уменьшить остаточную боковую скорость перед прилунением.

### § 12.3. Посадка на лунную поверхность с орбиты ИСЛ

Доставка КА на поверхность Луны с предварительным выходом на орбиту ИСЛ технически сложнее, чем непосредственная, так как связана с неоднократным запуском двигателя и требует измерения и коррекции орбиты ИСЛ. Однако преимуществом такого вида посадки является возможность достижения любой точки лунной поверхности.

Задача расчета выведения КА на орбиту ИСЛ рассмотрена в гл. 11, поэтому здесь рассматривается задача расчета спуска КА с орбиты ИСЛ, заданной параметрами  $\Omega_k$ ,  $i_k$ ,  $p_k$ ,  $e_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\tau_k$ , и мягкой посадки КА в заданную точку на поверхности Луны, т. е. посадки с нулевой скоростью  $U_d = 0$ .

Поскольку траектория спуска существенно зависит от параметров орбиты ИСЛ и характеристик КА — начальной тяговооруженности  $v_0$  и удельной тяги  $P_{уд}$ , то возникает задача такого выбора элементов орбиты ИСЛ и параметров  $v_0$  и  $P_{уд}$ , при которых посадка на поверхность Луны требует минимальных затрат топлива. Далее, поэтому, предполагаем, что орбита ИСЛ является круговой и что спуск происходит в плоскости орбиты ИСЛ. Тогда из шести элементов орбиты ИСЛ существенным является лишь  $p_k$ , т. е. высота  $H_k$  орбиты КА над поверхностью Луны. Решение задачи оптимизации перелета с круговой орбиты спутника планеты на поверхность планеты (без атмосферы) известно [4—1975]: наименьшие характеристические скорости требуются при двухимпульсном переходе (типа II — II по классификации [4—1975]) по эллипсу, апоцентрий которого касается орбиты ИСЛ, а перигентрий касается планеты. Оба импульса — тормозные и апсидальные.

В случае активных участков конечной тяги с незадаанными параметрами ее программы желательно так выбрать эти параметры, чтобы необходимые характеристические скорости минимизировать. Если тяговооруженность  $\gamma_0$  невелика, то два активных участка могут слиться в один. Поэтому ниже рассмотрим две схемы спуска. Первая схема спуска в принципе обратна схеме выведения КА на круговую орбиту: в ней предполагается, что активный участок один и тяга на нем постоянна. Поэтому по первой схеме двигатель КА работает непрерывно от момента включения на орбите ИСЛ до момента посадки КА на поверхность Луны. По аналогии с расчетом выведения предполагается, что, начиная с заданной высоты  $H_B$ , происходит чисто вертикальный полет КА к поверхности Луны с таким расчетом, чтобы к моменту прилунения скорость КА была равна нулю ( $U_L = 0$ ).

На участке движения КА от высоты  $H_A$  до высоты  $H_B$  пусть задана линейная программа угла тангажа (как и в §. 11.1)

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \dot{\theta}(t - t_0), \quad (3.1)$$

где  $t_0$  — момент включения двигателя. Время и угловая дальность спуска не фиксированы. На участке спуска с высоты  $H_B$  до поверхности Луны угол тяги  $P$  с местным горизонтом равен  $90^\circ$ . Для численного анализа задачи используем упрощенную систему уравнений движения в невращающейся селеноцентрической системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = -\frac{\mu_L \rho}{\rho^3} + \frac{P}{m}, \quad \frac{d\rho}{dt} = U, \quad m = m_0 - \dot{m}(t - t_0). \quad (3.2)$$

Сведем расчет траектории посадки КА с круговой орбиты ИСЛ на поверхность Луны к решению двухпараметрической краевой задачи. Ее аргументами будем считать высоту  $H_A$  круговой орбиты ИСЛ и начальный угол тангажа  $\dot{\theta}_0$ , а функциями — угол  $\alpha_B$  (на высоте  $H_B$ ) между радиусом-вектором  $\rho_B$  и вектором скорости  $U_B$  и модуль скорости  $U_L$  на поверхности Луны.

Необходимые значения функций известны:  $\alpha_B = 180^\circ$ ,  $U_L = 0$ . Параметр  $\dot{\theta}$  в краевой задаче сначала будем фиксировать. Затем, меняя  $\dot{\theta}$  в диапазоне  $0,01 \text{ град/с} \leq$

$\leq \dot{\theta} \leq 0,1$  град/с, будем определять оптимальные его значения минимизацией затрат  $W$  характеристической скорости. Результаты расчета угловой дальности  $\Phi(v_0)$ , высоты  $H_\lambda(v_0)$  и затрат  $W(v_0)$  для траекторий спуска КА по рассматриваемой схеме представлены на рис. 12.6

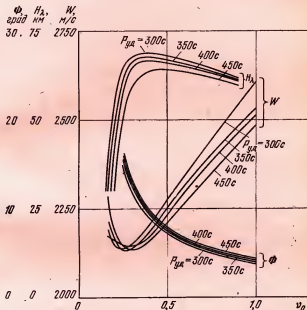


Рис. 12.6. Угловая дальность  $\Phi$ , высота  $H_\lambda$  круговой орбиты ИСЛ и затраты  $W$  характеристической скорости при посадке на Луну с орбиты ИСЛ при непрерывном активном участии, как функции начальной тяговооруженности  $v_0$  ( $P_{уд}$  — удельная тяга).

при различных величинах  $v_0$  и постоянных значениях  $P_{уд}$ . Оказалось, что оптимальное значение параметра программы угла тангажа  $\dot{\theta}$  несущественно зависит от изменений  $v_0$  и  $P_{уд}$  в рассмотренных (рис. 12.6) диапазонах исследуемых параметров. Он может быть принят постоянным, равным  $-0,026$  град/с.

Из рис. 12.6 видно, что при спуске и посадке на поверхность Луны КА с непрерывно работающим двигателем энергетические затраты минимальны для орбит

с высотой  $H_A \approx 50 \div 60$  км. Оптимальная начальная тяговооруженность меняется слабо:  $0,25 \leq v_0 \leq 0,35$  для всех рассмотренных значений  $P_{уд}$ , а минимальная характеристическая скорость  $2140 \text{ м/с} \leq W \leq 2150 \text{ м/с}$ . При уменьшении тяговооруженности  $v_0$  от 1 до  $\sim 0,35$  величина

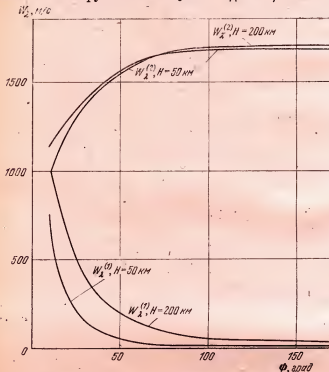


Рис. 12.7. Зависимость затрат  $W_A$  характеристической скорости при посадке на Луну с двумя активными участками от угловой дальности между ними  $\Phi$ .

$W(v_0)$  уменьшается за счет снижения потерь на неколлинеарность тяги и скорости. Дальнейшее уменьшение тяговооруженности КА ( $v_0 < 0,25$ ) ведет к росту  $W$  из-за увеличения времени работы двигателя и соответствующего возрастания потерь на гравитацию. Оптимальные значения высоты круговой орбиты  $\tilde{H}_A$  и начальной тяговооруженности  $v_0$  слабо зависят от выбора параметров

программы угла тангажа вблизи оптимальных их значений.

Вторая схема спуска КА на поверхность Луны значительно ближе к абсолютно оптимальной и состоит из двух активных участков. Считается, что в результате первого запуска двигателя КА переходит с круговой орбиты на эллиптическую, пересекающую поверхность Луны в точке посадки. При втором запуске двигателя к моменту достижения поверхности Луны происходит полное гашение скорости КА ( $U_L = 0$ ). Для этой схемы посадки в предположении импульсного характера изменения скорости на обоих активных участках имеем импульсы:

$$W_{\lambda}^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu_L}{\rho_L + H_L}} - \sqrt{\frac{\mu_L \rho_L (1 - \cos \Phi)}{(\rho_L + H_{\lambda})(\rho_L - \rho_L \cos \Phi + H_{\lambda})}},$$

$$W_{\lambda}^{(2)} = \sqrt{\mu_L \left[ \frac{H_{\lambda}(H_{\lambda} - \rho_L \cos \Phi)}{\rho_L(\rho_L + H_{\lambda})(\rho_L - \rho_L \cos \Phi + H_{\lambda})} + \frac{1}{\rho_L} \right]},$$

где  $\Phi$  — угловая дальность пассивного полета.

Результаты расчета функций  $W_{\lambda}^{(1)}(\Phi)$  и  $W_{\lambda}^{(2)}(\Phi)$  представлены на рис. 12.7 для круговых орбит с высотой 200 км и 50 км. Видно, что с ростом угловой дальности спуска сумма  $W_{\lambda} = W_{\lambda}^{(1)} + W_{\lambda}^{(2)}$  приближается к пределу, который является абсолютным минимумом характеристической скорости и реализуется томановским перелетом с круговой орбиты высотой  $H_{\lambda}$  на поверхность Луны (с угловой дальностью  $\Phi = 180^\circ$ ).

При спуске с угловыми дальностями от  $30^\circ$  до  $180^\circ$  величина необходимой характеристической скорости для  $H_{\lambda} = 50$  км составляет  $\sim 1750$  м/с, что примерно на 400 м/с меньше  $\min_{v_0} W$  при посадке с непрерывно работающим двигателем.

При угловых дальностях  $\Phi < 30^\circ$  необходимые затраты характеристической скорости начинают существенно расти, и преимущества второй схемы перед первой исчезают.

ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ  
ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ

Определение. *Траекторией возвращения* (ТВ) от Луны к Земле называется траектория сближения, начинающаяся в СД Луны и кончающаяся на геоцентрическом расстоянии  $r_k < r_T \ll r_L$ , где  $r_T$  — заданная константа. (Таким образом, ТВ может быть частью облетной траектории, кончающейся у Земли.)

В этом разделе рассматриваются ТВ, реализуемые с помощью одного активного участка (или одного импульса скорости у Луны). ТВ могут начинаться на поверхности Луны или на орбите ИСЛ. При этом активный участок перехода на ТВ может быть плоской или пространственной кривой. Соответственно маневр перехода называют плоским или пространственным. Кончатся ТВ могут переходом на траекторию торможения и спуска в земной атмосфере (с посадкой на поверхность Земли) или активным участком перехода на орбиту ИСЗ. Время полета по ТВ, как и время полета по траектории полета к Луне, может быть весьма велико. Однако здесь будем считать, что оно не превосходит 10 суток.

Литература, посвященная ТВ от Луны к Земле, рассмотрена во введении. В данном разделе рассматриваются не все вопросы, затронутые в этой литературе, а лишь основные.

## Глава 13

НОМИНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ  
ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ

Рассмотрим траекторную задачу возвращения КА к Земле с поверхности Луны или орбиты ИСЛ на земную поверхность или на некоторую орбиту ИСЗ. Условия посадки на поверхность Земли определяются параметрами

траектории входа КА в атмосферу Земли. Поскольку скорость КА на ТВ у Земли приближается к параболической, то на параметры входа в атмосферу Земли накладываются жесткие ограничения, обусловленные, с одной стороны, допустимыми максимальными перегрузками при аэродинамическом торможении, а с другой стороны — условием захвата КА атмосферой Земли. Если, например, перегрузки на траектории спуска должны лежать в пределах, допустимых для человека, и условие захвата КА атмосферой Земли должно гарантироваться, то высота условного перигея траектории возвращения должна находиться в коридоре шириной около 50 км [1—1970]. Здесь условным (фиктивным) перигеем назван согласно Чепмену [4—1959] перигей траектории, вычисленной без учета влияния атмосферы [1—1970].

Возвращение на Землю автоматических КА допустимо с большими максимальными перегрузками, чем пилотируемых КА. Для них коридор входа шире на несколько десятков километров. Но эта ширина коридора мала по сравнению с радиусом Земли; поэтому требования к точности реализации таких траекторий высоки.

Задаче возвращения КА от Луны на орбиту ИСЗ здесь уделяется меньшее внимание, чем задаче возвращения в атмосферу Земли, так как для перехода с ТВ на орбиту ИСЗ требуются значительные дополнительные энергетические затраты.

В задаче возвращения с поверхности Луны несомненный интерес представляют траектории, начинающиеся из области возможных точек вертикальной посадки. Интересны также траектории, начинающиеся вертикально, или почти вертикально по отношению к лунной поверхности, так как для них наиболее проста система управления взлетом.

В задаче возвращения с орбиты ИСЛ интересны траектории, для которых минимальны затраты характеристической скорости на маневр перехода (с орбиты ИСЛ на ТВ).

Анализ ТВ проводится здесь с помощью методов ТСД и скоростных многообразий, позволяющих получить хорошее качественное и приближенное количественное представление о влиянии различных факторов и об основных характеристиках ТВ.

### § 13.1. Общая характеристика множества траекторий возвращения

Определению ТВ, данному в начале раздела III, удовлетворяют все траектории Луна — Земля, для которых постоянная  $\tilde{h}$  интеграла Якоби в ограниченной круговой задаче трех тел Земля — Луна — КА достаточно превышает ее первое критическое значение  $\tilde{h}_1$  (§ 3.1). Траектории Луна — Земля со значениями  $\tilde{h}$ , лишь незначительно превышающими  $\tilde{h}_1$ , совершают много оборотов вокруг Луны, а затем вокруг Земли. Они чрезвычайно чувствительны к разбросу начальных данных, соответствующие времена полета весьма велики (§§ 3.1, 3.2), и в дальнейшем эти траектории рассматриваться не будут. Ограничимся изучением ТВ с временами полета от 1 до 10 суток.

В рамках метода игнорирования возмущений (ИВ) заменим ТВ двумя дугами конических сечений: селеноцентрической с фокусом в центре Луны и геоцентрической с фокусом в центре Земли. Геоцентрическая скорость  $V_3$  (назовем ее выходной) на СД Луны равна сумме селеноцентрической выходной скорости  $U_3$  и геоцентрической скорости  $V_L$  движения Луны. Орбиту Луны приближенно будем считать круговой, поэтому скорость  $V_L$  Луны будет постоянной (около 1 км/с).

Пусть множество ТВ ограничено совокупностью траекторий, имеющих заданный предельный радиус  $r_1$  условного перигея. Для случая возвращения на поверхность Земли  $r_1$  равен радиусу верхней границы земной атмосферы, для случая возвращения на орбиту ИСЗ  $r_1$  равен апогейному расстоянию спутника. Очевидно,  $r_1 \ll a_L$ , где  $a_L = 384\,400$  км — большая полуось лунной орбиты. Например, в первом случае имеем  $r_1/a_L \approx 1/60$ . Для граничных траекторий из интеграла площадей имеем

$$r_3 V_{3\tau} = r_1 V_1, \quad (1.1)$$

где  $V_1$  — скорость в перигее  $r_1$ ,  $r_3 = r_1$  граничной траектории;  $r_3$  и  $V_{3\tau}$  — соответственно геоцентрические радиус и трансверсальная скорость в момент  $t_3$  выхода КА из СД Луны.



Из интеграла энергии имеем

$$V_3^2 - \frac{2\mu_G}{r_3} = V_\gamma^2 - \frac{2\mu_G}{r_\gamma},$$

откуда

$$V_\gamma = V_\pi \sqrt{1 + \beta_3 - v_r}, \quad \beta_3 = V_3^2/V_\pi^2, \quad v_r = r_\gamma/r_3. \quad (1.2)$$

Здесь  $V_\pi = V_\pi(r_\gamma) = \sqrt{2\mu_G/r_\gamma}$  — геоцентрическая параболическая скорость на расстоянии  $r_\gamma$ .

Из (1.1) и (1.2) имеем

$$V_{3\tau} = v_3 V_\pi \sqrt{1 + \beta_3 - v_r}. \quad (1.3)$$

Поскольку  $r_3 \approx a_L$ , то для случая возвращения на поверхность Земли  $v_r \approx r_\gamma/a_L \approx 1/60$ . Величина  $\beta_3$  не может заметно превышать  $V_L^2/V_\pi^2$ , так как из-за роста энергетических затрат не выгодно выходить из СД с селеноцентрической скоростью  $U_3$ , компенсирующей с большим избытком скорость  $V_L$  движения Луны. Для задачи возвращения на Землю  $\beta_3 \approx 10^{-2}$ .

Следовательно, в силу (1.3) для граничных ТВ, трансверсальная выходная скорость  $V_{3\tau} \approx V_\tau^*$ , где  $V_\tau^* \equiv v_r V_\pi(r_\gamma)$ , т. е. составляет около 0,2 км/с. Для остальных ТВ

$$V_{3\tau} \leq V_\tau^* \quad (1.4)$$

независимо от начальных данных, причем равенство (1.4), очевидно, может иметь место для всех ТВ с  $\beta_3 = v_r$ , как следует из (1.3). Для ТВ, проходящей через центр Земли,  $V_{3\tau} = 0$ . Нетрудно установить, что селеноцентрическая выходная скорость  $U_3 \geq U_3^* \equiv V_L - V_\tau^* \approx 0,8$  км/с, ибо иначе будем иметь проекцию  $(U_3 + V_L)_\tau > V_\tau^*$  вопреки (1.4). Величина  $U_3^*$  более чем вдвое превосходит селеноцентрическую параболическую скорость на границе  $\rho = \rho_*$  СД Луны (составляющую менее 0,4 км/с). Поэтому дуга ТВ в СД Луны неизбежно является гиперболой.

Будем предполагать, что  $\rho_\pi \ll \rho_*$  на ТВ. В этом случае направления селеноцентрических выходных скоростей  $U_3$  и радиуса  $\rho_3$  на СД весьма близки. Оценим угол  $\alpha_3$  между этими направлениями. Из селеноцентрических интегралов энергии и площадей в точках  $\pi$  периселения

и 3 выхода из СД

$$U_{\pi}^2 - \frac{2\mu_L}{\rho_{\pi}} = U_3^2 - \frac{2\mu_L}{\rho_3}, \quad \rho_{\pi} U_{\pi} \sin \alpha_{\pi} = \rho_3 U_3 \sin \alpha_3, \quad (1.5)$$

где  $\sin \alpha_{\pi} = 1$ ,  $\rho_3 = \rho_*$ , имеем

$$\sin \alpha_3 \leq v_p \frac{\sqrt{\beta_{\pi}}}{\sqrt{\beta_{\pi} - 1 + v_p}}, \quad (1.6)$$

где  $v_p = \rho_{\pi}/\rho_3$ ,  $\beta_{\pi} = (U_{\pi}/U_{\pi})^2$ ,  $U_{\pi} = U_{\pi}(\rho_{\pi}) = \sqrt{2\mu_L/\rho_{\pi}}$ . Здесь  $U_{\pi}$  — селеноцентрическая параболическая скорость на расстоянии  $\rho_{\pi}$ . Так как  $\alpha_3$  (1.6) монотонно убывает с ростом  $\beta_{\pi}$ , то наибольшим  $\alpha_3$  будет при наименьшем  $\beta_{\pi}$ , т. е. при наименьшем  $U_3 = U_3^*$ . Если взять при этом  $\rho_{\pi}$  порядка радиуса Луны, то получим  $v_p < 1/30$ , т. е.  $\alpha_3 < 6^\circ$ .

Рассмотрим теперь геометрически выходные селеноцентрические скорости  $U_3$  постоянного модуля и всевозможных направлений в момент  $t_3$  выхода КА из СД в невращающейся системе координат  $uvw$ , ось  $u$  которой в момент  $t_3$  направлена от Луны к Земле, ось  $v$  — против скорости Луны  $V_L(t_3)$ , а ось  $w$  дополняет оси  $u$ ,  $v$  до правой тройки. Совокупность концов рассматриваемых селеноцентрических скоростей  $U_3$  образует сферу радиуса  $U_3$  —  $U_3$ -сферу (штриховая линия на рис. 13.1). Соответствующая совокупность выходных геоцентрических скоростей  $V_3$  своими концами образует сферу радиуса  $V_3$  —  $V_3$ -сферу (сплошная линия на рис. 13.1).

Выделим на  $V_3$ -сфере области направлений  $U_3$ , удовлетворяющие условию (1.4). Очевидно, эти области вырезаются из  $V_3$ -сферы прямым круговым цилиндром радиуса  $V_{\tau}^*$ , ось которого совпадает с осью  $u$ . Точнее, они вырезаются однополостным гиперболоидом вращения с осью  $u$  (§ 4.4). Но при малых  $r_7$  этот гиперболоид близок к нашему цилиндру. Заметим, что точки области (1.4) на  $V_3$ -сфере, для которых  $V_{3u} < 0$ , соответствуют удалению КА от Земли. Действительно, соответствующие точки на  $U_3$ -сфере расположены в ее левой верхней части (рис. 13.1, 13.2). Так как селеноцентрический радиус  $\rho_3$  составляет малый угол  $\alpha_3$  со скоростью  $U_3$  ( $\alpha_3 < 6^\circ$ ), то точки выхода расположены тоже в верхней части левой половины СД (рис. 13.3). Если в точку  $\rho_3$  на СД про-

вести геоцентрический радиус  $r_3$ , то его угол с соответствующим вектором  $V_3$ , удовлетворяющим условию (1.4), будет острым, так как угол радиуса  $r_3$  с направлением  $(-u^0)$  мал (рис. 13.1, 13.2).

Итак, при  $V_{3u} < 0$  имеем  $V_{3r} > 0$ , аналогично при  $V_{3u} > 0$  имеем  $V_{3r} < 0$ . Поэтому движения с  $V_{3u} < 0$

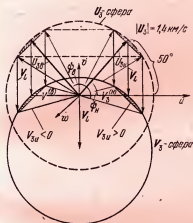


Рис. 13.1. Многообразия селеноцентрических ( $U_3$ ) и геоцентрических ( $V_3$ ) скоростей на выходе из сферы действия Луны. Случай двусвязной области возвращения ( $V_{3\tau} < V_{\tau}^*$ ) на  $V_3$ -сфере.

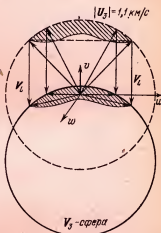


Рис. 13.2. Многообразия селеноцентрических  $U_3$  и геоцентрических  $V_3$  скоростей на выходе из сферы действия Луны. Случай односвязной области возвращения ( $V_{3\tau} < V_{\tau}^*$ ) на  $V_3$ -сфере.

можно назвать восходящими, а движения с  $V_{3u} > 0$  — нисходящими (по отношению к Земле).

Если скорость  $V_3 < V_n(r_3)$ , то КА через некоторое время после выхода из СД Луны достигает апогея геоцентрической орбиты и начинает двигаться к Земле. В противном случае КА удаляется в бесконечность, и траектория не является ТВ. При этом

$$1,56 \text{ км/с} = V_n(r_L - \rho_*) \geq V_n(r_L + \rho_*) = 1,32 \text{ км/с}. \quad (1.7)$$

Если  $U_3 > U_3^{**} \equiv V_L + V_{\tau}^*$ , то две области  $V_3$ -сферы, определяемые условием (1.4), не соединяются и имеют

слегка овальную форму (рис. 13.1). При  $U_3 \rightarrow U_3^{**}$  ( $U_3 > U_3^{**}$ ) они вытягиваются и сближаются. При  $U_3 = U_3^{**}$  они соприкасаются в точке  $(0, V_1^*, 0)$  (рис. 13.4). Если

$$U_3^* < U_3 < U_3^{**}, \quad (1.8)$$

то область (1.4) на сфере является уже односвязной (рис. 13.2). Она весьма вытянута при значениях  $U_3$ ,

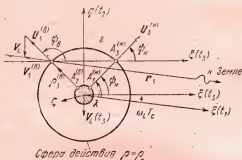


Рис. 13.3. Геометрические характеристики условий возвращения от Луны к Земле в пространстве селеноцентрических координат  $\xi\eta$  в окрестности сферы действия Луны.

приближающихся к правой границе интервала (1.8), и стягивается в точку с приближением  $U_3$  к левой его границе. При  $U_3 = U_3^*$  ТВ отсутствуют (в действительности они существуют для больших значений  $r_1$ ).

Очевидно, в случае  $U_3 > U_3^{**}$  граничные ТВ охватывают геоцентрическую сферу  $r = r_1$  со всех сторон. При уменьшении  $U_3$  от значения  $U_3^{**}$  на сфере  $r = r_1$  появляется запретная зона (со стороны, примерно противоположной направлению скорости Луны), симметричная относительно плоскости лунной орбиты. Ее уже не охватывают ТВ. С убыванием  $U_3$  до  $U_3^*$  эта зона распространяется на всю сферу  $r = r_1$ .

Так как для односвязной области (1.4)  $U_3 < U_3^{**} \approx 1,2 \text{ км/с} < V_n(r_3 + \rho_3)$ , то все точки этой области действительно соответствуют ТВ.

Восходящим ТВ соответствуют большие времена полета и больший разброс географических координат точки

приземления, чем нисходящим ТВ (при одинаковых вариациях начальных данных). Поэтому нисходящие ТВ представляют больший интерес.

### § 13.2. Номинальные траектории возвращения различных видов

1. Будем классифицировать номинальные ТВ КА от Луны к Земле по виду начальных условий (старт с поверхности Луны или с орбиты ИСЛ), по схеме возвращения (северной  $N$  или южной  $S$ ), по наклонению  $i$  плоскости ТВ к плоскости лунной орбиты и по времени полета  $T$ : при  $T < T'$  — нисходящая траектория, при  $T > T'$  — восходящая траектория, где  $T'$  — время полета по траектории, на которой максимальное удаление КА от Земли достигается в момент пересечения СД и равно расстоянию до Луны.

При анализе скоростных многообразий ( $U_3$ - и  $V_3$ -сферы на рис. 13.1, 13.2) орбита Луны считалась круговой ( $V_L = \text{const}$ ), и исследовалась эволюция ТВ в зависимости от модуля и направления вектора селеноцентрической скорости  $U_3$  КА на СД. В действительности картина многообразий скоростей на СД выглядит сложнее ввиду эллиптичности лунной орбиты. Чтобы выяснить влияние эллиптичности лунной орбиты на характеристики ТВ, было проведено изучение скоростных многообразий с помощью расчетов на ЭВМ этих траекторий методом, изложенным в § 5.4, п. 3.

Расчеты проводились при различных положениях Луны для одного базового месяца (сентябрь 1971 г.). Они подтвердили свойства симметрии [5—1960] траекторий ограниченной задачи трех тел: каждая пространственная ТВ почти симметрична относительно плоскости орбиты Луны другой ТВ во вращающихся координатах  $m_L \xi, \eta, \zeta$ . А относительно плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты Луны и проходящей через прямую Земля — Луна, траектория полета от Луны к Земле почти симметрична траектории полета от Земли к Луне (несимметрия невелика, вследствие малости эксцентриситета лунной орбиты).

Множество ТВ с вертикальным началом (осей пучков) пересекает границу СД Луны в точках, селеноцентриче-

ские координаты  $\alpha_{\text{оп}}$ ,  $\delta_{\text{оп}}$ , которых определяются рис. 5.1. Эти зависимости остаются в силе как средние и для случаев неперпендикулярного старта с поверхности Луны и старта с орбиты ИСЛ, большая полуось которой не превышает 2500 км. Отличие истинного направления оси пучка от направления оси пучка, определяемого координатами  $\alpha_{\text{оп}}$ ,  $\delta_{\text{оп}}$ , не превышает  $5^\circ$ .

Северной схеме ( $N$ ) возвращения соответствуют на рис. 5.1 положительные селеноцентрические широты  $\delta_{\text{оп}}$ , а южной ( $S$ ) — отрицательные.

Селеноцентрическая долгота  $\alpha_{\text{оп}}$  точки выхода оси пучка ТВ наиболее существенно зависит от времени полета  $T$ . На рис. 5.1 линия  $\alpha_{\text{оп}} = \text{const}$  отвечает почти постоянному времени  $T$ , т. е. координаты точек на поверхности Луны, из которых возможен вертикальный старт КА с целью выхода на ТВ к Земле, в основном зависят от схемы возвращения ( $N$ ,  $S$ ) и от времени полета  $T$  до Земли (иначе говоря, от энергии селеноцентрического движения). Эллиптичность лунной орбиты влияет только на селеноцентрическую долготу точки выхода, отклоняя ее не более чем на  $10^\circ$  от средней. Максимальная селеноцентрическая широта на поверхности Луны, откуда возможен вертикальный старт КА при возвращении к Земле, не превышает  $11^\circ$  и реализуется, когда геоселеноцентрическая энергия полета близка к минимальной  $h_m$  (см. рис. 15.2), соответствующее время полета по ТВ близко к гомановскому  $T'$ , а угол  $|i| \approx 90^\circ$  (полет к Земле из точек поверхности Луны, селеноцентрические широты которых больше  $11^\circ$ , возможен с применением или наклонного старта, или выхода на промежуточную орбиту ИСЛ).

Учет эллиптичности орбиты Луны показал, что качественное исследование скоростных многообразий на СД Луны вполне оправданно проводить в предположении, что скорость Луны круговая. Результаты «машинного» изучения скоростных многообразий (рис. 5.1, 5.2) можно использовать для уточнения приближенных расчетов.

2. Рассмотрим теперь подробнее ТВ с лунной поверхности. Их целесообразно разделить на два вида: траектории с вертикальным стартом, прицельным по координатам точки старта, и траектории с наклонным стартом, прицельным по углу места и азимуту.

Заметим, что реализация в практическом полете строго вертикального к поверхности Луны старта с возвращением к Земле на заданную географическую долготу  $\bar{\lambda}$  невозможна при заданных координатах  $\alpha_{\text{сц}} = \alpha_{\text{он}}$ ,  $\delta_{\text{сц}} = \delta_{\text{он}}$  точки старта, так как для этого, согласно рис. 5.1, требуется строго определенное время  $T$  возвращения к Земле. В свою очередь значение  $T$  зависит от момента  $t_0$  старта с поверхности Луны и от заданной долготы  $\bar{\lambda}$  точки возвращения на поверхности Земли (согласно условиям долготной привязки геоцентрической траектории § 9.1).

Теоретически строго вертикального старта можно достичь лишь подходящим выбором координат  $\alpha_{\text{сц}}$ ,  $\delta_{\text{сц}}$  точки старта и энергии селеноцентрического движения. При заданной же на поверхности Луны точке старта с координатами из диапазона, определяемого рис. 5.1, возвращение к Земле на заданную долготу  $\bar{\lambda}$  может быть обеспечено лишь надлежащим выбором азимута  $A$  запуска КА, начального угла тангажа  $\theta$  и энергии  $h'$  селеноцентрического движения.

Несколько проще обеспечить возвращение к Земле по номинальной траектории (т. е. проходящей через центр Земли), так как не требуется реализация заданной долготы. Для определения начальной точки номинальной траектории с вертикальным стартом воспользуемся опять рис. 13.1 и рассмотрим сферы выходных скоростей — селеноцентрических  $U_3$  и геоцентрических  $V_3$  при фиксированной начальной скорости  $V_L$ , для которой выходная скорость  $U_3 > U_3^{**}$ . Тогда на  $V_3$ -сфере существуют два вектора  $V_{3\text{в}}$  и  $V_{3\text{н}}$  соответственно для восходящего и нисходящего движения по траекториям попадания в центр Земли. Удаляясь от Луны, КА при восходящем движении удаляется от Земли, а при нисходящем — приближается к Земле.

Обозначим соответствующие векторы выходной селеноцентрической скорости символами  $U_{3\text{в}}$  и  $U_{3\text{н}}$ . Углы проекций этих векторов (рис. 13.3) на плоскость орбиты Луны с направлением  $\xi(t_3)$  от Луны к Земле обозначим  $\psi_{\text{в}}$  и  $\psi_{\text{н}}$  соответственно. При попадании в центр Земли векторы  $V_3$  и  $U_3$  лежат в плоскости лунной орбиты; при попадании в точку земной поверхности, расположенную

над плоскостью лунной орбиты, векторы  $V_3$  и  $U_3$  тоже возвышаются над этой плоскостью.

Угол  $\varphi$  возвышения вектора  $U_3$  над плоскостью лунной орбиты при вертикальном старте, очевидно, является селеноцентрической широтой  $\delta_{\text{сц}}$  точки старта. Селеноцентрическая долгота  $\alpha_{\text{сц}}$  точки старта превосходит угол  $\varphi$  на угол  $\varphi_L = \omega_L T_c$  (рис. 13.3),

$$\alpha_{\text{сц}} = \varphi + \omega_L T_c, \quad (2.1)$$

где  $\omega_L$  — угловая скорость орбитального движения Луны;  $T_c$  — время полета в СД Луны (от точки  $A_L$  на поверхности Луны до точки  $A_3$ ). Для рассматриваемой задачи  $T_c < 17$  час, так что  $\omega_L T_c < 9^\circ$ .

Рассмотрим нисходящую траекторию. Точка старта для этой траектории видима с Земли и будет расположена тем ближе к центру видимого диска Луны, чем больше начальная скорость.

Согласно рис. 5.4, точка старта, совпадающая с центром  $\delta_{\text{сц}} = 0$ ,  $\alpha_{\text{сц}} = 0$  видимого диска Луны, соответствует вертикальной ТВ с бесконечно малым временем полета. При этом начальная скорость  $U_L$  является бесконечно большой. С уменьшением начальной скорости до величины  $U_L^{(m)}$ , соответствующей селеноцентрической скорости на сфере действия  $U_3 = V_L$  (для попадания в центр Земли), точка старта приходит на край видимого диска Луны  $\alpha_{\text{сц}} \approx 90^\circ$ . Этот случай соответствует  $T \approx T'$ ,  $\delta_{\text{сц}} \approx \pm 11^\circ$ . При выходных селеноцентрических скоростях порядка 1 км/с получаются углы  $\alpha_{\text{сц}} \approx 55^\circ - 65^\circ$ . Это следует также из свойств обратимости движения [5—1960] по симметричным относительно плоскости орбиты Луны траекториям, если учесть, что для точки вертикального падения КА на Луну при селеноцентрической скорости входа в СД порядка 1 км/с имеем  $\alpha_{\text{сц}} = -55^\circ - -65^\circ$  (см. рис. 4.12). Заметим, что точки вертикального старта для восходящих движений примерно симметричны относительно плоскости  $\eta\xi$  точкам для нисходящих движений даже при учете эллиптичности орбиты Луны.

3. Рассмотрим далее возвращение к Земле из заданной точки лунной поверхности, причем ограничимся только нисходящими движениями. Заметим, что если заданная точка не совпадает с точкой вертикального старта,





которого наклонного старта  $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$  (где  $\theta_0$  — угол возвышения вектора начальной скорости над лунным горизонтом). Чем больше начальный угол возвышения  $\theta_0$ , тем большая начальная скорость необходима при фиксированной начальной точке. Таким образом, горизонтальный старт является энергетически наиболее выгодным.

Заметим, что при наклонном старте с приближением начальной точки к точке,  $\delta_{сд} = 0^\circ$ ,  $\alpha_{сд} = 90^\circ$  минимальная необходимая начальная скорость монотонно уменьшается до величины  $V_L$ , а наклонный старт переходит в вертикальный. На рис. 13.3 старт с поверхности Луны в точках  $\delta_{сд} = 0^\circ$ ,  $\alpha_{сд} = 90^\circ$  соответствует ТВ, лежащим в плоскости орбиты Луны.

При заданной начальной точке условие равенства предполагаемой угловой дальности  $\Phi'$  полета и геометрически необходимой  $\Phi_n$  (формула (2.2)) имеет то же теоретическое значение, что и аналогичное условие в задаче попадания в Луну из заданной точки земной поверхности (см. раздел II, § 7.1). При начальных скоростях, недостаточных для выполнения этого равенства, решения задачи не существует. Однако практическое значение этого эффекта в задаче полета с лунной поверхности к Земле гораздо меньше, чем в задаче попадания в Луну с Земли, так как при превышении начальной скорости над минимальной лишь на несколько десятков м/с указанному условию можно удовлетворить.

4. Рассмотрим возвращение КА с орбиты ИСЛ с заданными элементами  $\mathcal{L}_\lambda, i_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, \omega_\lambda, u_\lambda$ .

В данном случае можно говорить о двух вариантах решения задачи возвращения к Земле. Первый вариант — более частный и состоит в выборе такого времени ожидания на орбите ИСЛ, при котором за счет перемещения оси  $(m_L, m_G)$  и эволюции орбиты ИСЛ со временем оказывается возможным разгон КА к Земле в плоскости этой орбиты. Такой способ — наиболее экономный по затратам характеристической скорости. Для фиксированных  $\mathcal{L}_\lambda$  и  $i_\lambda$  (не близко к 0,  $\pi$ ) всегда можно получить выбором времени ожидания на орбите ИСЛ такое расположение ее восходящего узла (долготы  $\mathcal{L}_\lambda$ ) относительно линии  $m_L m_G$ , что будет возможен разгон КА к Земле (с временем перелета, лежащим в пределах от 1 до 15 суток). Если же время полета задано,

то такой подход к решению задачи возвращения на заданную географическую долготу к Земле непригоден.

Второй вариант — пространственный старт с орбиты ИСЛ, когда разгон к Земле возможен из любой точки орбиты ИСЛ. При этом в случае круговой орбиты ИСЛ затраты характеристической скорости будут близки к минимальным при старте из такой точки  $u_\lambda = u_\lambda^{(m)}$ , где минимален угол  $I$  между плоскостью отлетной гиперболы и плоскостью орбиты ИСЛ. Вычислим аргумент широты  $u_\lambda^{(m)}$ , полагая, что плоскость отлетной гиперболы проходит через ось пучка, соответствующую заданной энергии траектории возвращения.

Угол  $I$  будет минимален, когда ось пучка перпендикулярна линии пересечения плоскости орбиты ИСЛ с плоскостью отлетной гиперболы. Пусть орт  $C_\lambda^0$  кинетического момента заданной орбиты ИСЛ и орт  $\rho_{оп}^0$  оси пучка отлетных селеноцентрических гипербол определяются в системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$  компонентами

$$\begin{aligned} (C_\lambda^0)_\xi &= \sin i_\lambda \sin \varphi_\lambda, & (\rho_{оп}^0)_\xi &= \cos \delta_{оп} \cos \alpha_{оп}, \\ (C_\lambda^0)_\eta &= -\sin i_\lambda \cos \varphi_\lambda, & (\rho_{оп}^0)_\eta &= \cos \delta_{оп} \sin \alpha_{оп}, \\ (C_\lambda^0)_\zeta &= \cos i_\lambda, & (\rho_{оп}^0)_\zeta &= \sin \delta_{оп}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда орт  $\rho_m^0$ , направленный из центра Луны по линии пересечения плоскости орбиты ИСЛ с плоскостью отлетной гиперболы, определится формулой

$$\rho_m^0 = \frac{\rho_{оп}^0 \times C_\lambda^0}{|\rho_{оп}^0 \times C_\lambda^0|}.$$

Искомый аргумент широты  $u_\lambda^{(m)}$  есть угол между ортами  $\rho_m^0$  и  $\rho_{\varphi_\lambda}^0$  (направление из центра Луны в восходящий узел орбиты ИСЛ) и определяется формулой

$$\cos u_\lambda^{(m)} = \rho_m^0 \cdot \rho_{\varphi_\lambda}^0. \quad (2.4)$$

Угол  $I$  определится соотношением

$$\sin I = C_\lambda^0 \cdot \rho_{оп}^0. \quad (2.5)$$

Заметим, что селеноцентрические координаты  $\delta_{оп}$ ,  $\alpha_{оп}$ , используемые в формуле (2.4), могут быть вычислены или по формулам § 5.2, или с помощью рис. 5.1, 5.2 (полученных в результате вычисления на ЭВМ многообразий скоростей выхода из СД Луны с учетом эллиптичности лунной орбиты и поэтому позволяющих определить  $\alpha_{оп}$  точнее, чем формулы § 5.2).

2.5. Для примера интересно рассмотреть старт с орбиты ИСЛ типа «Луна-10», «Луна-11». Пусть проходящая через центр Луны номинальная селеноцентрическая траектория Земля — Луна со временем полета около 3,5 суток является осью пучка селеноцентрических траекторий, которые можно использовать для создания ИСЛ. Эта ось в точке встречи КА с Луной составляет с направлением Луна — Земля угол около  $60^\circ$ . Энергетически наивыгоднейшим (среди одноимпульсных переходов) является переход на орбиту спутника с линии апсид селеноцентрической траектории, лежащей в плоскости П орбиты ИСЛ. Ниже рассмотрим лишь переходы, близкие к наивыгоднейшим.

Пусть наклонение  $i_k$  орбиты спутника к плоскости орбиты Луны не близко к  $0^\circ$  или  $180^\circ$  (например,  $i_k \approx 90^\circ$ ). Это значит, что след на плоскости  $\xi\eta$  плоскости П<sub>k</sub> орбиты ИСЛ в момент  $t_u$  его вывода будет составлять с направлением  $\xi(t_u)$  Луна — Земля угол около  $60^\circ$  (рис. 13.4). Следовательно, долгота восходящего узла орбиты спутника для гиперболы, проходящей севернее Луны, составит около  $300^\circ$ , а для гиперболы, проходящей южнее Луны — около  $120^\circ$ . Пусть для определенности угол между асимптотами гиперболы, с которой осуществляется переход на орбиту спутника, составляет около  $90^\circ$ .

Для выхода из СД со скоростью  $U_3 = 1,2$  км/с по ТВ необходимо (рис. 13.4), чтобы асимптота этой траектории в момент выхода составляла, как ось пучка возможных траекторий выхода, угол около  $60^\circ$  с направлением Луна — Земля. Для выхода с энергетикой, близкой к минимальной, асимптота должна составлять малый угол с плоскостью орбиты ИСЛ. Это происходит лишь два раза в месяц.

Если учесть поворот направления Луна — Земля за время полета от орбиты ИСЛ до границы сферы действия

(около полусуток) и если пренебречь прецессией орбиты ИСЛ под действием возмущающих сил, то направления Луна — Земля в момент  $t_*$  перехода на орбиту ИСЛ и в момент  $t_1$  схода с этой же орбиты будут различаться примерно на  $50^\circ$ . Следовательно, минимальное время ожидания на орбите составляет около 4 суток.

При энергетических затратах, близких к минимальным, возвращаться к Земле с орбиты ИСЛ возможно лишь через интервалы времени, кратные полумесяцу. При этом для ТВ — гиперболы, проходящей севернее или южнее Луны, получим соответственно долготу восходящего узла  $\Omega' = 70^\circ$ , или  $\Omega' = 250^\circ$  (здесь угол  $\Omega'$  отсчитывается от направления Земля — Луна). Соответственно получим долготу линии апсид траектории возвращения  $\omega' \approx 45^\circ$  или  $\omega' \approx 225^\circ$ , если учесть, что ведущая к Земле ветвь гиперболы почти параллельна плоскости лунной орбиты и составляет с другой ветвью угол около  $90^\circ$  (здесь  $\omega'$  отсчитывается от плоскости орбиты Луны, рис. 13.4).

Заметим, что при возвращении с орбиты ИСЛ не требуется выходной скорости  $U_3 = 1,2$  км/с, как при возвращении из района посадки станции «Луна-9», и можно было бы уменьшить выходную селеноцентрическую скорость до геоцентрической скорости Луны ( $\sim 1$  км/с). Однако при этом, как показывают расчеты (см. гл. 17), заметно возрастает влияние разброса начальных данных. Поэтому более подходящими представляются скорости около 1,1 км/с.

## Г л а в а 14

### ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОИМПУЛЬСНОГО ПЕРЕХОДА С ОРБИТЫ СПУТНИКА НА ГИПЕРБОЛУ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ «НА БЕСКОНЕЧНОСТИ»

Поиск траекторий, реализуемых с наименьшими затратами характеристической скорости, важен для практических приложений. Ввиду сложности проблемы в литературе в первую очередь рассматриваются одноимпульсные переходы со спутниковой орбиты внутри СД (Луны или планеты) на траекторию вне СД (геоцентрическую или гелиоцентрическую). В такой упрощенной постановке задача оптимизации исследована для случая старта с круговой орбиты спутника в работах [6—1970], [2—1971] и для случая старта с эллиптической орбиты — в работе [1—1972]. Результаты последней работы излагаются в данной главе. Предполагается, что энергия и наклонение геоцентрической ТВ вне СД Луны заданы. Тем самым заданы (при использовании метода ТСД, (см. §§ 4.2, 5.4)) энергия гиперболического движения и направление асимптоты гиперболы внутри СД. Таким образом, задан по модулю и направлению вектор скорости «на бесконечности» для гиперболического движения внутри СД.

#### § 14.1. Постановка задачи оптимизации одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую

Пусть задана эллиптическая орбита  $\Gamma_0$  спутника притягивающей массы  $m_L$  кеплеровыми элементами  $p_0, e_0$  \*).

---

\*) Поскольку рассматриваемая задача имеет смысл для движения в любой СД (а не только СД Луны), то у символов  $p_{10}, e_{10}$  и других индекс «1» принадлежности СД Луны в данной главе будет опускаться.

Необходимо найти на этой орбите такую точку, чтобы импульс перехода из нее на гиперболическую орбиту  $\Gamma$  с заданным вектором скорости «на бесконечности» был минимальным.

Вектор скорости «на бесконечности»  $U_\infty$  задается его модулем  $U_\infty$  и углом  $i_a$  возвышения над плоскостью  $\Pi_0$

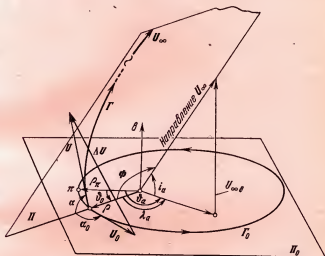


Рис. 14.1. Траекторные параметры в задаче перехода с эллиптической орбиты ИСЛ на гиперболическую с заданным вектором  $U_\infty$  скорости на бесконечности.

заданной орбиты  $\Gamma_0$  спутника. Кроме того, может быть задан угол  $\theta_a$  между проекцией вектора  $U_\infty$  на плоскость  $\Pi_0$  и перигелийским радиусом-вектором  $\rho_k$  орбиты спутника (рис. 14.1).

Исследование задачи начнем с построения ее скоростных многообразий до и после перехода в пространстве радиальной  $\bar{U}_r$ , трансверсальной  $\bar{U}_\tau$  и бинормальной  $\bar{U}_b$  компонент скорости (рис. 14.2). Бинормаль  $\bar{b}$  — неизменное направление момента количества движения спутника на эллиптической орбите  $\Gamma_0$  радиус-вектор  $\rho$  спутника в момент перехода на гиперболу  $\Gamma$  имеет модуль

$$\rho = \rho_0 / (1 + e_0 \cos \theta_0), \quad (1.1)$$

где  $p_0, e_0$  — заданные фокальный параметр и эксцентриситет орбиты  $\Gamma_0$ ,  $\vartheta_0$  — истинная аномалия в момент  $t_0$ .

Годограф  $\Sigma_0$  вектора  $U$  на исходной эллиптической орбите есть совокупность скоростей до приложения переходного импульса  $\Delta U$ , т. е. исходное скоростное многообразие. Оно целиком расположено в плоскости  $U_0 U_\infty$ .

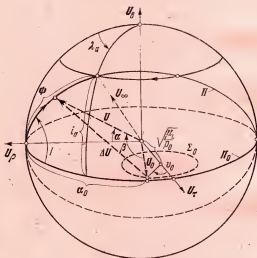


Рис. 14.2. Определение точки  $U$  основного скоростного многообразия в задаче перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую с заданным вектором  $U_\infty$  скорости «на бесконечности».

(штриховая линия на рис. 14.2) и является кругом радиуса  $e_0 \sqrt{\mu_L/p_0}$  с центром в точке  $(0, \sqrt{\mu_L/p_0})$ , так как

$$U_{0\rho} = \sqrt{\mu_L/p_0} e_0 \sin \vartheta_0, \quad U_{0\tau} = \sqrt{\mu_L/p_0} (1 + e_0 \cos \vartheta_0), \\ U_{0\vartheta} = 0. \quad (1.2)$$

С ростом  $\vartheta_0$  от 0 до  $2\pi$  при прямом движении спутника круг  $\Sigma_0$  проходит по часовой стрелке, начиная с точки  $(0, \sqrt{\mu_L/p_0}(1 + e_0))$ . Вектор  $U_0$  образует с осью  $U_\rho$  угол  $\alpha_0$  в момент перехода с эллипса на гиперболу и выражается через элементы эллиптической орбиты



соотношениями

$$\cos \alpha_0 = e_0 \sin \vartheta_0 / \bar{U}_0, \quad \sin \alpha_0 = (1 + e_0 \cos \vartheta_0) / \bar{U}_0, \quad (1.3)$$

$$\bar{U}_0 = \sqrt{1 + 2e_0 \cos \vartheta_0 + e_0^2}.$$

Направление асимптоты при росте  $\vartheta_a$  описывает прямой круговой конус с осью  $U_b$ . Угол его образующей с осью  $U_b$  равен  $90^\circ - i_a$ . Угол  $\Phi$  наклона вектора  $U_\infty$  к оси  $U_p$  (рис. 14.2) есть полная угловая дальность полета по результирующей гиперболе  $\Gamma$  (рис. 14.1). Угол  $\alpha_0$  между вектором  $U_0$  начальной гиперболической скорости и направлением начального радиуса-вектора (т. е. оси  $U_p$ ) составляет часть угла  $\Phi$  (рис. 14.1 и 14.2) и отсчитывается в ту же сторону. Угол  $\beta$  между векторами  $U_0$  и  $U$  выражается через углы  $\alpha_0$ ,  $\alpha$  и угол  $I$  (угол между плоскостью  $\Pi$  гиперболы и плоскостью эллипса  $\Pi_0$ ) по теореме косинусов (рис. 14.2):

$$\cos \beta = \cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha \cos I. \quad (1.4)$$

При фиксированном значении  $\vartheta_0$  будут фиксированы  $\rho$ ,  $U_0$ ,  $\alpha_0$  и

$$U = \sqrt{(2\mu_L/\rho) + U_\infty^2}. \quad (1.5)$$

Если задано значение  $\vartheta_a$  (рис. 14.1), то будут фиксированы также значения

$$\lambda_a = \vartheta_a - \vartheta_0, \quad \operatorname{tg} I = \operatorname{tg} i_a / \sin \lambda_a, \quad 0 < I < 180^\circ, \quad (1.6)$$

$$\cos \Phi = q \cos \lambda_a, \quad \sin \Phi \cos I = q \sin \lambda_a, \quad q = \cos i_a. \quad (1.7)$$

Соответствующий угол  $\alpha$  определится соотношением (4.4.20)

$$U^2 = - \frac{\mu_L}{\rho} \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \alpha \sin (\Phi - \alpha)}. \quad (1.8)$$

Выражения (1.1), (1.5)–(1.8) определяют многообразие  $\Sigma$  векторов скорости после переходного маневра. Из треугольника скоростей  $U_0$ ,  $U$ ,  $\Delta U$  находится модуль  $\Delta U$  переходного импульса:

$$\Delta U = \sqrt{U_0^2 + U^2 - 2U_0U \cos \beta}. \quad (1.9)$$

Таким образом, задача минимизации приращения скорости  $\Delta U$ , необходимого для перехода с эллипса  $\Gamma_0$  на



и угловым радиусом  $\pi/2 - i_a$  (рис. 14.3). Через каждую образующую этого конуса и направление  $U$ , начального радиуса  $\rho$  проходит возможная плоскость  $\Pi$  полета спутника. Будем характеризовать образующую, как и на рис. 14.2, долготой  $\lambda_a$  вектора  $U_\infty$ , считая  $0 < \lambda_a < 2\pi$ .

Без ограничения общности можно считать, что угол  $\pi/2 - i_a$  вектора  $U_\infty$  с направлением  $b$  момента количества движения острый, т. е.  $i_a > 0$ , так как при  $i_a < 0$  построение делается симметрично данному (относительно плоскости  $\Pi_0$  исходной эллиптической орбиты).

Очевидно, наименьшая дальность полета  $\Phi_I < \pi$  имеет место при  $\lambda_a = 0$  и равна  $i_a$ . Величина  $\Phi_{II} > \pi$  ( $\Phi_{II} = 2\pi - \Phi_I$ , см. рис. 4.16) является при этом наибольшей и достигает  $2\pi - i_a$ . Соответствующая этим дальностям величина  $\gamma = \gamma_m$  согласно (4.4.22) является наименьшей:

$$\sin \gamma_m = (U_\infty/U) \sin i_a/2.$$

Соответствующие наименьшей и наибольшей дальностям наклонения

$$I_I = I_{II} = \pi/2,$$

т. е. плоскость  $\Pi$  обеих гипербол ортогональна плоскости орбиты спутника.

Построения на  $U$ -сфере (рис. 14.3) выполнены для следующих числовых значений:  $U = 2$  км/с,  $U_\infty = 1$  км/с,  $i_a = \pi/3$ . На круге  $i_a = \text{const}$  рассматриваемые точки отмечены кружками, на решении I — квадратами, на решении II — треугольниками. Точки, соответствующие одному значению  $\lambda_a$ , отмечены одинаковыми цифрами. Цифра I отвечает  $\lambda_a^{(1)} = 0$ .

С возрастанием угла  $\lambda_a$  от нуля до значения  $\lambda_a^{(2)} < \pi/2$  очевидно,  $\Phi_{II}$  убывает,  $\Phi_I$  растет,  $I_I$  становится меньшим  $\pi/2$  (см. точки с цифрой 2). При  $\lambda_a^{(3)} = \pi/2$  наклонение  $I_I$  принимает минимальное значение  $I_I^{(m)} = i_a$ , наклонение  $I_{II}$  — максимальное  $I_{II}^{(M)} = \pi - i_a$ , а многообразия  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  в соответствующих точках (отмеченных цифрой 3) касаются плоскости  $\Pi$ , в то время как для соседних точек с  $\lambda_a \neq \pi/2$  плоскость  $\Pi$  пересекает многообразия  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$ .

С ростом  $\lambda_a$  от значения  $\pi/2$  наклонение  $I_I$  увеличивается, а наклонение  $I_{II}$  убывает. В частности, для  $\lambda_a^{(4)} < \pi$

они принимают такие же значения, как при  $\lambda_a^{(2)}$ . При  $\lambda_a^{(5)} = \pi$  имеем  $\Phi_I = \max_{\lambda_a} \Phi$ ,  $\Phi_{II} = \min_{\lambda_a} \Phi$ ,  $I_{I,II} = \pi/2$ . При возрастании  $\lambda_a$  от  $\pi$  до  $2\pi$  получаются точки, симметричные описанным относительно плоскости  $U_p$ ,  $U_b$ , в частности, точка 6 симметрична точке 3, соответственно  $I_I^{(6)} = \max_{\lambda_a} I = \pi - i_a$ ,  $I_{II}^{(6)} = \min_{\lambda_a} I = i_a$ .

С ростом угла  $i_a$  до  $\pi/2$  каждая из кривых  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  стягивается в точку, так как для всех  $\lambda_a$  имеем  $I_{I,II} = \pi/2$  (согласно (1.6)),  $\Phi_I = \pi/2$ ,  $\Phi_{II} = 3\pi/2$  (согласно (1.7)),  $\alpha_{I,II} = \Phi_{I,II}/2 + \gamma$ , где  $\sin \gamma = U_\infty/U\sqrt{2}$ . Эти точки на рис. 14.3 расположены внутри кривых  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  на  $U$ -сфере и отмечены крестиками.

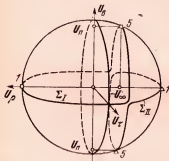


Рис. 14.4. Соединение скоростных многообразий  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$ , когда вектор  $U_\infty$  становится параллельным плоскости эллипса ( $i_a \rightarrow 0$ ).

С убыванием  $i_a$  многообразие  $\Sigma_I$  своей нижней частью приближается к плоскости  $U_b = 0$  сверху (поскольку квадратик 1 всегда остается между плоскостью  $U_b = 0$  и кругом  $i_a = \text{const}$ ), а верхней частью — к малому кругу  $U_p = -U_\infty$  на  $U$ -сфере (рис. 14.4). Многообразие  $\Sigma_{II}$

приближается при этом к тому же кругу своей нижней частью, а верхней частью — к плоскости  $U_b = 0$  снизу. Действительно, при малых  $i_a > 0$  довольно большим отклонениям наклона  $I$  от  $\pi/2$  отвечают относительно малые отклонения  $\Phi_I^{(1)}$  от  $i_a$ ,  $\Phi_I^{(5)}$  от  $(\pi - i_a)$ , так что

$$\sin \gamma^{(1)} = \frac{U_\infty}{U} \sin \frac{i_a}{2} \approx \frac{U_\infty}{U} \frac{i_a}{2},$$

$$\sin \gamma^{(5)} = \frac{U_\infty}{U} \sin \frac{\pi - i_a}{2} \approx \sin \gamma_0, \text{ где } \sin \gamma_0 = \frac{U_\infty}{U},$$

$$\alpha_I^{(1)} \approx \frac{i_a}{2} \left( 1 + \frac{U_\infty}{U} \right), \quad \alpha_I^{(5)} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{i_a}{2} + \gamma_0;$$

$$\Phi_{II}^{(1)} - \text{от } (2\pi - i_a), \quad \Phi_{II}^{(5)} - \text{от } (\pi + i_a), \quad \text{так что}$$

$$\alpha_{II}^{(1)} \approx \pi - \frac{i_a}{2} \left(1 - \frac{U_\infty}{U_0}\right), \quad \alpha_{II}^{(5)} \approx \frac{\pi}{2} + \left(\frac{i_a}{2} + \gamma_0\right), \quad \text{ибо}$$

$$\sin \gamma^{(5)} = \frac{U_\infty}{U_0} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{i_a}{2}\right) \approx \sin \gamma_0.$$

При  $i_a = 0$  у кривых  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  имеются общие точки  $(-U_\infty, U_a, 0)$  и  $(-U_\infty, -U_a, 0)$ . При малых  $i_a \neq 0$  эти точки исчезают, и в их окрестности располагаются наиболее изогнутые участки кривых  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$ , переходные от верхних частей кривых к нижним (рис. 14.4). Существование векторов  $U$ , возвышающихся над плоскостью  $U_b = 0$  при сколь угодно малых углах  $i_a \neq 0$ , обусловлено тем, что плоскость  $\Pi$  гиперболы обязана проходить через вектор  $U_\infty$ , а потому необходимо наклонена под почти прямыми углами  $I$  (рис. 14.3) к плоскости орбиты спутника Луны, когда значения  $\lambda_a$  близки к 0 или к  $\pi$ .

Совокупность многообразий  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  дает при  $i_a \rightarrow 0$  не только большой круг радиуса  $U$  в плоскости  $U_b = 0$  (соответствующий плоской задаче), но еще малый круг в ортогональной плоскости  $U_0 = -U_\infty$ , не имеющий отношения к плоской задаче. Впервые этот круг указан, по-видимому, в работе [2—1971]. Это указывает на то, что при  $i_a \rightarrow 0$  пространственная задача не полностью переходит в плоскую.

### § 14.3. Зависимость переходного импульса от положения спутника на орбите и поворота орбиты в ее плоскости

Преобразуем формулу (1.9), определяющую величину приращения характеристической скорости, с помощью соотношений (1.1)—(1.7) и интеграла живых сил

$$U_0^2 = \frac{2\mu_L}{\rho} - \frac{\mu_L}{a_0}, \quad a_0 = \frac{p_0}{1 - e_0^2}. \quad (3.1)$$

Получим сначала

$$(\Delta U)^2 = \left(\frac{2\mu_L}{\rho} - \frac{\mu_L}{a_0}\right) + \left(\frac{2\mu_L}{\rho} + U_\infty^2\right) - \frac{2U_\infty \bar{U}_0}{k} \sqrt{\frac{\mu_L}{p_0}} \cos \beta, \quad (3.2)$$

где согласно (1.2), (1.3)  $\bar{U}_0 = U_0 \sqrt{p_0/\mu_L}$ . В выражение (1.4) для  $\cos \beta$  входят  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . С помощью (4.4.22), получим

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \frac{\Phi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}} - k \sin^2 \frac{\Phi}{2}, \\ \sin \alpha &= \sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}} + k \cos \frac{\Phi}{2} \sin^2 \frac{\Phi}{2}.\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}} &= k \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1 + \cos^2 \frac{\Phi}{2}} = -k \left| \cos \frac{\Phi}{2} \right| R, \\ R &\equiv \sqrt{1 + 2 \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) \frac{1}{1 + \cos \Phi}},\end{aligned}\quad (3.3)$$

то  $\cos \alpha = \frac{k}{2} [(\cos \Phi - 1) \pm (1 + \cos \Phi) R]$ , где знак минус возникает при замене  $|\cos \Phi/2|$  на  $\cos(\Phi/2)$ , когда  $\pi < \Phi < 2\pi$ . Аналогичным образом получается:

$$\sin \alpha = \frac{k}{2} (\sin \Phi \pm R \sin \Phi).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\frac{2}{k} \cos \alpha &= -2 + (1 + \cos \Phi) (1 \pm R), \\ \frac{2}{k} \sin \alpha &= \sin \Phi (1 \pm R).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Согласно (1.4)

$$\begin{aligned}\frac{2}{k} \cos \beta &= \cos \alpha_0 [-2 + (1 + \cos \Phi) (1 \pm R)] + \\ &+ \sin \alpha_0 (1 \pm R) \sin \Phi \cos I.\end{aligned}$$

Согласно (1.7)

$$\begin{aligned}\frac{2}{k} \cos \beta &= -2 \cos \alpha_0 + (1 \pm R) [\cos \alpha_0 (1 + q \cos \lambda_a) + \\ &+ \sin \alpha_0 (q \sin \lambda_a)].\end{aligned}\quad (3.5)$$

Оптимизация поворота орбиты  $\Gamma_0$  в ее плоскости (относительно оси  $b$ ) при фиксированном положении  $\vartheta_0$  на орбите в момент маневра эквивалентна максимизации

$\cos \beta$ , как видно из (3.2), т. е. максимизации функции

$$F_1 = (1 \pm R)[\cos \alpha_0/q + \cos(\lambda_a - \alpha_0)] \quad (3.6)$$

по  $\lambda_a$ , так как согласно (3.5)

$$F_1 = \frac{1}{q} \left( \frac{2}{k} \cos \beta + 2 \cos \alpha_0 \right).$$

Задача оптимизации положения  $\vartheta_0$ , когда полностью фиксированы эллиптическая орбита и вектор  $U_\infty$ , оказывается более сложной. Для нее из (3.2) в силу (1.3), (1.4) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} \bar{U}_0 \cos \beta = e_0 \sin \vartheta_0 [-2 + (1 + \cos \Phi)(1 \pm R)] + \\ + (1 + e_0 \cos \vartheta_0)(1 \pm R) \sin \Phi \cos I. \end{aligned}$$

С помощью (1.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} \bar{U}_0 \cos \beta = -2e_0 \sin \vartheta_0 + \\ + (1 \pm R)[e_0 \sin \vartheta_0 (1 + q \cos \lambda_a) + (1 + e_0 \cos \vartheta_0) q \sin \lambda_a]. \end{aligned}$$

Здесь члены с  $qe_0$  дают в силу (1.6)  $\sin(\vartheta_0 + \lambda_a) = \sin \vartheta_a = \text{const.}$  Из (3.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_\infty} \left[ \Delta U^2 + \frac{\mu_L}{a_0} - U_\infty^2 \right] \sqrt{\frac{p_0}{\mu_L}} = \frac{4\mu_L}{p_0 U_\infty} (1 + e_0 \cos \vartheta_0) \sqrt{\frac{p_0}{\mu_L}} + \\ + 2e_0 \sin \vartheta_0 - (1 \pm R)(e_0 \sin \vartheta_0 + q \sin \lambda_a + qe_0 \sin \vartheta_a). \end{aligned}$$

Минимизация  $\Delta U$  эквивалентна минимизации функции

$$\begin{aligned} \blacksquare F_2 = 2e_0(\kappa \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0) - \\ - (1 \pm R)(e_0 \sin \vartheta_0 + q \sin \lambda_a + qe_0 \sin \vartheta_a), \end{aligned}$$

$$\lambda_a = \vartheta_a - \vartheta_0,$$

$$\kappa = \frac{2}{U_\infty} \sqrt{\frac{\mu_L}{p_0}}, \quad R = \sqrt{1 + \frac{\kappa^2 (1 + e_0 \cos \vartheta_0)}{1 + q \cos \lambda_a}}. \quad \square \quad (3.7)$$

Разделив  $F_2$  на  $e_0$  и вводя обозначения

$$G = q/e_0, \quad F = F_2/e_0,$$

получим из (3.7)

$$\begin{aligned} F = 2(\kappa \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0) + \\ + (1 \pm R)[G \sin(\vartheta_0 - \vartheta_a) - \sin \vartheta_0 - q \sin \vartheta_a]. \quad (3.8) \end{aligned}$$

#### § 14.4. Оптимизация поворота спутниковой орбиты в ее плоскости при переходе на гиперболу

Вследствие фиксированности положения спутника  $k_2 = \kappa^2(1 + e_0 \cos \vartheta_0) = \text{const} > 0$  имеем в (3.7)

$$R = \sqrt{1 + \frac{k_2}{1 + q \cos \lambda_a}} > 1,$$

поэтому первый сомножитель в (3.6) для случаев  $\Phi_I < \pi$  и  $\Phi_{II} > \pi$  имеет противоположные знаки.

Знак второго сомножителя совпадает со знаком  $\cos \alpha_0$  при  $q \leq |\cos \alpha_0|$ . Согласно (1.2)  $\cos \alpha_0 > 0$ , если  $0 < \vartheta_0 < \pi$ , и  $\cos \alpha_0 < 0$ , если  $\pi < \vartheta_0 < 2\pi$ . При этом  $\max_{\vartheta_0} |\cos \alpha_0| = e_0$  достигается при  $\pm \vartheta_0 = \pi/2 + \arcsin e_0$ .

Если  $|\cos \alpha_0| \geq q$ , то при всех значениях  $\lambda_a$  значения  $F_1$  на одном многообразии положительны и превосходят значения  $F_1$  на другом многообразии (которые отрицательны). В этом случае углы  $i_a$  вектора  $U_\infty$  с плоскостью орбиты спутника достаточно близки к  $\pi/2$ , эксцентриситеты относительно велики и значения  $\vartheta_0$  не слишком близки к 0 или  $\pi$ .

При  $q \leq |\cos \alpha_0|$ , т. е. при  $(-i_a + \pi/2) \leq |\alpha_0 - \pi/2|$ , экстремум  $R_1$  реализуется для  $\vartheta_0 < \pi$  на многообразии  $\Sigma_I$ , а для  $\vartheta_0 > \pi$  — на многообразии  $\Sigma_{II}$ .

Рассмотрим подробнее сначала подслучай оптимальности  $\Sigma_I$  ( $0 < \vartheta_0 < \pi$ , т. е.  $\alpha_0 < \pi/2$ ).

В (3.6) второму множителю

$$f_2 = \cos \alpha_0 / q + \cos (\lambda_a - \alpha_0)$$

соответствует косинусоида с фазой  $\alpha_0$ , смещенная по оси ординат на величину  $f_0 = \cos \alpha_0 / q$  (рис. 14.5 а). График первого сомножителя

$$f_1 = (1 \pm R)$$

тоже подобен косинусоиду. Для многообразия  $\Sigma_I$  функция  $f_1^I = (1 + R) > 2$ , причем имеет максимум (при  $\lambda_a = \pi$ ), более слабо выраженный, чем на косинусоиде. Из рис. 14,5, а видно, что функция  $F_1^I = f_1^I f_2^I$  имеет один максимум и один минимум, являясь  $2\pi$ -периодической. Максимум  $F_1^I$  достигается на  $\Sigma_I$  при некотором значении



$\lambda_a = \lambda_M^I (\pi > \lambda_M^I > \alpha_0)$  (а минимум — при значениях  $\lambda_m^I > \alpha_0 + \pi$ ). Это следует из того, что  $f_1^I$  достигает максимума при  $\lambda_a = \alpha_0$ , а  $f_2^I$  при этом еще растет. В подслучае оптимальности  $\Sigma_{II}$  ( $\pi < \theta_0 < 2\pi$ , т. е.  $\alpha_0 > \pi/2$ ) при том же значении  $\cos \theta_0$  получаем график функции  $f_1^{II}$  из графика функции  $f_1^I$  зеркальным отражением в прямой

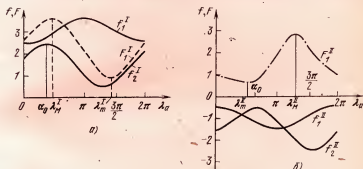


Рис. 14.5. Зависимость функций  $f_1^I, f_2^I, F_1^I$  при  $\alpha_0 < 90^\circ$  (а) и функций  $f_1^{II}, f_2^{II}, F_1^{II}$  при  $\alpha_0 > 90^\circ$  (б) от угла  $\lambda_a$  проекции асимптоты с начальным радиусом.

$f = 1$ . Функция  $f_2^{II} < 0$  (так как  $\cos \alpha_0 < 0$ ), и график ее сдвинут больше вправо (рис. 14.5, б), чем график  $f_2^I$ , так как  $\alpha_0^{II} > \alpha_0^I$ . Максимум  $F_1^{II}$  достигается на  $\Sigma_{II}$  при  $\lambda_a = \lambda_M^{II}$  ( $\pi < \lambda_M^{II} < \pi + \alpha_0$ ).

В случае  $|\cos \alpha_0| < q$  второй сомножитель в  $F_1$  обращается в нуль по крайней мере два раза, так как его график по-прежнему есть косинусоида с единичной амплитудой и начальной фазой  $\alpha_0$ , смещенная по оси ординат на величину  $\cos \alpha_0/q$ . На рис. 14.6 представлен случай  $f_0 = 0$ , т. е.  $\alpha_0 = \pi/2$  (чтобы не рассматривать подслучаев), так что кривая  $f_2$  есть точная синусоида. Кривые  $f_1^I$  и  $f_1^{II}$  остаются примерно теми же. По ним получают кривые  $F_1^I$  и  $F_1^{II}$ , похожие на соответствующие кривые  $F_1^I$  и  $F_1^{II}$  на рис. 14.5, а и б. При монотонном убывании  $f_0$  от нуля  $\max_{\lambda_a} F_1^I$  убывает, а  $\max_{\lambda_a} F_1^{II}$  растет; при

некотором значении  $f_0 = f_*$ ,  $-1 < f_* < 0$  они равны. При  $f_0 < f_*$  экстремум  $F_1$  реализуется на  $\Sigma_{II}$ , при обратном неравенстве — на  $\Sigma_I$  (так как  $\max_{\lambda_a} F_1^I > \max_{\lambda_a} F_1^{II}$  согласно рис. 14.6). При непрерывном изменении  $\theta_0$  переход с  $\Sigma_I$  на  $\Sigma_{II}$  происходит скачком, хотя затраты импульса по

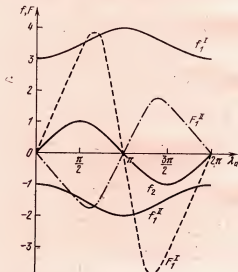


Рис. 14.6. Зависимость функций  $f_1^I$ ,  $F_1^I$  и  $f_1^{II}$ ,  $F_1^{II}$  от угла  $\lambda_a$  для случая  $\alpha_0 = 90^\circ$  ( $f_2^I = f_2^{II} = f_2$ ).

$\theta_0$  непрерывны. Заметим, что для круговой орбиты спутника экстремум  $F_1$  не может реализоваться на многообразии  $\Sigma_{II}$ , так как  $\cos \alpha_0 = 0$  ( $\alpha_0 = \pi/2$ ) и  $\max F_1$  на  $\Sigma_I$  превосходит  $\max F_1$  на  $\Sigma_{II}$ .

## § 14.5. Оптимизация положения спутника на орбите

В выражении (3.8) коэффициент  $\kappa$  есть удвоенное отношение круговой скорости (на расстоянии  $r_0$  от центра  $m_L$ ) к скорости  $U_\infty$ , так что первое слагаемое не зависит от эксцентриситета  $e_0$  орбиты спутника. График

его представляет собой синусоиду

$$2(\kappa \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0) = A_\kappa \sin(\vartheta_0 - \vartheta_\kappa), \quad A_\kappa = 2\sqrt{\kappa^2 + 1} > 2, \quad (5.1)$$

$$\sin \vartheta_\kappa = -\kappa/\sqrt{\kappa^2 + 1}, \quad \cos \vartheta_\kappa = (\kappa^2 + 1)^{-1/2}.$$

Величина  $\kappa$  не мала, например, при  $U_\infty = 1$  км/с,

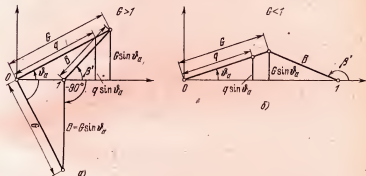


Рис. 14.7. Связь углов  $\beta'$  и  $\vartheta_a$  в основных случаях  $b > 1$  (а) и  $b < 1$  (б).

$p_0 = 1800$  км имеем  $\kappa > 3$ . Поэтому фазовый сдвиг  $-90^\circ < \vartheta_\kappa < 0^\circ$  не мал.

Во втором слагаемом в (3.8) знак первого множителя всегда совпадает с  $\text{sign } R$ , поскольку  $R > 1$  (3.7). Второй сомножитель никогда не является знакоопределенным. Действительно, в нем (рис. 14.7, а, б)

$$\begin{aligned} G \sin(\vartheta_0 - \vartheta_a) - \sin \vartheta_0 &= B \sin(\vartheta_0 - \beta'), \\ B &= \sqrt{G^2 - 2G \cos \vartheta_a + 1}, \\ \sin \beta' &= \frac{G}{B} \sin \vartheta_a, \quad \cos \beta' = (G \cos \vartheta_a - 1)/B, \end{aligned} \quad (5.2)$$

так что

$$F = A_\kappa \sin(\vartheta_0 - \vartheta_\kappa) + (1 \pm R)[B \sin(\vartheta_0 - \beta') - q \sin \vartheta_a]. \quad (5.3)$$

Из (5.2)  $B \geq |G \sin \vartheta_a|$ , поэтому подавно  $B > |q \sin \vartheta_a|$  при всех  $\vartheta_a$ , и квадратная скобка в (3.8) дважды обращается в нуль при  $0 < \vartheta < 2\pi$  и  $B \neq 0$  (что соответствует

общему случаю). Согласно (5.2) случай  $B=0$  может иметь место лишь при  $G=1$ ,  $\vartheta_a=0$ . При этом квадратная скобка тождественно равна нулю, и энергетические затраты не зависят от того, какому из многообразий ( $\Sigma_I$  или  $\Sigma_{II}$ ) принадлежит вектор начальной скорости  $U$ . Они

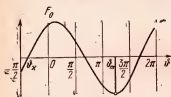


Рис. 14.8. Зависимость характеристики  $F_0$  энергетических затрат от положения  $\vartheta_0$  точки перехода на эллиптической орбите ИСЛ при  $e_0 = \cos i_a$ .

определяются функцией  $F_0 = -A_* \sin(\vartheta_0 - \vartheta_*)$  и минимальны при  $\vartheta_0 = \vartheta_m \equiv \vartheta_* + \frac{3}{2}\pi$ .

Этот угол принадлежит третьей четверти (рис. 14.8), т. е. оптимальный переход на гиперболу происходит более чем на полпериода позже прохождения спутником перигелической точки.

Угловая дальность  $\Phi$  полета по гиперболе принадлежит второй четверти (так как  $\vartheta_a=0$ ). Условие  $G=1$  означает  $\cos i_a = e_0$ , т. е. относительно малые наклонения  $i_a$  асимптоты при больших эксцентриситетах  $e_0$  эллипса (и, наоборот, большие значения  $i_a$  при малых  $e_0$ ).

Рассмотренный случай является критическим в том смысле, что разделяет случаи, когда оптимально многообразие  $\Sigma_I$ , от случаев оптимальности многообразия  $\Sigma_{II}$ . Действительно, при  $\vartheta_a=0$  и малых  $G-1 \neq 0$  имеем из (5.2)  $\beta' = 0$ , и из (3.8)

$$F = A_* \sin(\vartheta - \vartheta_*) + (1 \pm R)(G - 1) \sin \vartheta_0,$$

откуда видно, что минимальное значение  $F$  достигается в малой окрестности точки  $\vartheta_0 = \vartheta_m$  и отрицательно. Поскольку  $\sin \vartheta_m < 0$ , а  $R > 1$ , то при  $G > 1$  и малых  $(\vartheta_0 - \vartheta_m)$  будет

$$(R + 1) \sin \vartheta_0 < (1 - R) \sin \vartheta_0,$$

и минимум на многообразии  $\Sigma_I$  будет глубже, чем на  $\Sigma_{II}$ . При  $G < 1$ , наоборот, оптимальным будет решение из  $\Sigma_{II}$ .

При  $G=1$  и малых  $\vartheta_a \neq 0$  имеем из (3.8) с точностью до малых второго порядка

$$F = A_* \sin(\vartheta_0 - \vartheta_*) + (1 \pm R)[(\cos \vartheta_a - 1) \sin \vartheta_0 - (q + \cos \vartheta_0) \vartheta_a].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках представляет собой малую второго порядка и не влияет на знак суммы, который положителен при  $q < |\cos \vartheta_m|$ ,  $\vartheta_a > 0$ , а также при  $q > |\cos \vartheta_m|$ ,  $\vartheta_a < 0$ , и отрицателен при  $q < |\cos \vartheta_m|$ ,  $\vartheta_a < 0$  и при  $q > |\cos \vartheta_m|$ ,  $\vartheta_a > 0$ . В случае его положительности минимум глубже на многообразии  $\Sigma_{II}$ , а при отрицательности — на многообразии  $\Sigma_I$ .

В общем случае заметим, что знак производной  $\frac{dR}{d\vartheta_0}$  совпадает со знаком выражения  $Q$ , содержащегося в квадратных скобках (3.8) (как можно убедиться непосредственной проверкой).

Следовательно, экстремумы  $R$  находятся в нулях  $Q$ , а экстремумы произведения  $Q(1 \pm R)$  находятся между этими нулями на интервале  $0 < \vartheta_0 < 2\pi$ .

Все рассматриваемые функции являются  $2\pi$ -периодическими. Это позволяет в зависимости от  $\vartheta_a$  выяснить характер расположения экстремумов, как показывает следующий пример.

Пусть  $\vartheta_a$  принадлежит первой четверти (рис. 14.7), тогда  $\beta'$  принадлежит, согласно (5.1), первой четверти, если  $G \cos \vartheta_a > 1$ , и второй четверти, если  $G \cos \vartheta_a < 1$ . Примем  $\beta' = \pi/2$  и будем оба случая рассматривать вместе. Поскольку  $1 > q \sin \vartheta_a > 0$ , то оба нуля  $\vartheta_0 = \vartheta_1$  и  $\vartheta_0 = \vartheta_2$  функции  $Q$  (рис. 14.9, а) находятся внутри интервала  $(\beta', \beta' + \pi)$  и оказываются тем ближе друг к другу, чем больше  $q$ . В точках  $\vartheta_0 = \vartheta_1$ ,  $\vartheta_0 = \vartheta_2$  будут достигаться экстремумы функции  $R$ , которая непрерывна на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Поэтому она имеет один максимум и один минимум. Поскольку  $\frac{dR}{d\vartheta_0} < 0$  при  $\vartheta_0 = 0$ , то функция  $(1 + R)$  (рис. 14.9, а) при  $\vartheta_0 = 0$  убывает, достигая минимума при  $\vartheta_0 = \vartheta_1$ , затем возрастает до максимума при  $\vartheta_0 = \vartheta_2$ , а при  $\vartheta_2 < \vartheta_0 < 2\pi$  снова убывает до ее значения при  $\vartheta_0 = 0$ . Следовательно, произведение  $Q(1 + R)$  на рис. 14.9, а между нулями  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  имеет максимум, а вне интервала  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — минимум.

Аналогично произведение  $Q(1 - R)$  на отрезке  $[\vartheta_1, \vartheta_2]$  имеет минимум (рис. 14.9, б). Функция  $F_0 = A_* \sin(\vartheta_0 - \vartheta_a)$  (рис. 14.9, б) имеет всегда минимум в третьей четверти. К этому минимуму ближе максимум функции  $Q(1 + R)$  и минимум функции  $Q(1 - R)$ . Какая из функ-

ций  $F_+ = F_0 + Q(1+R)$  или  $F_- = F_0 + Q(1-R)$  имеет глубже минимум — зависит от конкретных значений параметров  $q$ ,  $e_0$ ,  $\kappa$ . Аналогичная минимизация, как показывает подобное приведенному рассмотрению, имеет место, когда значение  $\vartheta_a$  принадлежит II, III или IV четверти.

Так, при значениях  $\vartheta_a$  в четвертой четверти значения  $\beta'$  принадлежат также четвертой четверти при  $G \cos \vartheta_a >$

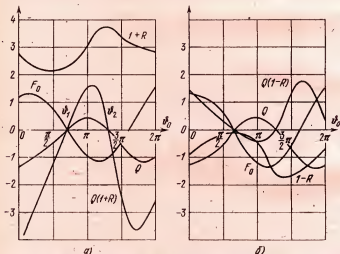


Рис. 14.9. Зависимость характеристик энергетических затрат  $Q(1+R)$  (а) и  $Q(1-R)$  (б) вдоль многообразий  $\Sigma_I$  и  $\Sigma_{II}$  соответственно от положения  $\vartheta_a$  точки перехода на эллиптической траектории.

$> 1$  и третьей четверти — при  $G \cos \vartheta_a < 1$ . При значениях  $\vartheta_a$  во второй и третьей четвертях значения  $\beta'$  принадлежат, соответственно, только второй и третьей четвертям.

При  $G < 1$  не может быть  $G \cos \vartheta_a \geq 1$  (рис. 14.8, б), так что для  $0 < \vartheta_a < \pi$  будет  $\pi/2 < \beta' < \pi$ ; для  $\pi < \vartheta_a < 2\pi$  будет  $\pi < \beta' < 3\pi/2$ .

Построение входящих в  $F$  функций выполняется аналогично рассмотренному.

В случае  $\vartheta_a = 0$  кривая  $R(\vartheta_0)$  выпукла кверху при  $e_0 < q$  и книзу при  $e_0 = q$ ; при  $e_0 = q$  она — прямая. При  $\vartheta_a = \pi$  кривая  $R(\vartheta_0)$  в обоих случаях выпукла книзу.

Построение функции  $F$  выполняется так же, как было показано выше.

Заметим, что аналитические выражения для направления скорости после маневра и величины переходного импульса были получены без предположений о малости эксцентриситета орбиты ИСЛ и угла между плоскостями орбиты ИСЛ и отлетной гиперболы.

Проведенное исследование оптимального одноимпульсного старта показывает, что из шести параметров задачи  $(\mu_L, p_0, e_0, U_\infty, i_a, \vartheta_a)$  существенны только четыре:  $e_0, i_a, \vartheta_a, \kappa = 2 \sqrt{\mu_L/p_0}/U_\infty$ .

Рассмотренным способом можно найти оптимальную одноимпульсную траекторию возвращения КА с конкретной проектируемой или заданной орбиты ИСЛ к Земле. Решение этой задачи вследствие обратимости движения дает также и оптимизацию перехода с гиперболической орбиты на орбиту спутника Луны.

## Глава 15

### АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА, ОБЩИЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ВОЗВРАЩЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТИ ЛУНЫ И С ОРБИТЫ ИСЛ

Вычисление траекторий КА, удовлетворяющих в конце заданным условиям, как уже отмечалось в гл. 2, связано с решением краевой задачи. Независимо от принятой модели движения (приближенная или точная), краевая задача имеет место и при вычислении ТВ от Луны к Земле. В отличие от рассмотренного в гл. 9 разгона КА с орбиты ИСЗ к Луне, в задачах возвращения с орбит ИСЛ к Земле производится пространственный маневр, что существенно усложняет решение краевой задачи и выбор оптимальных (в смысле необходимой характеристической скорости) ТВ.

Разработка алгоритмов определения начальных данных, обеспечивающих быструю сходимость краевых задач, важна как для проектного исследования траекторий, так и для экономного решения навигационных задач на борту КА.

#### § 15.1. Характеристика заданных в конце движения условий и постановка краевой задачи

Расчет траектории возвращения КА будем считать оконченным, если с необходимой точностью выполнены заданные условия у Земли. Эти условия несколько различаются для траекторий пологого и крутого входа в земную атмосферу. Вход считается пологим, если угол  $\theta_{\text{вх}}$  геоцентрической скорости с местным горизонтом на границе земной атмосферы принадлежит диапазону  $(-3^\circ, -1^\circ)$ , и крутым — если  $\theta_{\text{вх}} < -3^\circ$ . В случае пологого входа задаются высота  $H_{\text{п}} = \bar{H}_{\text{п}}$  точки л услов-



ного перигея (вычисленной при условии отсутствия атмосферы), наклонение  $i_\pi = \bar{i}_\pi$  геоцентрической орбиты к экватору в точке  $\pi$  и географическая долгота  $\lambda_\pi = \bar{\lambda}_\pi$  точки  $\pi$ . В случае крутого входа вместо условия  $H_\pi = \bar{H}_\pi$  задается географическая широта  $\varphi_\pi = \bar{\varphi}_\pi$  точки  $\pi$ . (Чертой отмечены заданные значения параметров  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ ,  $\varphi_\pi$ .)

Искомые параметры (например, начальные данные) относятся к заданному моменту старта с орбиты ИСЛ или с поверхности Луны.

При импульсном переходе на ТВ с поверхности Луны искомыми параметрами являются для случая вертикального старта селеноцентрические долгота  $\alpha_0$  и широта  $\delta_0$  точки старта и еще энергия  $h'_0$  селеноцентрической гиперболы (или соответствующая ей скорость  $U_\infty$ ). Для случая наклонного старта искомыми являются  $A_0$ ,  $\theta_0$  — азимут и угол возвышения вектора  $U_0$  начальной скорости над местным горизонтом и еще  $h'_0$  (или  $U_\infty$ ).

При импульсном переходе на ТВ с заданной орбиты ИСЛ в заданный момент  $t_0$ , т. е. при заданном аргументе широты  $u_0$  точки включения двигателя, искомыми параметрами будут те же  $A_0$ ,  $\theta_0$ ,  $h'_0$ .

В случае ограниченной тяги в двух последних переходах искомыми параметрами будут значения постоянных углов тангажа  $\phi_0$  и рыскания  $\psi_0$  (во время работы двигателя) и  $h'_0$  (или  $U_\infty$ ) на момент выключения двигателя. Если же при старте с орбиты момент  $t_0$  не задан, то и аргумент  $u_0$  не задан; тогда момент  $t_0$  включения двигателя выбирается из условий минимума затрат характеристической скорости (или минимума угла между орбитой ИСЛ и плоскостью отлетной гиперболы).

Каждая тройка искоемых параметров может быть заменена тремя компонентами характеристической скорости маневра. Требуется найти приближенные значения искоемых параметров, от которых будет устойчиво сходиться точная краевая задача к траектории возвращения, удовлетворяющей трем условиям, заданным в точке  $\pi$  условного перигея.

Движение в сфере действия Луны будем рассматривать в невращающейся селеноцентрической системе ко-

ординат  $m_L \xi \eta \zeta$ , а вне этой сферы — в геоцентрической системе координат  $m_0xyz$  с параллельными осями.

Пусть орбита ИСЛ целиком расположена в СД Луны и задана кеплеровыми элементами  $q_0 = \{\Omega_\lambda, i_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, \omega_\lambda, \tau_\lambda\}$  в селеноцентрической системе координат  $m_L \xi \eta \zeta$ .

Обозначим через  $\rho_0, U_0$  и  $\rho_1, U_1$  селеноцентрические радиусы-векторы и скорости соответственно в моменты  $t_0$  начала и  $t_1$  конца активного участка. В момент  $t_3$  пересечения СД кинематические параметры  $r_3, V_3$  геоцентрического движения будут получаться из селеноцентрических данных  $\rho_3, U_3$  по формулам

$$r_3 = \rho_3 + r_L(t_3), \quad V_3 = U_3 + V_L(t_3), \quad (1.1)$$

где  $r_L(t_3), V_L(t_3)$  — известные (например, из Астрономического ежегодника) геоцентрические радиус-вектор и скорость Луны.

Так как радиус  $\rho_3 = \rho_*$  невелик по сравнению с геоцентрическим радиусом  $r_L$  Луны, то вектор выходной селеноцентрической скорости  $U_3$  в основном определяет через  $V_3$  параметры геоцентрического движения, и, в частности, элементы  $H_\pi, i_\pi, \lambda_\pi$ . Вектор  $U_3$  зависит от параметров движения в конце активного участка, т. е. от компонент вектора  $\Delta U_\lambda$  приращения селеноцентрической скорости после маневра. Таким образом, задача разбивается на две: внешнюю задачу выбора вектора  $V_3$ , обеспечивающего выполнение трех заданных условий в перигее, и внутреннюю задачу выбора вектора  $\Delta U_\lambda$ , обеспечивающего скорость  $U_3$ , задаваемую согласно (1.1) решением внешней задачи.

Внешнюю задачу можно решать, пренебрегая изменениями векторов  $r_3, r_L, V_L$ , происходящими при изменении вектора  $V_3$  вследствие изменения решения внутренней задачи. Действительно, изменение вектора  $r_3$  будет мало по сравнению с  $r_L$  вследствие малости СД. Изменения векторов  $r_L$  и  $V_L$  по модулю будут малы по сравнению, соответственно, с модулями векторов  $r_3$  и  $V_3$  вследствие малости изменений времени  $T_c = t_3 - t_0$  полета в СД по сравнению с  $t_{3,\pi} = t_\pi - t_3$ , ибо  $T_c \ll t_{3,\pi}$ . В этих условиях изменения скоростей выхода  $U_3$  и  $V_3$  будут практически одинаковыми.

При фиксированном векторе  $r_3$  вектор  $V_3$  можно найти по заданным величинам  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ . Действительно, если бы вместо  $\lambda_\pi$  была задана энергия  $h$  геоцентрического движения, то при отсутствии возмущений вектор  $V_3$  находился бы без итераций (§ 15.3), так как  $i_\pi$  определяет плоскость движения,  $h$  — величину скорости  $V_3$ , а  $H_\pi$  — направление этой скорости в выбранной плоскости (в силу геоцентрических интегралов энергии и площадей для точек 3 и  $\pi$ ). Величина  $\lambda_\pi$  в основном определяется

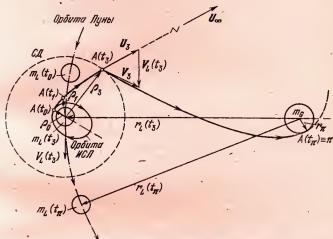


Рис. 15.1. Геометрические параметры селеноцентрического и геоцентрического участков траектории возвращения КА от Луны и Земли.

полным временем полета  $T = t_\pi - t_0$  (вследствие суточного вращения Земли), а время  $T$  в основном зависит от энергии  $h$  (рис. 15.2). Найдя  $V_3$ , определим из (1.1) компоненты вектора  $U_3 = V_3 - V_L(t_3)$ , являющиеся исходными для решения внутренней задачи (рис. 15.1).

Во внутренней задаче допустимо приближенно считать одинаковыми изменения направления векторов  $U_3$  и  $U_\infty$  при изменении начальных данных селеноцентрического пассивного участка  $\rho_1$ ,  $U_1$ , ибо  $\rho_1 \ll \rho_3$ . Внутреннюю задачу можно решать не только в точной (§ 16.2), но и в импульсной постановке (§ 16.1).

Внутреннюю и внешнюю задачи можно стыковать по вектору  $U_\infty$ , выбирая методические и счетные невязки

путем итераций. Действительно, вычислив начальное приближение для вектора  $U_\infty$  (§ 16.1), путем решения внутренней задачи найдем соответствующие начальные данные пассивного участка и вектор  $\Delta U$ . Находя с нуж-

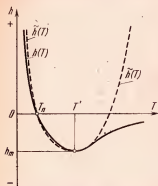


Рис. 15.2. Зависимость энергии  $h$  геоцентрической траектории возвращения от времени полета  $T$  между Землей и Луной.

ной точностью для этих данных траекторию до условного перигея (в предположении отсутствия атмосферы), определим параметры  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$  (§ 15.4). Если они будут отличаться от заданных  $\bar{H}_\pi$ ,  $\bar{i}_\pi$ ,  $\bar{\lambda}_\pi$ , то найдем поправки к скорости  $V_3$  и к скорости  $U_3$ , которые пересчитаем в поправки к скорости  $U_3$  (§ 16.3). Теперь можем повторить итерацию сначала. Когда эти итерации сойдутся, то получим вектор  $\Delta U$  характеристической скорости маневра и энергетические затраты в виде модуля  $\Delta U$ .

## § 15.2. Связь геоцентрической энергии со временем полета

Время перелета между Землей и Луной можно определить численно методом долготной привязки (§ 9.1) с точностью  $\pm 5$  мин. Для этого достаточно задать  $t_0$ ,  $\bar{H}_\pi$ ,  $\bar{i}_\pi$ ,  $\bar{\lambda}_\pi$  и целое число  $n$  звездных суток полета. При этом точность определения энергии геоцентрической орбиты довольно высока (порядка  $10^{-3} \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$ ). Однако метод дол-

готной привязки связан с итерациями, и его использование не всегда оправдано. Здесь оказалось приемлемым, исходя из более упрощенной модели, представить энергию зависимостью  $h = h(T)$  (рис. 15.2), рассчитанной для фиксированного значения  $H_\pi$  и круговой орбиты Луны с радиусом  $a_L = 384\,000$  км. В рассматриваемом приближении правая ветвь сплошной кривой на рис. 15.2 соответствует движению КА сначала к апогею и лишь затем — к перигею.

Левая ветвь, отвечающая движению сразу к перигею, будет рассматриваться в основном в области  $h < 0$ . В этой области зависимость  $h(T)$  аппроксимируем степенной зависимостью

$$h(T) = h_m + K_N |T - T'|^N, \quad T_m = \frac{\pi a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu_G}}, \quad a_m = \frac{r_L + r_\pi}{2},$$

где  $T'$  — значение  $T$ , соответствующее минимуму  $h_m = -\mu_G/a_m$  функции  $h(T)$ . При  $h = h_m$  апогейный радиус геоцентрической ТВ равен расстоянию от Земли до Луны. Значение  $T'$  максимально для ТВ, отвечающих левой ветви сплошной кривой на рис. 15.2. Коэффициент  $K_N$  подберем из условия  $h = 0$  при  $T = T_\pi$ , где

$$T_\pi = (2r_\pi + r_L) \sqrt{2(r_L - r_\pi)/\mu_G}/3 \quad (2.1)$$

— время полета между радиусами-векторами  $r_\pi$  и  $r_L$  по параболе. Получим  $K_N = -h_m/|T_\pi - T'|^N$ , так что

$$h = h_m \left[ 1 - \left| \frac{T - T'}{T_\pi - T'} \right|^N \right]. \quad (2.2)$$

Показатель  $N$  подберем из условия минимума погрешности аппроксимации, например, в середине участка  $(T_\pi, T')$ . Из целых значений  $N$  наиболее подходящим оказалось  $N=4$  (пунктир на рис. 15.2). При этом погрешность аппроксимации составляет около 1%.

Следует заметить, что при возвращении по траекториям с  $T \neq T'$  будет  $r_3 \neq r_L(t_3)$ . Поэтому для увеличения точности расчетов модуль радиуса-вектора  $r_3$  можно уточнить, используя информацию о направлении оси пучка траекторий в СД Луны (рис. 5.1). Тогда

$$r_3^2 = r_L^2 + \rho_3^2 - 2r_L\rho_3 \cos \delta_{оп} \cos \alpha_{оп}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}$  — долгота и широта направления оси пучка траектории с теми же временем перелета  $T$  и углом наклона  $i$  плоскости геоцентрической орбиты КА. Тогда формула (2.1) переписывается в виде

$$T_\pi = (2r_\pi + r_3) \sqrt{2(r_3 - r_\pi)/\mu_G}/3 \quad (2.4)$$

Использование формул (2.3), (2.4) позволяет приблизить точность формулы (2.2) к точности метода долготной привязки траекторий, если еще учесть влияние возмущений



$s'_V = +1$ , а при прохождении через южное полушарие  $s'_V = -1$ . Смысл задания  $s'_V$  могут пояснить следующие соображения. Поскольку  $V_{\text{тм}} = V_r \cos A_D$ , где  $A_D$  есть угол вектора  $V_r$  с меридианом (рис. 15.3), то  $s'_V = \pm \cos A_D$ . Из теоремы косинусов для углов сферического треугольника  $\triangleq ND$ , где сторона  $N\Omega = 90^\circ$ , имеем  $\cos A_D = \sin i \cos(\lambda - \Omega)$ . Величина  $(\lambda - \Omega)$  в свою очередь находится из сферического треугольника  $\triangleq DE$  (рис. 15.3), где угол  $E = 90^\circ$ , по  $\sin(\lambda - \Omega) = \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} i$  в I, II четвертях, если  $\sin(\lambda - \Omega) > 0$ , и в III—IV четвертях, если  $\sin(\lambda - \Omega) < 0$ . Таким образом, выбор  $s'_V$  эквивалентен выбору четверти, которой принадлежит угол  $(\lambda - \Omega)$ .

Проектируя  $V$  на координатные оси  $x, y, z$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_r \cos \lambda \cos \varphi - V_{\text{тп}} \sin \lambda - V_{\text{тм}} \sin \varphi \cos \lambda, \\ \dot{y} &= V_r \sin \lambda \cos \varphi + V_{\text{тп}} \cos \lambda - V_{\text{тм}} \sin \varphi \sin \lambda, \\ \dot{z} &= V_r \sin \varphi + V_{\text{тм}} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

#### § 15.4. Начальное приближение для скорости «на бесконечности»

Скорость  $U_\infty$  «на бесконечности», соответствующая заданным величинам  $\bar{H}_\pi, \bar{i}_\pi, \bar{\lambda}_\pi$ , зависит еще от выбора момента  $t_0$  начала маневра и числа  $n$  целых звездных суток, содержащихся во времени полета. Величины  $t_0, n$  здесь тоже будем считать заданными.

Найдем приближенно полное время полета от Луны, пренебрегая ее притяжением. Считая радиус  $\rho_*$  СД малым по сравнению с  $r_L$ , принимаем известный вектор  $r_L(t_0)$  за начало ТВ. Его компоненты  $x_L, y_L, z_L$  и момент  $t_0$  определяют его географические координаты  $\varphi_L, \lambda_L$ . Углы

$$\lambda_D = \lambda_L + \pi, \quad \varphi_D = -\varphi_L \quad (4.1)$$

определяют направление  $D$ , противоположное  $r_L$ . Найдем через угловую дальность полета  $\Phi = \Phi(r_0, r_\pi)$  (рис. 15.3) угол

$$\Phi(r_\pi, D) = 180^\circ - \Phi. \quad (4.2)$$

При этом угол  $\Phi$  находится в I—II четвертях:

$$\begin{aligned} r_{\pi} &= r_G + \bar{H}_{\pi}, \quad \cos \Phi = [(r_L/p)^{-1} - 1]/e, \\ e &= 1 - r_{\pi}/a, \quad p = r_{\pi}(1 + e), \quad a = \mu_G/h_0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $h_0$  — определяется по формуле (2.2) параметрами  $r_{\pi}$ ,  $r_L(t_0)$  и  $T = (n + 0,5)$  сут. Далее из рис. 15.3 находим по формулам сферической тригонометрии

$$\blacksquare \quad \sin \Phi(D, \odot) = -\sin \varphi_D / \sin i_{\pi},$$

$$\Phi(D, \odot) - \text{ в I, -I четвертях,}$$

$$\Phi(r_{\pi}, \odot) = \Phi(r_{\pi}, D) + \Phi(D, \odot),$$

$$\sin \varphi_{\pi} = -\sin \Phi(r_{\pi}, \odot) \sin i_{\pi},$$

$$\sin A_D = \cos i_{\pi} / \cos \varphi_D,$$

$$\sin \lambda_{\pi,D} = \sin \Phi(r_{\pi}, D) \sin A_0 / \cos \varphi_{\pi},$$

$$\lambda_{\pi,D} - \text{ в I, -I четвертях.} \quad \square \quad (4.4)$$

Величина  $\lambda_{\pi} = \lambda_D - \lambda_{\pi,D}$ , приведенная к интервалу  $(0, 2\pi)$ , приближенно равна географической долготе перигея и определяет время перелета в сутках (§ 9.1):

$$T = n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda_L - \lambda_{\pi} - \lambda_{\pi,D}}{2\pi}. \quad (4.5)$$

Уточненное с учетом невязки  $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$  время

$$T^* = n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda_L - \bar{\lambda}_{\pi} - \lambda_{\pi,D}}{2\pi}.$$

Далее уточним  $h = h(T)$  с помощью формулы (2.2) (для  $r_L = r_L(t_0)$ ,  $r_{\pi} = r_G + H_{\pi}$ ) и геоцентрическую скорость КА на выходе из СД  $V_3$  по формулам (3.1) (для  $r = r_L(t_0)$ ,  $H_{\pi} = \bar{H}_{\pi}$ ,  $i = \bar{i}_{\pi}$ ,  $h = h(T)$ ,  $s' = 1$  и принятого знака  $s'_v$ ).

Искомый вектор скорости «на бесконечности» определяется из векторного уравнения

$$U_{\infty} = V_3 - V_L(t_0). \quad (4.6)$$



Этот расчет можно уточнить, если не пренебрегать размерами СД и найти момент  $t_3$  выхода из нее, принимая приближенно, что отношение  $(t_3 - t_0)/T$  задано. Уточнить время  $t_3 - t_0$  полета КА в СД Луны можно с помощью графиков (рис. 5.3). Тогда точку выхода из СД можно приближенно найти, полагая, что она находится в плоскости лунной орбиты, а направление геоцентрической скорости  $V_3$  выхода из СД обратно  $r_L(t_3)$ . Соответствующие формулы в этом случае имеют вид (см. рис. 15.4)

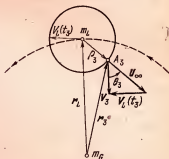


Рис. 15.4. План скоростей на выходе из сферы действия Луны при возвращении к Земле (проекции на плоскость лунной орбиты).

$$V_3 = \sqrt{2\mu_G/r_L(t_3) + h}, \quad \operatorname{tg} \theta_3 = V_L(t_3)/V_3, \\ r_3 = r_L(t_3) - \rho_* \cos \theta_3, \quad u'_3 = u_L(t_3) - \rho_* \sin \theta_3/r_3. \quad (4.7)$$

Величины  $r_3$  и  $u_3$  суть геоцентрические радиус-вектор и аргумент широты проекции точки выхода из сферы действия на плоскость лунной орбиты.

Используя известные наклонение  $i_L$  и долготу  $\Omega_L$  восходящего узла лунной орбиты, получим по обычным формулам геоцентрические точки выхода:

$$x_3 = r_3 (\cos u'_3 \cos \Omega_L - \sin u'_3 \sin \Omega_L \cos i_L), \\ y_3 = r_3 (\cos u'_3 \sin \Omega_L + \sin u'_3 \cos \Omega_L \cos i_L), \quad (4.8) \\ z_3 = r_3 \sin u'_3 \sin i_L.$$

Теперь по формулам § 15.2 уточним энергию полета  $h$ , найдем новый вектор  $V_3$ , используя в формулах § 15.3 уточненные значения радиуса  $r = r_3$  и энергии  $h$ . Далее получим селеноцентрическую скорость  $U_3$  выхода и искомый вектор  $U_\infty$ , принимая, что  $U_\infty$  и  $U_3$  коллинеарны:

$$U_3 = V_3 - V_L(t_3), \quad \tilde{U}_\infty = \sqrt{U_3^2 - 2\mu_L/\rho_*}, \quad (4.9) \\ U_\infty = \tilde{U}_\infty \cdot U_3/|U_3|.$$

### § 15.5. Расчет перигейных параметров

Расчет параметров  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$  в перигее  $\pi$  по начальным данным  $t_1$ ,  $\rho_1$ ,  $U_1$  пассивного участка может производиться путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Назовем такой вариант расчета ЧИ. Более быстрым является приближенный расчет методом ИВ, когда траектория заменяется дугами конических сечений, стыкуемыми на границе СД. Такой вариант расчета назовем КС. В обоих вариантах расчет начинается с определения времени  $t_3$  пересечения СД.

#### Вариант ЧИ.

1) Компоненты векторов  $\rho_3 = \rho(t_3)$ ,  $U_3 = U(t_3)$  находятся численным интегрированием по начальному моменту  $t_1$  и элементам селеноцентрической гиперболы;

2) геоцентрические векторы  $r_3$ ,  $V_3$  находятся по  $t_3$ ,  $\rho_3$ ,  $U_3$  из формул (1.1);

3) параметры  $t_\pi$ ,  $r_\pi$ ,  $V_\pi$  в перигее находятся численным интегрированием по начальным данным  $t_3$ ,  $r_3$ ,  $V_3$ . Интегрирование кончается, когда радиальная скорость впервые перейдет через нуль, возрастая;

4) высота  $H_\pi$  и географические координаты  $\lambda_\pi$ ,  $\varphi_\pi$  перигея, а также его геоцентрические долгота  $\lambda$  и широта  $\varphi$  находятся по  $t_\pi$ ,  $r_\pi$ ;

5) геоцентрические элементы  $\{q_{i,\pi}\}$ , в том числе и последний искомый параметр  $i_\pi$ , находятся по  $t_\pi$ ,  $r_\pi$ ,  $V_\pi$ .

#### Вариант КС.

1) Компоненты векторов  $\rho_3 = \rho(t_3)$ ,  $U_3 = U(t_3)$  определяются формулами кеплерова движения по элементам  $\{q_{i1}\}$  и  $\rho_3 = \rho_*$ ;

2) компоненты векторов  $r_3$ ,  $V_3$  находятся из формул (1.1) по  $t_3$ ,  $\rho_3$ ,  $U_3$ ;

3) геоцентрические элементы  $\{q_{i\pi}\} = \{q_{i3}\}$  вычисляются по  $t_3$ ,  $r_3$ ,  $V_3$ ;

4) параметры  $t_\pi$ ,  $r_\pi$  находятся по элементам  $\{q_{i\pi}\}$ , при этом  $t_\pi = \tau_3$ ;

5) географические координаты  $\varphi_\pi$ ,  $\lambda_\pi$  и высота  $H_\pi$  определяются по  $t_\pi$ ,  $r_\pi$ . Искомые отклонения  $y_i$  перигейных параметров от заданных определяется в обоих вариантах одинаково:

$$y_1 = H_\pi - \bar{H}_\pi, \quad y_2 = i_\pi - \bar{i}_\pi, \quad y_3 = \lambda_\pi - \bar{\lambda}_\pi.$$

## Глава 16

### ЧАСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ В РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ

#### § 16.1. Решение внутренней задачи в импульсной постановке

Пусть даны в момент  $t_1$  радиус-вектор  $\rho_1$  и скорость «на бесконечности»  $U_\infty$ . Необходимо найти начальную скорость  $U_1$  соответствующего гиперболического движения в невращающейся селеноцентрической геоэкваториальной системе координат  $m_L \xi, \eta, \zeta$ . Находим

$$U_1^2 = U_n^2(\rho_1) + U_\infty^2. \quad (1.1)$$

Согласно § 14.2 для угла  $\alpha_1$  между начальной скоростью и радиусом имеем два значения

$$\alpha_1^i = \frac{\Phi_i}{2} + \gamma_i, \quad \sin \gamma_i = \frac{U_\infty}{U_1} \sin \frac{\Phi_i}{2} \quad (i = 1, 2); \quad (1.2)$$
$$\Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi.$$

Соответствующие этим решениям гиперболы обходят центр притяжения с разных сторон в плоскости векторов  $\rho_1, U_\infty$  (рис. 14.3). Поэтому задаемся еще знаком  $s = \text{sign}(\sin \Phi)$ , что позволяет из двух решений выбрать одно. Заметим, что при угловых дальностях  $\Phi > \pi$  радиальная компонента начальной скорости может быть  $U_\rho < 0$ , и траектория может опуститься к центру притяжения  $m_L$  ниже минимально допустимого уровня  $\rho_m = \rho_L$  (или другого заданного). Найдем угол  $\alpha_m$ , соответствующий касанию траектории со сферой  $\rho = \rho_m$ . Для него  $\rho_n = \rho_m$ , так что из интегралов энергии и площадей

$$U_i^2 = \frac{2\mu_L}{\rho_i} + U_\infty^2, \quad i = 1, \pi, \quad U_\pi \rho_m = U_1 \rho_1 \sin \alpha_m \quad (1.3)$$

имеем

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{2\mu_L \rho_m + U_\infty^2 \rho_m^2}{2\mu_L \rho_1 + U_\infty^2 \rho_1^2}, \quad (1.4)$$

откуда

$$\cos \alpha_m = -\sqrt{(1-\nu)[1+\nu(U_\infty/U_1)^2]}, \quad (1.5)$$

где  $\nu = \rho_m/\rho_1 < 1$ . При  $\cos \alpha \leq \cos \alpha_m$  траектория должна быть отброшена.

Найдем компоненты переходного импульса в пространстве  $\xi_0 \eta_0 \xi_\infty$ , полагая время активного участка  $t_1 - t_0 = 0$ , т. е.  $t_1 = t_0$ ,  $\rho_1 = \rho_0$ , где  $\rho_0$  определяется по элементам  $\{q_{i0}\}$  орбиты ИСЛ и заданному моменту  $t_0$ . Для этого найдем направление  $C'^0$  кинетического момента для гиперболического движения

$$C'^0 = \frac{s(\rho_1 \times U_\infty)}{|\rho_1 \times U_\infty|}, \quad (1.6)$$

как в Приложении 1 (рис. П 16). По значению

$$\cos i' = C_z'^0 \text{ и } \sin i' = \sin(-C_v'^0)$$

находим  $-\pi < i' < \pi$ ; находим  $\Omega'$  ( $|\Omega'| \leq 90^\circ$ ) и  $0 \leq u' < 2\pi$  по формулам

$$\begin{aligned} \sin \Omega' &= C_x'^0 / \sin i', \quad \cos \Omega' = -C_y'^0 / \sin i', \\ \sin u' &= \sin \varphi_0 / \sin i', \quad \cos u' = \cos \varphi_0 \cos(\Omega' - \lambda_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\lambda_0, \varphi_0$  — сферические координаты направления  $\rho_0$  вектора  $\rho_0$ ;  $\Omega'$  — долгота ближайшего к  $\lambda_0$  узла гиперболы;  $u'$  — аргумент широты вектора  $\rho_0$  на этой гиперболе. Теперь находим компоненты вектора начальной скорости

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= U_1 (\cos W_1 \cos \Omega' - \sin W_1 \sin \Omega' \cos i'), \\ \dot{\eta}_0 &= U_1 (\cos W_1 \sin \Omega' + \sin W_1 \cos \Omega' \cos i'), \\ \dot{\xi}_\infty &= U_1 \sin W_1 \sin i', \quad W_1 = \alpha_1 + u'. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Искомый вектор переходного импульса

$$\Delta U = U_1 - U_\infty, \quad (1.9)$$

где  $U_\infty$  определяется по заданным элементам  $\{q_{i0}\}$  орбиты ИСЛ в заданный момент  $t_0$ .

## § 16.2. Решение внутренней задачи в точной постановке

Идея точного расчета маневра перехода состоит в аналитическом интегрировании уравнений движения в транспортирующей системе координат и в учете влияния возмущений путем численного интегрирования (имеются в виду только возмущения от смещения КА из начала координат).

Транспортирующая система координат считается движущейся поступательно по орбите  $\rho = \rho_\lambda(t)$  с началом в ИСЛ (рис. 16.1). Направление реактивной тяги считается постоянным на активном участке, и длина его предполагается настолько малой, что имеет место сходимость следующего итерационного процесса.

1) Векторы  $\rho_0$ ,  $U_0$ ,  $\Delta U$  находятся, как в § 16.1, по вектору  $U_\infty$ , моменту  $t_0$  и элементам  $\{q_{10}\}$  исходной орбиты ИСЛ в предположении, что импульс  $\Delta U$  сообщается в начальный момент  $t_0$ . Здесь  $\rho_0$  — начальный радиус-вектор,  $U_0$  — начальная скорость. Компоненты единичного вектора  $\Delta U^0$  используются в качестве начального приближения для направления  $V_x^0$  характеристической скорости  $V_x$ .

2) Приближенные значения  $t_1$ ,  $\rho_1$ ,  $U_1$  находятся численным интегрированием уравнений возмущенного движения

$$\ddot{\rho}_v = \mu_L \left( \frac{\rho_\lambda}{\rho_\lambda^3} - \frac{\rho}{\rho^3} \right) \quad (2.1)$$

при начальных данных  $(\rho_v)_0 = (\dot{\rho}_v)_0 = 0$ . Здесь  $\mu_L$  — гравитационный параметр Луны;  $\rho = \rho_\lambda + \rho_R + \rho_v$ ,  $U = U_\lambda + \dot{\rho}_R + \dot{\rho}_v$ ,  $\dot{\rho}_R = -V_x^0 V_r \ln(1 - \alpha\tau)$ ,  $\tau = t - t_0$ ,  $\rho_R(t_0) = 0$ ,

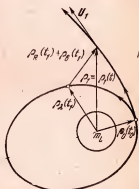


Рис. 16.1. Слагаемые вектора  $\rho(t_1)$  начального положения на гиперболе в начальный момент  $t_1$  — радиусы-векторы:  $\rho_\lambda$  — начала транспортирующей системы координат,  $\rho_R$  — смещения КА в этой системе и  $\rho_v$  — возмущения, возникающего за счет наличия смещения  $\rho_R$ .

$V_r$  — скорость истечения;  $\alpha$  — относительный секундный расход массы. Соответствующая формула для

$$\rho_R = \frac{V_r}{\alpha} [\alpha\tau + (1 - \alpha\tau) \ln(1 - \alpha\tau)] V_x^0 \quad (2.2)$$

предполагает, что  $\rho_R(t_0) = 0$ . Кинетические параметры  $\rho_A(t)$  и  $U_A(t)$  движения начала транспортирующей системы координат находятся по элементам  $\{q_{i0}\}$  исходной орбиты ИСЛ.

Интегрирование продолжается до момента  $t_1$ , когда впервые станет  $U_1^2 - (2\mu_L/\rho_1) = U_\infty^2$ . Полагается тогда  $\rho_1 = \rho(t_1)$ ,  $U_1 = U(t_1)$ .

3) Элементы  $\{q_{i1}\}$  вычисляются по параметрам  $t_1$ ,  $\rho_1$ ,  $U_1$ .

4) Новые значения векторов  $U_1^n$ ,  $\Delta U_1^n$  находятся, как в § 16.1, по  $U_\infty$ , значению  $t_1$  (вместо  $t_0$ ) и элементам  $\{q_{i1}\}$  (вместо  $\{q_{i0}\}$ ). (Заметим, что получаемое при этом новое значение  $\rho_0^n = \rho_1$ ).

Полагаем

$$V_x^n = \rho_R(t_1) + K_U \Delta U^n. \quad (2.3)$$

Здесь вместо  $V_x$  первым слагаемым стоит фактический импульс тяги (того же направления), величина которого уже учитывает гравитационные потери и потому превосходит  $V_x$ . Вторым слагаемым является поправка к характеристической скорости, вызванная малым отличием направления вектора  $U_1$  от нужного и потому гораздо меньшая по модулю, чем  $\rho_R(t_1)$ . Коэффициент  $K_U$  введен для улучшения сходимости итераций. Подбирая  $K_U$ , можно учесть, что вектор тяги будет сразу направлен по вектору  $V_x^n$ , а не по вектору  $V_x$  в начале и по вектору  $\Delta U^n$  в конце активного участка. Для того чтобы в конце активного участка получить не только заданный модуль вектора  $U_\infty$ , но и его заданное направление, можно еще раз повторить решение внутренней задачи в импульсной постановке (см. § 16.1) и еще уменьшить поправку  $|\Delta U^n|$ .

5) При  $|\Delta U^n| > \varepsilon_U$ , где  $\varepsilon_U$  — заданная точность, повторяются пп. 2)–4). При  $|\Delta U^n| < \varepsilon_U$  задача решена, и полагаем  $U_1 = U_1^n$ ,  $\Delta U = V_x^n$ .

### § 16.3. Стыковка внешней и внутренней задач путем итераций

В соответствии со сказанным выше, итерации выполняются по схеме на рис. 16.2.

1)  $t_1$ ,  $\{q_{i1}\}$  находятся, как в §§ 16.1 или 16.2, по известным параметрам  $t_0$ ,  $\{q_{i0}\}$ ,  $U_\infty^0$ ,  $s$ ,  $\mu_L$ , где  $s = \pm 1$  — одно из направлений обхода Луны искомой траекторией.

2)  $t_3$ ,  $\{q_{i3}\}$ ,  $r_L(t_3)$ ,  $\rho_3$ ,  $U_3$ ,  $r_3$ ,  $V_3$ ,  $t_\pi$ ,  $\{q_{i\pi}\}$ ,  $\varphi_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ ,  $r_\pi$ ,  $H_\pi$ ,  $y_j$  определяются, как в § 15.5, по  $t_1$ ,  $\{q_{i1}\}$  и необходимым константам.

3) Сравнивается  $y_j$  с  $\varepsilon_j$ , где  $\varepsilon_i$  — заданные точности. При  $|y_j| < \varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) задача решена. В противном случае определяются следующие величины.

4)  $\Delta T = (-y_3 + \delta\lambda)/\omega_\sigma$ ,  $h_\pi^n = h_\pi + \Delta h_\pi$ , где  $\delta\lambda$  — поправка, о которой сказано ниже;  $\omega_\sigma$  — угловая скорость вращения Земли;  $\Delta h_\pi = h(T + \Delta T, r_\pi) - h(T, r_\pi)$  находится с помощью формул § 15.2. Здесь  $r_\pi = H_\pi + R_0(1 - \alpha_{\text{см}} \sin^2 \varphi_\pi)$ , где  $R_0$  — экваториальный радиус Земли,  $\alpha_{\text{см}}$  — коэффициент сжатия Земли.

5)  $i_3^n = i_3 + k_i y_2$ ,  $h_3^n = h_3 + k_h \Delta h$ ,  $C_3^n = C_3 + k_C \Delta C$ . (Коэффициенты  $k_i$ ,  $k_h$ ,  $k_C \sim 1$  вводятся для улучшения сходимости). Вектор  $V_3^n$  определяется формулами § 15.3 по  $i_3^n$ ,  $h_3^n$ ,  $C_3^n$  (вместо  $i$ ,  $h$ ,  $C_\pi = C_3$ ). Находятся  $\Delta V_3 = V_3^n - V_3$ ,  $U_3^n = U_3 + \Delta U_3$ , новые нормирующие величины  $\tilde{U}_\infty^n = \sqrt{(U_3^n)^2 - 2\mu_L/\rho_*}$ ,  $\tilde{U}_\infty^n = \sqrt{(U_3^n)^2 - (2\mu_L/\rho_*)}$  и соответствующие векторы  $\tilde{U}_\infty^n = \tilde{U}_\infty^n U_3^n / U_3^n$ ,  $\tilde{U}_\infty^n = \tilde{U}_\infty^n U_3^n / U_3^n$ , поправка  $\Delta U_\infty^n = \tilde{U}_\infty^n - \tilde{U}_\infty^n$  и новый вектор  $U_\infty^n = U_\infty + \Delta U_\infty^n$ . Далее повторяются пп. 1), 3) настоящего параграфа.

Коэффициенты  $k_i$ ,  $k_h$ ,  $k_C$ , отличные от единицы, могут ускорить сходимость итераций, если их подобрать с учетом различия параметров  $i$ ,  $h$ ,  $C$  в точках  $3$  и  $\pi$  (обусловленного возмущениями).

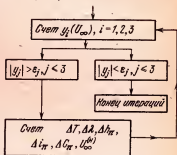


Рис. 16.2. Блок-схема итерационного алгоритма расчета траектории возвращения к Земле с орбиты ИСЛ.





теореме синусов

$$\delta\lambda \approx -\cos A_{\pi} \sin \Phi_{\pi} \delta A_D / \cos \Phi_{\pi}.$$

Замечания. 1. Если использовать вместо численного интегрирования уравнений пассивного полета расчет этого полета по коническим сечениям (т. е. без учета возмущений), то оказывается, что после расчета начального приближения скорости «на бесконечности» (§ 15,4) с уточнением  $U_{\infty}$  по формулам (4.5), (4.6) требуется 5—7 итераций для обеспечения следующих точностей параметров в перигее:

$$\delta H_{\pi} = 0,1 \text{ км}, \quad \delta \lambda_{\pi} = 0,003 \text{ рад}, \quad \delta i_{\pi} = 0,001 \text{ рад}.$$

Время полета до перигея брались порядка 3—4,5 суток, причем возвращение происходит с орбит ИСЛ с высотой 1—2 тыс. км.

2. Использование численного интегрирования вместо расчетов по конечным формулам несущественно сказывается на числе итераций, так как вновь учитываемые при этом возмущения вносят лишь члены с малыми параметрами в правых частях уравнений движения, а решения и их производные по начальным данным в силу непрерывной зависимости от малых параметров изменяются мало.

3. Если процесс итераций сошелся, то можно путем изменения момента  $t_0$  схода минимизировать переходный импульс. Это легко сделать, например, путем перебора в два этапа. На первом этапе определяются допустимые диапазоны значений  $t_0$  (внутри заданного витка орбиты ИСЛ), для которых траектории не подходят к Луне ближе заданного расстояния ( $\rho_{\pi} \geq \rho_m$ ) отдельно для решений с  $\sin \Phi_{1,\infty} > 0$  и с  $\sin \Phi_{1,\infty} < 0$ . На втором этапе внутри найденных диапазонов производится перебор значений  $t_0$ , минимизирующий переходный импульс.

#### § 16.4 Два возможных метода вычисления начального приближения для траектории возвращения

Рассматриваемые методы основаны на долготной привязке геоцентрической траектории в перигее и в точке либо старта с круговой орбиты ИСЛ (первый метод), либо выхода из СД (второй метод).

1. Напомним, что для привязки ТВ по долготе необходимо задать значения начального момента  $t_0$ , числа  $n$  целых суток полета, перигейных наклона  $i_\pi$ , высоты  $H_\pi$  и географической долготы  $\lambda_\pi$ .

В результате привязки ТВ по долготе (согласно §§ 9.1 и 11.2) можно получить элементы  $\{q_{i\pi}\}$  геоцентрической орбиты на момент  $t_\pi$  прохождения КА точки  $\pi$  условного перигея. Идея первого метода состоит в использовании элементов  $\{q_{i\pi}\}$  (полученных из долготной привязки траектории) в качестве исходного приближения для решения путем численного интегрирования предварительной краевой задачи в обратном времени (интегрирование идет от точки  $\pi$  до сближения с Луной на минимальное расстояние). За аргументы в предварительной краевой задаче удобно взять элементы

$$h_\pi = h(t_\pi), \quad \mathcal{O}_\pi = \mathcal{O}(t_\pi), \quad \omega_\pi = \omega(t_\pi).$$

Их начальные значения при фиксированных  $t_0$ ,  $n$ ,  $i_\pi$ ,  $H_\pi$ ,  $\lambda_\pi$  и схеме перелета ( $N$  или  $S$ ) дает привязка ТВ по долготе.

В качестве функций этой краевой задачи можно взять: угол  $\beta$  между векторами  $\rho_\lambda(t_0)$  (радиус-вектор точки старта с орбиты ИСЛ) и  $\rho(t_0)$  (радиус-вектор точки селеноцентрической гиперболы, оскулирующей на момент  $t_0$ ); модуль  $\rho(t_0)$  вектора  $\rho(t_0)$  и угол  $\alpha'(t_0)$  между векторами  $\rho(t_0)$  и  $U(t_0)$  (скорость в точке селеноцентрической гиперболы на момент  $t_0$ ). Отметим заданные значения функций чертой сверху:  $\bar{\beta} = 0$ ,  $\bar{\rho} = \rho_\lambda(t_0)$ ,  $\bar{\alpha}' = 90^\circ$ .

Предварительная краевая задача в рассмотренной постановке сходится надежно.

В отдельных случаях селеноцентрическая гипербола, оскулирующая на момент  $t_0$  и полученная по первому решению задачи Коши (в обратном времени), дает хорошую сходимость точной краевой задачи типа рассмотренной в § 16.3.

Предварительная краевая задача дает точное решение в импульсной постановке. Время решения предварительной краевой задачи в этом случае на ЭВМ-222 составляет около 10 мин. Если же пассивные участки полета определяются по коническим сечениям, то время решения предварительной краевой задачи не превышает 2 мин (на ЭВМ-222).

2. Другой прием решения предварительной краевой задачи основан на привязке ТВ по долготе в перигее и в точке, лежащей на границе СД. При известных  $t_0$ ,  $T$ ,  $i$  сферические координаты  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}$  оси пучка селеноцентрических гиперболических ТВ определяются, например, с помощью зависимостей рис. 5.1, 5.2. Пусть искомая траектория пересекает СД в момент  $t_3$  в точке, отклоненной от оси пучка по селеноцентрической долготе и широте на углы  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  соответственно. Тогда можно подобрать такие значения  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  и момент времени  $t_3$ , чтобы введенные выше функции  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha'$  приняли заданные значения  $\bar{\beta} = 0$ ,  $\bar{\rho} = \rho_A(t_0)$ ,  $\bar{\alpha}' = 90^\circ$ . При этом в координатах точки выхода КА из СД ( $\delta_{оп} + \Delta\delta$ ;  $\alpha_{оп} + \Delta\alpha$ ) величины  $\alpha_{оп}$  и  $\delta_{оп}$  на каждой итерации должны определяться по зависимостям рис. 5.1, 5.2, где время полета  $T$  и угол  $i$  получаются в результате привязки траектории по долготе в точке выхода из СД. Таким образом, аргументами в такой краевой задаче являются  $\Delta\delta$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $t_3$ .

Удобство аргументов  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  состоит в том, что их значения на СД всегда можно задавать в заранее известной области, через которую выходят ТВ с нужными наклонениями и энергиями. В такой постановке предварительную краевую задачу целесообразно решать без численного интегрирования, пренебрегая возмущениями, т. е. заменяя ТВ селеноцентрическими коническими сечениями, стыкуя их на СД и привязывая геоцентрический участок движения по долготе.

## Глава 17

### СТАНДАРТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ВОЗВРАЩЕНИЯ

В гл. 16 было дано решение приближенной и точной краевой задачи вычисления начальных данных ТВ с орбиты ИСЛ, нестандартное в следующем смысле. Во-первых, за аргументы краевой задачи брались условные величины — три компоненты вектора  $U_{\infty}$  скорости «на бесконечности», которая физически не реализуется. Во-вторых, и это главное, нестандартно — без вычисления матрицы производных от заданных функций  $\bar{H}_\pi$ ,  $\bar{i}_\pi$ ,  $\bar{\lambda}_\pi$  по аргументам задачи — находились поправки к аргументам, ведущие к сходимости процесса итераций. Это сокращает время решения краевой задачи на ЭВМ, но требует дополнительных программ (и их отладки), в то время как существуют отлаженные стандартные программы решения краевых задач заданной размерности. Доступность их использования делает оправданной постановку для ТВ некоторых стандартных краевых задач, рассчитанных на применение готового математического обеспечения ЭВМ.

Краевые задачи вычисления ТВ, удовлетворяющей заданным условиям в перигее, обладают лучшей сходимостью по радиусу перигея, чем краевая задача попадания в Луну — по радиусу периселения траектории. Так, например, отклонение начального приближения от решения до 200 тыс. км (по прицельной дальности) обычно не приводит к расходимости. Это объясняется тем, что гравитационное поле Земли в 80 раз мощнее, чем у Луны, однако наличие в краевой задаче вычисления ТВ специфического условия по географической долготе перигея серьезно ухудшает сходимость, потому что угловая скорость суточного вращения Земли велика по сравнению

с угловой скоростью обращения Луны вокруг Земли, а геоцентрическая скорость в перигее гораздо больше скорости на расстоянии Луны. Эти обстоятельства вместе с пространственностью маневра у Луны (обеспечивающего возвращение) приводят к большей трудности вычислений, чем в краевой задаче попадания в Луну, и заставляют иногда прибегать к решению предварительных краевых задач (вроде задач § 16.3).

Если при расчете ТВ уменьшить число заданных условий, то в краевой задаче число свободных аргументов станет больше числа заданных функций. Избыточные аргументы обычно выбираются из условия минимизации затрат характеристической скорости, что еще больше увеличивает объем вычислений.

### § 17.1. Две методические краевые задачи

Учет лишь основных действующих сил достаточен не только при расчете начальных приближений к искомому ТВ, но и при анализе влияния разброса (малых изменений) начальных данных на ТВ. Этот анализ можно делать методом ИВ, т. е. учитывая лишь притяжение Земли вне СД Луны и притяжение Луны в ее СД. В этом анализе методически более важно в рамках метода ИВ поточнее определить начальные данные осевой ТВ (траектории, проходящей через центр Земли), поскольку влияние разброса начальных данных должно быть примерно симметрично для траекторий, симметричных относительно осевой ТВ.

1. Идея краевой задачи быстрого определения осевой траектории пучка с заданной точностью состоит в использовании компонент вектора  $\mathbf{C}$  геоцентрического кинетического момента в качестве функций краевой задачи. Для нахождения осевой траектории значения этих функций задаются равными нулю. Удобство этих функций в том, что вектор  $\mathbf{C}$  линейно зависит от начальных данных (в то время как отклонение  $r_*$  траектории от центра Земли зависит от них существенно нелинейно). При этом краевая задача является двухпараметрической.

Проще всего ее решать в плоскости  $\Pi_c$ , проходящей через вектор  $\mathbf{C}$  ортогонально геоцентрическому радиусу  $r_3$  точки выхода КА из СД. Вектор  $\mathbf{C}$  имеет лишь две

компоненты  $(C_1, C_2)$  в плоскости  $\Pi_c$ , так что ее можно считать аналогом картинной плоскости, имеющим смысл не только для гиперболического, но и для эллиптического движения.

Целью краевой задачи является получение  $C_1 = C_2 = 0$  с заданной точностью  $\varepsilon_c$ . Задавать величину  $\varepsilon_c$  следует в зависимости от желаемой точности  $\varepsilon_r$  попадания в центр Земли. Из условия  $r_\pi < \varepsilon_r$  и интегралов площадей и энергии ( $C = r_\pi V_\pi$  и  $V_\pi = \sqrt{2\mu_0/r_\pi + h}$ ) при малых  $r_\pi$  получаем  $C \approx \sqrt{2\mu_0 r_\pi}$ , т. е.  $\varepsilon_c = \sqrt{2\mu_0 \varepsilon_r}$ .

Пусть движение рассматривается в поступательно движущихся геоэкваториальных системах координат. Одна ось такой системы координат направлена в точку весеннего равноденствия, вторая параллельна плоскости земного экватора, а третья направлена параллельно угловой скорости вращения Земли. Внутри СД движение рассчитывается в селеноцентрической системе координат  $m_L \xi, \eta, \zeta$ , а вне этой сферы — в геоцентрической системе координат  $m_G x, y, z$ .

Траектория определяется селеноцентрическими геоэкваториальными начальными данными  $x_1, y_1, z_1$ ;  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  и моментом  $t_1$  начала движения на пассивном участке. По этим величинам находятся селеноцентрические элементы, время  $t_{1,3}$  полета до границы СД, селеноцентрический радиус-вектор  $\rho_3$  и вектор скорости  $U_3$  на этой границе. Находятся также в момент  $t_3$  по известным элементам лунной орбиты геоцентрические координаты  $r_L$  и компоненты скорости  $V_L$  Луны.

Затем находятся геоцентрические координаты и компоненты скорости аппарата

$$r_3 = r_L(t_3) + \rho_3, \quad V_3 = V_L(t_3) + U_3. \quad (1.1)$$

По этим величинам определяются элементы геоцентрического движения, а также две компоненты  $C_1$  и  $C_2$  кинетического момента  $C$  (проекции  $C$  на ортогональные оси

$$n_1 = e_z \times r_3^0 / |e_z \times r_3^0| \text{ и } n_2 = r_3^0 \times n_1,$$

где  $e_z$  — орт оси  $z_0$ ),

$$C_1 = (Cn_1), \quad C_2 = (Cn_2).$$

Здесь компонента  $C_1$  ортогональна геоцентрическому радиусу  $r_3$  точки выхода из СД и оси  $z_3$ , а компонента  $C_2$  ортогональна радиусу  $r_3$  и компоненте  $C_1$ . Таким образом, плоскость, проходящая через направления  $C_2$  и  $C_1$ , всегда содержит вектор  $C$  геоцентрического кинетического момента.

Для определения номинальных ТВ решается двухпараметрическая краевая задача, например, методом Ньютона с использованием конечно-разностных производных. Варьируются  $\xi_1, \xi_2$  — два из шести исходных параметров, определяющих начальные данные, причем так, чтобы параметры  $C_1$  и  $C_2$  принимали заданные значения. Начальное приближение задается с помощью метода ТСД. Расчеты показывают, что таким образом краевая задача решается за несколько итераций. При этом величина  $C$  уменьшается на четыре порядка (от значения  $\sim 10^5$  км<sup>2</sup>/с до 10 км<sup>2</sup>/с). Назовем для краткости такую краевую задачу центральной. Обозначим через  $\xi_1^0, \xi_2^0$  те значения исходных параметров  $\xi_1, \xi_2$ , которые являются решением центральной краевой задачи.

2. Для попадания в заданную точку  $G$  земной поверхности с геоцентрическими координатами  $\lambda_r, \varphi_r$  решается вторая краевая задача — нецентральная.

Находятся географические координаты  $\lambda_\gamma^0, \varphi_\gamma^0$  точки пересечения траектории с земной поверхностью. Затем строятся на плоскости  $\lambda\varphi$  два противоположных криволинейных луча, по которым при изменении параметра  $\xi_1$  от значения  $\xi_1^0$  соответственно в положительную и отрицательную стороны смещается точка пересечения траектории с земной поверхностью. Строятся также два аналогичных луча, получающихся при изменении параметра  $\xi_2$  от значения  $\xi_2^0$ . Очевидно, полученные четыре луча задают криволинейную систему координат на плоскости  $\lambda\varphi$ , определяющую нелинейное отображение плоскости  $\xi_1\xi_2$  на плоскость  $\lambda\varphi$ , взаимно однозначное в рассматриваемой области изменения параметров  $\xi_1\xi_2$ . По полученной криволинейной системе координат с помощью линейного отображения могут быть найдены значения параметров  $\xi_1\xi_2$ , отвечающие заданной точке  $\varphi_r, \lambda_r$ . Они могут использоваться в качестве начального приближения для решения новой двухпараметрической краевой

задачи — нецентральной. В результате могут быть найдены значения  $\xi_1, \xi_2$ , отвечающие попаданию в точку  $G$  с нужной точностью.

### § 17.2. Проектная задача расчета возвращения при свободной долготе восходящего узла орбиты ИСЛ

Пусть орбита ИСЛ  $\rho_\lambda(t)$  задана не полностью, а именно в заданный момент времени  $t_{\Omega_\lambda}$  (соответствующий нахождению КА в восходящем узле) заданы элементы  $i_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, \omega_\lambda$ , а долгота восходящего узла  $\Omega_\lambda$  не задана и может быть любой.

Требуется возвратить КА к Земле так, чтобы в точке  $\pi$  условного перигея реализовались данные параметры  $H_\pi, i_\pi, \lambda_\pi$ . Пусть решение задачи находится с помощью численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.4.6). Траектории возвращения будем различать по схеме возвращения ( $N, S$ ) и по числу  $n$  целых звездных суток, содержащихся во времени полета  $T$ .

Пусть заданы еще схема возвращения и  $n$ . Пусть задан, наконец, стартовый виток орбиты ИСЛ, соответствующий временному промежутку от  $t_{\Omega_\lambda}$  до  $t_{\Omega_\lambda} + T_\lambda$ . Здесь  $T_\lambda$  — период, оскулирующий в момент  $t_{\Omega_\lambda}$  прохождения узла  $\Omega_\lambda$ . Тогда существует единственная ТВ, соответствующая минимальным затратам характеристической скорости и удовлетворяющая заданным условиям в перигее. Она находится путем решения краевой задачи.

Аргументами в данной краевой задаче будем считать время  $t_0$  включения двигателя для разгона с орбиты ИСЛ (отсчитываемое от момента прохождения КА восходящего узла стартового витка), энергию  $h'$  селеноцентрической гиперболы в момент выключения двигателя и долготу  $\Omega_\lambda$  восходящего узла орбиты ИСЛ. Функциями в краевой задаче будем считать, как обычно,  $H_\pi(t_0, h', \Omega_\lambda)$ ,  $i_\pi(t_0, h', \Omega_\lambda)$  и  $\lambda_\pi(t_0, h', \Omega_\lambda)$ . Они вычисляются в точке  $\pi$  после численного интегрирования системы уравнений (1.4.6) от  $t = t_0$  до  $t = t_\pi$  и в результате решения краевой задачи делаются близкими соответственно к  $\bar{H}_\pi, \bar{i}_\pi, \bar{\lambda}_\pi$ . Заметим, что, поскольку величина  $\Omega_\lambda$  не фиксирова-



на, то ее можно подобрать так, чтобы орбита ИСЛ находилась в плоскости  $\Pi'$  гиперболы отлета. Тогда ориентация тяги двигателя на активном участке будет определяться лишь программой угла тангажа  $\theta(t)$  в плоскости  $\Pi_\lambda = \Pi'$ . Ввиду слабости гравитационного поля Луны и кратковременности активного участка (менее 3 мин при начальной тяговооруженности  $v_0 > 0,15$ , удельной тяге  $P_{уд} \geq 300$  кгс/кг) с достаточной для практики точностью можно принять  $\theta(t) = \text{const} = \theta$ . В рассмотренной постановке задачи постоянный угол  $\theta$  является избыточным аргументом, и его надлежит оптимизировать в смысле минимума затрат характеристической скорости.

Особенностью данной краевой задачи является то, что оптимизация угла  $\theta$  отделима от собственно краевой задачи (подобно отделимости оптимизации  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$  от краевой задачи плоского разгона с орбиты ИСЗ к Луне, см. § 11.1). Отделимость здесь означает возможность решить задачу оптимизации в достаточно общем виде до решения краевой задачи. А именно, ее удастся решить, задаваясь лишь значением  $h'$  энергии селеноцентрического движения в конце активного участка перехода с орбиты ИСЛ на ТВ. Решая эту задачу для серии значений  $h'$ , можно получить угол тангажа как оптимальную функцию  $\theta(h')$ . После этого, переходя к решению краевой задачи и задаваясь ее аргументами  $t_0, h', \Omega_\lambda$ , следует взять  $\theta = \theta(h')$  на активном участке.

Ясно, что оптимальность разгона не нарушится, если выбором поворота  $\Omega_\lambda$  плоскости гиперболы и выбором поворота гиперболы в этой плоскости (за счет изменения  $t_0$ , т. е. точки старта на орбите ИСЛ) реализовать заданные значения  $\bar{i}_\pi, \bar{H}_\pi$ . Получающуюся при этом невязку  $\lambda - \bar{\lambda}_\pi \neq 0$  можно свести к нулю, меняя  $h'$  и, соответственно,  $\theta(h')$ .

Для определения оптимальной функции  $\theta(h')$  необходимо исследовать на минимум функцию  $V_\pi(v_0, P_{уд}, h', \theta)$  затрат характеристической скорости. Такое исследование было проведено для ряда значений каждого из аргументов путем массовых расчетов на ЭВМ. Результаты представлялись в виде серий кривых. Одна из таких серий приведена на рис. 11.5 и представляет зави-

симось  $\theta$  от  $h'$ ,  $\theta_0$ ,  $P_{уд}$  в случае перехода на ТВ с круговой орбиты ИСЛ радиусом 1800 км.

Могут возникнуть ситуации, требующие старта с орбиты ИСЛ в заданное время  $t_0$ , т. е. старта с заданного аргумента широты. В этом случае за аргументы краевой задачи можно взять  $h'$ ,  $\theta$ ,  $\Omega_\lambda$  (при тех же функциях). Если возникнет задача, в которой задано полное время полета  $T$  по траектории и его необходимо выдержать с точностью до секунд, то краевая задача возвращения к Земле становится четырехпараметрической: с аргументами  $t_0$ ,  $\theta_0$ ,  $h'$ ,  $\Omega_\lambda$  и функциями  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ ,  $T$ . Некоторые способы вычисления начальных приближений для таких задач были даны в гл. 16.

### § 17.3. Краевая задача возвращения с заданной орбиты ИСЛ

Пусть движение ИСЛ задано всеми шестью кеплеровыми элементами  $\Omega_\lambda$ ,  $i_\lambda$ ,  $p_\lambda$ ,  $e_\lambda$ ,  $\omega_\lambda$ ,  $t_{\Omega_\lambda}$  (на момент  $t_{\Omega_\lambda}$  прохождения КА восходящего узла).

Требуется вернуть КА к Земле по траектории с заданными параметрами  $\bar{H}_\pi$ ,  $\bar{i}_\pi$ ,  $\bar{\lambda}_\pi$  (в точке  $\pi$  условного перигея). В данном случае возвращение к Земле возможно лишь при изменении плоскости исходного селеноцентрического движения по орбите ИСЛ с помощью пространственного разгона. Старт к Земле в принципе возможен из любой точки орбиты ИСЛ. При заданном времени старта  $t_0$  можно в качестве аргументов краевой задачи принять постоянные углы тангажа  $\theta$  и рыскания  $\psi$  на активном участке и еще энергию  $h'$  селеноцентрической гиперболы в момент выключения двигателя, так как численные расчеты показали, что пространственный разгон КА с орбиты ИСЛ к Земле с постоянными углами  $\theta$  и  $\psi$  на активном участке при практически интересных тяговооруженностях незначительно отличается по затратам характеристической скорости от разгона с оптимальной программой  $\theta_{opt}(t)$ ,  $\psi_{opt}(t)$ .

Если задан лишь стартовый виток орбиты ИСЛ, а время  $t_0$  включения двигателя не задано и может быть выбрано произвольно, то в качестве аргументов краевой задачи можно взять параметры  $t_0$ ,  $\psi$ ,  $h'$ , а угол тангажа  $\theta$

оптимизировать (в смысле минимума характеристической скорости). Для получения траектории со строго заданным временем перелета  $T$  аргументами краевой задачи могут быть  $t_0$ ,  $\psi$ ,  $h'$ ,  $\theta$ . При этом функциями в краевой задаче будем по-прежнему считать  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ ,  $T$ . Задача является четырехпараметрической.

Для определения начальных значений аргументов может потребоваться решение предварительной краевой задачи одним из указанных в гл. 16 методов.

Отличительной особенностью краевой задачи с пространственным маневром является присутствие в числе аргументов задачи угла  $\psi$ , определяющего отклонение вектора тяги  $\mathbf{P}$  от плоскости исходной орбиты. Это обстоятельство не позволяет отделить от краевой задачи возвращения задачу оптимизации угла тангажа  $\theta$  (в смысле минимума затрат характеристической скорости) во второй из названных трех постановок. При пространственном маневре, особенно в случае существенного изменения плоскости исходного движения, краевая задача возвращения должна содержаться внутри задачи оптимизации программы угла тангажа. Получение оптимальной программы  $\theta_{opt}$ ,  $\psi_{opt}$  в такой постановке задачи сравнимо по трудоемкости с задачей оптимизации  $t_0$  путем решения серии краевых задач с аргументами  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $h'$  (и теми же функциями). (Таким образом, можно взять за аргументы  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $h'$  и отделить оптимизацию  $t_0$  от краевой задачи.)

В предположении малости угла поворота плоскости селеноцентрического движения при разгоне ( $I < 30^\circ$ ) и постоянства угла рыскания  $\psi$  на активном участке оптимизацию угла тангажа  $\theta$  все же можно (в приближенной постановке) отделить от краевой задачи возвращения, исследуя на экстремум функцию  $V_x(v_0, P_{уд}, h', \theta, \psi)$ . Некоторые результаты такой оптимизации, проведенной численным путем для круговой орбиты ИСЛ радиусом 1800 км при  $v_0 = 0,5$  и  $P_{уд} = 345$  кгс/кг, представлены на рис. 17.1 в виде двухпараметрического семейства кривых  $\theta_{opt} = \theta(\psi, h')$  [4—1974].

Анализ зависимостей (рис. 17.1) показывает, что при умеренных значениях селеноцентрической энергии  $h'$  отлетной гиперболы (времена полета по ТВ  $3 \text{ сут} \leq T \leq 5 \text{ сут}$ ) оптимальные углы тангажа  $\theta_{opt}$  невелики (не превышают

по модулю  $5^\circ$ ), как и при плоском разгоне с орбиты ИСЛ к Земле.

С ростом угла  $I$  и энергии  $h'$  возрастают и значения углов тангажа и рыскания, что влечет за собой увеличение затрат топлива на разгон. При углах  $I > 30^\circ$  решенные задачи оптимизации управления вектором тяги на

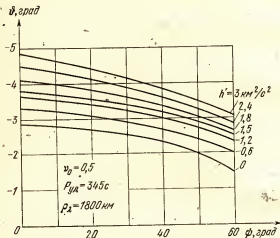


Рис. 17.1. Зависимость угла  $\phi$  тангажа от угла  $\phi$  рыскания для различных селеноцентрических энергий при фиксированных тяговооруженности  $v_0$ , удельной тяге  $P_{уд}$  и радиусе  $a_l$  орбиты ИСЛ.

активном участке независимо от решения краевой задачи возвращения недопустимо.

В краевой задаче возвращения к Земле при входе в атмосферу с большими углами наклона вектора скорости к местному горизонту в качестве заданных функций используются угол входа  $\theta_{вх}$  и географические координаты точки входа  $\varphi_{вх}$ ,  $\lambda_{вх}$  на заданной высоте  $\bar{H}_{вх}$  (от поверхности Земли) точки входа в атмосферу. Здесь на этапе решения специальной предварительной краевой задачи можно получить траекторию с таким радиусом условного пёригея, при котором на высоте  $\bar{H}_{вх}$  реализуется заданный угол входа  $\theta_{вх}$ . Далее решается основная краевая задача с начальными аргументами, полученными из предварительной краевой задачи. При этом интегрирование пре-

крашается в момент достижения у Земли высоты  $H = \bar{H}_{\text{вх}}$ . Функциями этой краевой задачи являются  $\varphi_{\text{вх}}, \lambda_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}$  (при трехпараметрической краевой задаче) и  $\varphi_{\text{вх}}, \lambda_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}, T$ , если требуется реализовать заданное время возвращения  $T$ .

#### § 17.4. Краевая задача возвращения с поверхности Луны

Пусть на поверхности Луны задана точка старта ее селеноцентрическими координатами  $\alpha_0, \delta_0$ . Требуется возвратить КА из этой точки на Землю с заданными значениями параметров  $\bar{H}_{\text{п}}, \bar{i}_{\text{п}}, \bar{\lambda}_{\text{п}}$  (или  $\bar{H}_{\text{п}}, \bar{i}_{\text{п}}, \bar{\lambda}_{\text{п}}, T$ ) в точке условного перигея либо параметров  $\bar{\theta}_{\text{вх}}, \bar{\varphi}_{\text{вх}}, \bar{\lambda}_{\text{вх}}$  (или  $\bar{\theta}_{\text{вх}}, \bar{\varphi}_{\text{вх}}, \bar{\lambda}_{\text{вх}}, T$ ) на заданной высоте входа  $\bar{H}_{\text{вх}}$  от поверхности Земли. Для решения краевой задачи возвращения КА с поверхности Луны в точной постановке необходимо выбрать закон управления вектором тяги на активном участке, аргументы задачи, дать способы определения их начальных значений.

Рассмотрим старт КА с поверхности Луны по двум различным схемам: а) непосредственное выведение КА с поверхности Луны на траекторию Луна — Земля; б) выведение КА на орбиту спутника Луны и последующее возвращение к Земле. При непосредственном выведении КА на траекторию Луна — Земля возможен или вертикальный, или наклонный разгон. В случае вертикального разгона угол тангажа на активном участке постоянен и равен  $90^\circ$  (в стартовой системе координат). Вертикальный разгон к Земле происходит по оси пучка и возможен из точек небольшой части поверхности Луны (их координаты  $(\alpha_{\text{оп}}, \delta_{\text{оп}})$  представлены на рис. 5.1). При этом полет из каждой точки поверхности, пригодной для вертикального разгона, требует определенных комбинаций времени  $T$  полета и геоцентрического наклона  $i$  траектории вне СД к плоскости лунной орбиты. Учитывая эти обстоятельства, за аргументы краевой задачи при почти вертикальном выведении КА на траекторию Луна — Земля можно принять время  $t_0$  старта с поверхности Луны и малые отклонения  $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$  вектора тяги от направления  $(\alpha_0, \delta_0)$  местной вертикали. При этом разгон происходит до заданной энергии  $h'_k$  селеноцентрической

гиперболы в конце активного участка, а энергия  $h_k$  задается таким образом, чтобы при  $\Delta\alpha = \Delta\delta = 0$  имело место возвращение к центру Земли. Функциями красовой задачи являются, как и ранее,  $H_\pi$ ,  $i_\pi$ ,  $\lambda_\pi$ .

Заметим, что для каждой точки из области вертикальных разгонов на поверхности Луны существует в любой календарной дате единственное время старта, при котором достижимы заданные значения параметров в условном перигее. Действительно, траектория возвращения к Земле при почти вертикальном разгоне для фиксированных  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ ,  $h'$  единственна, и время полета по ней до заданной высоты  $\bar{H}_\pi$  известно в любую календарную дату. Поэтому можно однозначно подобрать время старта так, чтобы в момент прилета КА в перигей  $\pi$  под него «подвернулся» меридиан с заданным значением  $\bar{\lambda}_\pi$ .

Возвращение к Земле при наклонном разгоне в принципе возможно из любой точки поверхности Луны. Чтобы затраты характеристической скорости уменьшить, надо оптимизировать направление вектора тяги  $P$  по тангажу  $\theta$ :

Поскольку КА покоится на лунной поверхности, то его выведение можно производить в плоскости, проходящей через точку старта и направление скорости «на бесконечности» (которое известно из внешней задачи — § 16.3). Поэтому можно считать номинальный угол рыскания  $\psi(t) = 0$ .

Расчеты показывают, что линейная программа угла тангажа

$$\theta = \theta_0 + \dot{\theta}(t - t_0) \quad (4.1)$$

позволяет реализовать наклонный разгон с практически несущественными энергетическими потерями по сравнению с оптимальным разгоном [4—1957].

Краевая задача возвращения к Земле с наклонным стартом может быть поставлена различным образом. При линейной программе угла тангажа (4.1) на участке разгона в качестве аргументов краевой задачи выступают начальный угол тангажа  $\theta_0$ , скорость  $\dot{\theta}$  изменения угла тангажа, энергия  $h_1$  селеноцентрической гиперболы в момент  $t_1$  выключения двигателя и азимут  $A$  прицеливания.

Плоскость  $\Pi'$  гиперболы отлета содержит векторы: начальный  $\rho_0$  и конечный  $\rho_1$  (если  $\psi(t) = 0$ ). При решении

краевой задачи выбором аргументов  $\theta_0, \dot{\theta}, h'_1$ . А можно реализовать четыре заданные условия в точке  $\pi$ , например,  $\bar{H}_\pi, \bar{i}_\pi, \bar{\lambda}_\pi, T$ . Если же на ТВ у Земли в точке  $\pi$  заданы только  $\bar{H}_\pi, \bar{i}_\pi, \bar{\lambda}_\pi$ , то число аргументов в краевой задаче на единицу больше числа функций. Избыточный аргумент обычно выбирается из условия минимума затрат характеристической скорости. В этом случае решение краевой задачи возвращения к Земле с наклонным стартом целесообразно разделить на два этапа (особенно при массовых расчетах), выбирая модуль радиуса  $\rho_1$  конца разгона из условия реализации минимума энергетических затрат.

На первом этапе решается краевая задача (для каждого из заданных радиусов  $\rho_1 = \bar{\rho}_1$ ) возвращения в точку  $\pi$  с заданными  $\bar{H}_\pi, \bar{i}_\pi, \bar{\lambda}_\pi$ . Аргументами в этой краевой задаче являются энергия  $h'$ , наклонение  $i'$  селеноцентрической гиперболы и угол  $\alpha_1$  между радиусом-вектором  $\rho_1$  и вектором скорости  $U_1$  в момент  $t_1$  конца разгона. Долгота восходящего узла гиперболы в этом случае определяется условием прохождения плоскости гиперболы через точку старта на поверхности Луны ( $\alpha_0, \delta_0$ ). Результатом решения краевых задач на первом этапе является двухпараметрическое семейство кривых  $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1(\bar{h}'_1, \bar{\alpha}'_1)$  причем вектор скорости  $U_1$  получается из решения внешней задачи возвращения к Земле. При этом для каждой тройки  $\bar{h}'_1, \bar{\alpha}'_1, \bar{\rho}_1$  вычисляются углы  $\Omega' = \bar{\Omega}, i' = \bar{i}'$ , определяющие ориентацию в пространстве плоскости гиперболы возвращения.

На втором этапе решается ряд краевых задач выведения КА с поверхности Луны в точку на селеноцентрической гиперболе (с заданными энергией  $h' = \bar{h}'$ , долготой узла  $\Omega' = \bar{\Omega}$ , наклонением  $i' = \bar{i}'$ ), радиус-вектор которой  $\rho_1 = \bar{\rho}_1$  образует угол  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$  с вектором  $U_1$  селеноцентрической скорости. Эти краевые задачи являются двухпараметрическими. За аргументы в них принимаются  $\theta_0$  (начальный угол тангажа) и  $\dot{\theta}$  (постоянная скорость изменения угла тангажа) на активном участке. Функциями являются расстояние  $\rho_1$  от центра Луны до КА в момент окончания активного участка и угол  $\alpha_1$  между радиусом-

вектором  $\rho_1$  и вектором  $U_1$  скорости в момент выключения двигателя, определяемый условием достижения  $h' = \bar{h}'$ . Задаваемые значения функций  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ ,  $\rho_1 = \bar{\rho}_1$  и селеноцентрической энергии  $\bar{h}'$  берутся из результатов решения краевых задач на первом этапе, т. е. определяются двухпараметрическим семейством кривых  $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1(\bar{h}', \bar{\alpha}_1)$ .

В задаче возвращения с поверхности Луны к Земле с предварительным выведением КА на заданную орбиту ИСЛ предполагается, что старт происходит в тот момент, когда точка старта оказывается в плоскости орбиты ИСЛ (из этого условия определяется азимут стрельбы  $A$ ). Для вычисления траектории выведения КА с поверхности Луны на заданную орбиту ИСЛ решается двухпараметрическая краевая задача, аргументами которой являются  $\theta_0$  и  $\bar{\theta}$ , а функциями —  $\rho_\lambda$  (радиус заданной орбиты ИСЛ в точке выведения) и  $\alpha_1$  (угол вектора скорости  $U_\lambda$  с радиусом-вектором  $\rho_\lambda$ ). Выключение двигателя производится при достижении заданной энергии орбиты ИСЛ.

Расчет ТВ к Земле с орбит ИСЛ производится методами, изложенными в §§ 17.1—17.3.



## Глава 18

### ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ

При практической реализации номинальной расчетной ТВ из-за инструментальных (приборных) и методических ошибок всегда реализуются траектории, отклоненные от расчетной. Наиболее существенными являются ошибки приборов системы управления КА: ошибки системы ориентации, интеграторов ускорения, временных счетчиков и т. д. Методические ошибки при правильно выбранных методе, точности счета и достаточно хорошем знании силовых полей в современных условиях могут оказаться несущественными.

Поскольку в точности невозможно реализовать номинальные значения начальных параметров движения КА на пассивном участке, то важно знать, каким образом повлияют на траекторию отклонения фактических начальных данных от номинальных. В связи с этим расчету номинальных траекторий обычно сопутствует исследование отклоненных траекторий. Производные отклонений в конце движения по начальным данным позволяют оценивать энергетические затраты, необходимые для такой коррекции пассивного участка, которая обеспечивает выполнение основной задачи.

При определении влияния малых изменений начальных данных на ТВ нет нужды учитывать все действующие силы, а достаточно учесть лишь притяжение Луны внутри ее СД и притяжение Земли — вне этой СД. Ниже рассмотрено влияние малых изменений кинематических параметров в начале движения на ТВ с поверхности Луны и с орбиты ИСЛ к Земле. За номинальные ТВ приняты траектории, проходящие через центр Земли. Они являются осевыми в пучках ТВ. Вначале дается в рамках ме-

тогда ТСД оценка влияния малых отклонений начальных данных от номинальных на ТВ к Земле в целом от Луны, движущейся по круговой орбите.

Далее находятся номинальные и отклоненные траектории более точным методом ИВ для случая эллиптической орбиты Луны. Находится отклонение в начальных данных, при котором перигейное расстояние ТВ равно предельному (например, радиусу  $r_*$  верхних слоев атмосферы). Для таких траекторий находятся производные от  $r_*$  по соответствующему исходному данному. Эти производные могут быть полезны при оценке точности исполнения коррекции, необходимой для обеспечения пологого входа в атмосферу.

Расчеты методом ИВ проводятся для ТВ с поверхности Луны и орбиты ИСЛ. Точки старта на поверхности Луны выбираются либо в районе вертикальных посадок (аппаратов типа «Луны-9»), либо в районе стартов, близких к вертикальному. Плоскости орбит ИСЛ выбираются либо близкими к плоскости лунной орбиты, либо близкими к ортогональным этой плоскости.

### § 18.1. Предварительная оценка точности начальных данных, необходимой для возвращения

Очевидно, что для возвращения к Земле от Луны по любой траектории трансверсальная компонента  $V_z$  выходной геоцентрической скорости должна удовлетворять условию (13.1.4), которое определяет области возвращения на  $V_z$ -сфере, и, следовательно, на  $U_z$ -сфере. Размеры последних областей позволяют приблизительно судить о необходимых точностях начальных данных. Действительно, вследствие ошибок начальных данных фактический вектор  $U_z$ , отклоняясь от номинального по направлению, не должен выйти из допустимой области.

Случай вертикального старта существенно отличается по влиянию разброса начальных данных от случая горизонтального старта. Рассмотрев эти крайние случаи, можно получить представление и о промежуточных случаях. В случае почти вертикального старта малая ошибка в направлении  $\alpha_1$  вектора скорости приводит к появлению малой угловой дальности  $\Phi'$  при полете от поверхности Луны по гиперболе.

Из (4.4.22) для малых  $\alpha'_1$ ,  $\Phi'$  имеем  $\gamma = \Phi' U_\infty / 2U_1$ ,  $\alpha'_1 = (\Phi'/2)(1 + U_\infty/U_1)$ , так что

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha'_1} = 2\lambda \equiv \frac{2}{1 + U_\infty/U_1}.$$

Вводя вместо  $\alpha'$  угол  $\theta_1 = 90^\circ - \alpha'$ , получим  $\partial \Phi' / \partial \theta_1 = -2\lambda$ . Кроме того, для вертикального старта имеем

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial U_1} = 0.$$

При величине  $U_\infty = 1$  км/с имеем  $\partial \Phi' / \partial \theta_1 \approx -1,4$ .

Область (13.1.4) на  $U_3$ -сфере имеет близкие к относительно наибольшим размеры при значениях  $U_3$ , мало отличающихся от  $V_L$ . При этом рассматриваемая область оказывается односвязной. Угловые размеры ее по длине составляют несколько десятков градусов, по ширине — около  $20^\circ$ . Так как  $\partial \Phi' / \partial \theta_1 < 1,5$ , то предельными будут ошибки по углу порядка  $\pm 10^\circ$  в направлении ширины области (13.1.4), т. е. по нормали к плоскости орбиты Луны.

Для номинального значения  $U_3 = V_L$  ошибки по скорости  $U_3$  (при отсутствии ошибки по ее направлению  $\theta_1$ ) не должны превышать  $\pm 0,2$  км/с, чтобы область (13.1.4) еще содержала рассматриваемую траекторию (при  $\delta U_3 < -0,2$  км/с область (13.1.4) пустая, при  $\delta U_3 < +0,2$  км/с область (13.1.4) двусвязна, и фактический вектор  $U_3$  будет находиться между частями области (13.1.4) вне ее). Соответствующие ошибки  $\delta U$  начальной скорости согласно селеноцентрическому интегралу энергии удовлетворяют условию

$$U_1 \delta U_1 = U_3 \delta U_3,$$

т. е. составляют около  $0,06$  км/с. Очевидно, наиболее вредны здесь смешанные ошибки, так что реальные ошибки не должны превышать величин порядка  $2-3^\circ$  по  $\theta_1$  и  $15-20$  м/с по  $U_1$ .

В случае наклонного старта варьированием уравнения (4.4.21) с учетом того, что  $U_\infty^2 = U_1^2 - 2\mu_L/\rho_1$ , получим

$$\frac{d(\Phi'/2)}{\cos^2 \Phi'/2} = \frac{1 + k \cos \alpha'_1}{k + \cos \alpha'_1} d\alpha'_1 - \frac{\sin \alpha'_1}{(k + \cos \alpha'_1)^2} \frac{\mu_L}{k\rho_1 U_1^2} \left( \frac{d\rho_1}{\rho_1} + 2 \frac{dU_1}{U_1} \right),$$

$$k = U_\infty/U_1.$$

Вводя  $\theta' = 90^\circ - \alpha'_1$  и обозначение  $k_1 = 2\mu_L \cdot \cos^2 \frac{\Phi'}{2} \cdot \cos \theta' / [k(k + \sin \theta') \rho_1 U_1^2]$ , получим

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \rho_1} = -\frac{k_1}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial U_1} = -\frac{2k_1}{U_1}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta'} = -2 \frac{1 + k \sin \theta'}{k + \sin \theta'} \cos^2 \frac{\Phi'}{2}.$$

Для горизонтального старта ( $\theta_1 = 0$ ) имеем при  $U_\infty = 1,2$  км/с

$$\delta_{\rho_1} \Phi' = -1,8 \frac{\delta \rho_1}{\rho_1}, \quad \delta_{U_1} \Phi' = -3,6 \frac{\delta U_1}{U_1}, \quad \delta_{\theta_1} \Phi' = -1,688 \theta'. \quad (1.1)$$

Видим, что модуль производной по  $\theta'$  несколько больше, чем для вертикального варианта.

При горизонтальном старте с поверхности Луны из района вертикальных посадок имеем  $U_\infty \approx 1,2$  км/с,  $U_1 \approx 2,65$  км/с. Предельные ошибки определяются той частью области (13.1.4), для которой  $V_{3r} < 0$ . Ее размеры — порядка  $50^\circ$  по длине и  $20^\circ$  по ширине (рис. 13.4). Предельные (одиночные) ошибки получаются: по  $\theta_1$  — около  $\pm 5^\circ$ , по скорости — около  $\pm 180$  м/с (с учетом (1.1)). Ошибка по азимуту должна быть вдвое меньше, чем по  $\theta_1$ .

При старте с орбиты ИСЛ предельные ошибки могут быть несколько больше, так как можно перейти к меньшей номинальной скорости  $U_3 = 1,1$  км/с. Тогда увеличится область (13.1.4) на  $V_3$ -сфере. Это выгоднее и энергетически. При скорости около 1,1 км/с область (13.1.4) на сфере выходных скоростей (рис. 13.2) уже является односвязной, но еще сохраняет большие угловые размеры.

## § 18.2. Анализ отклоненных траекторий возвращения с поверхности Луны

За исходные параметры, определяющие начальные данные, принимаются сферические селеноцентрические геоэкуаториальные координаты  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$  — радиус, долгота и широта точки старта, а также  $U_1$ ,  $\theta_1$ ,  $A_1$  — модуль, угол возвышения над местным горизонтом и азимут вектора скорости (соответственно) в той же селеноцентрической невращающейся системе координат. Соответствен-

по имеем простые формулы для определения начальных данных по исходным:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho_1 \cos \delta_1 \cos \alpha_1, & \eta_1 &= \rho_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \\ \zeta_1 &= \rho_1 \sin \delta_1,\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= U_1 \cos \psi_1 \cos v_1, & \dot{\eta}_1 &= U_1 \cos \psi_1 \sin v_1, \\ \dot{\zeta}_1 &= U_1 \sin \psi_1,\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\sin \psi_1 &= \sin \delta_1 \sin \theta_1 - \cos \delta_1 \cos \theta_1 \cos A_1, \\ v_1 &= \alpha_1 + \Delta v,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\sin \Delta v = \frac{\cos \theta_1 \sin A_1}{\cos \psi_1}, \quad \cos \Delta v = \frac{\sin \theta_1 - \sin \delta_1 \sin \psi_1}{\cos \delta_1 \cos \psi_1}. \quad (2.4)$$

Здесь используется то обстоятельство, что на единичной сфере направление вектора  $U_1$  отстоит от направления вектора  $\rho_1$  на угол  $90^\circ - \theta_1$  под азимутом  $A_1$ . Азимут здесь отсчитывается от направления на юг против часовой стрелки.

Для определения влияния разброса начальных данных на некоторую номинальную ТВ находятся отклоненные ТВ, т. е. траектории, начальные данные которых отличаются от номинальных отклонением одного из исходных данных в ту или иную сторону на все более возрастающую величину. Сказанное относится к исходным данным  $U_1$ ,  $\theta_1$ ,  $A_1$ ,  $\rho_1$ . Изменения же положения точки старта на поверхности Луны задавались селеноцентрическим углом  $\Phi_1$  смещения начальной точки из номинальной и азимутом  $B_1$  этого смещения. Аналогично предыдущим формулам получаются формулы для определения отклоненных значений  $\tilde{\delta}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_1$

$$\sin \tilde{\delta}_1 = \sin \delta_1 \cos \Phi_1 - \cos \delta_1 \sin \Phi_1 \cos B_1, \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \Delta \alpha_1; \quad (2.5)$$

$$\sin \Delta \alpha = \frac{\sin B_1 \sin \Phi_1}{\cos \tilde{\delta}_1}, \quad \cos \Delta \alpha = \frac{\cos \Phi_1 - \sin \tilde{\delta}_1 \sin \delta_1}{\cos \delta_1 \cos \tilde{\delta}_1}. \quad (2.6)$$

Как уже отмечалось, определяющим параметром входа КА в атмосферу Земли является радиус  $r_n$  условного

перигея. Поэтому важно установить зависимость  $r_n$  от изменения исходных параметров  $U_1$ ,  $\theta_1$ ,  $A_1$ . Необходимо также знать предельные отклонения  $\delta U_1$ ,  $\delta \theta_1$ ,  $\delta A_1$ , при которых еще возможно возвращение к Земле.

Основным параметром, определяющим энергетику и время полета, является начальная скорость  $U_1$ . Для существования решения задачи о ТВ начальная скорость  $U_1$  не должна быть меньше минимальной  $U_0 \approx 2,58$  км/с, соответствующей селеноцентрической скорости выхода из СД  $U_3 \approx 0,8$  км/с. В то же время  $U_1$  не может быть намного больше  $U_0$ , так как пропорционально разности  $U_1 - U_0$  возрастут энергетические затраты на возвращение к Земле. Поэтому для расчета примеров выбираются значения  $U_1 = 2,6$  км/с,  $U_1 = 2,65$  км/с и  $U_1 = 2,7$  км/с.

Исходные параметры  $\theta_1$  и  $A_1$ , определяющие направление вектора  $U_1$ , принимаются за аргументы  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  краевой задачи (§ 17.1). Они удобны, так как при изменении одного из них изображающая точка на плоскости  $C_1C_2$  (§ 17.1) смещается в направлении, примерно ортогональном направлению смещения, вызываемого изменением другого параметра. Оба рассматриваемых параметра практически не влияют на энергетику, на количество и виды возможных решений и почти не влияют на время полета. Лишь для отыскания на Луне начальной точки, из которой возможен чисто вертикальный старт для возвращения к Земле, в качестве подбираемых исходных параметров берутся сферические координаты  $\delta_1$ ,  $\alpha_1$  точки на лунной поверхности. Соответствующие начальные данные  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$  находятся по формулам (2.1), (2.2).

Координаты  $\delta_1$ ,  $\alpha_1$  точки старта задаются или в окрестности точки вертикальной посадки (варианты 1—3 табл. 18.1), или в окрестности точки вертикального старта (варианты 4—6).

Кроме упомянутых выше траекторных параметров, в результате расчетов определялись сферические селеноцентрические координаты  $\Phi_n$ ,  $\Lambda_n$  начальной точки во вращающейся системе координат  $m_L \xi_n \eta_n \zeta_n$ .

Сферические координаты  $\psi_3$ ,  $\nu_3$  вектора  $U_3$  определены в невращающейся системе осей координат  $m_L \xi \eta \zeta$ , параллельных осям  $m_L \xi_n \eta_n \zeta_n$  на момент  $t_3$  выхода КА из СД.

Вычисляется также угловая дальность  $\Phi'$  и азимут  $A_1$  селеноцентрической траектории КА внутри СД.

В табл. 18.1 приведены некоторые характеристики шести вариантов номинальных ТВ с поверхности Луны

Таблица 18.1

Характеристики траекторий возвращения к Земле  
с лунной поверхности

Параметры	Варианты					
	1	2	3	4	5	6
$\Phi_L$ , град	7,1	7,1	7,1	-6,1	-6,1	-0,3
$\Lambda_L$ , град	-66,6	-67,0	-67,6	54,2	54,2	58,1
$U_1$ , км/с	2,7	2,65	2,6	2,6	2,6*	2,60
$\theta_1$ , град	12,28	9,81	5,14	55,68	84,46	~90
$\Phi'$ , град	106,5	112,7	123,2	47,3	7,5	0,2
$A_1$ , град	92,4	93,4	95,3	95,2	140,4	168,8
$U_3$ , км/с	1,286	1,177	1,060	1,060	1,060	1,060
$\Psi_3$ , град	43,1	49,2	59,5	103,1	59,2	58,1
$T_{1,3}$ , ч	12,6	13,6	14,7	14,4	14,3	14,2
$T$ , сут : ч	2 : 20,7	3 : 4,0	3 : 17,0	7 : 20,3	3 : 17,2	3 : 16,5
$\delta U_1$ , м/с	{ 275 -150	{ 195 -115	{ 125 -85	{ 75 -65	{ 85 -70	
$\delta \theta_1$ , град	{ 7,2 -9,2	{ 9,0 -10,0	{ 11,0 -5,0	{ 50 -12,0	{ 9 -8,5	
$\delta A_1$ , град	{ 8,5 -8,5	{ 9,8 -9,6	{ 12,0 -12,0	{ 12,5 -12,5	{ ~100 -75	
$\partial r_\pi / \partial U_1$ , $\frac{\text{км}}{\text{м/с}}$	{ 34,4 -12,7	{ 51,7 -126	{ 84,5 -119	{ 148 -222	{ 141 -171	
$\partial r_\pi / \partial \theta_1$ , $\frac{\text{км}}{\text{град}}$	{ 1974 -1172	{ 1688 -600	{ 1508 -915	{ ~1000 -1524	{ ~3000 -3005	
$\partial r_\pi / \partial A_1$ , $\frac{\text{км}}{\text{град}}$	{ 1570 -1540	{ 1254 -1319	{ 1034 -1125	{ 995 -1083	{ ~150 -163	

к центру Земли. Для вариантов 1—5 приведены также отклонения параметров  $U_1$ ,  $\theta_1$ ,  $A_1$  от их номинальных значений в положительную и отрицательную стороны, которые вызывают отклонения ТВ от центра Земли примерно на величину земного радиуса  $r_\pi = r_0$ .

Как и следовало ожидать [2—1965, § 1.2], с уменьшением начальной скорости  $U_1$  угол  $\theta_1$  вектора скорости с местным горизонтом монотонно уменьшается от  $\theta_1 = 12^\circ,3$  при  $U_1 = 2,7$  км/с до  $\theta_1 = 5^\circ,1$  при  $U_1 = 2,6$  км/с. При

$U_1 = 2,55$  км/с итерации краевой задачи уже не сходились (из-за отсутствия соответствующих решений задачи). Таким образом, минимальная скорость; необходимая для возвращения к Земле из окрестности точки вертикальной посадки, весьма близка к 2,6 км/с.

Что касается полного времени полета  $T$ , то оно, как следовало ожидать, монотонно увеличивается от 70 до 90 час. с уменьшением начальной скорости от 2,7 до 2,6 км/с и почти не зависит от координат точки старта  $\Phi_s$ ,  $\Lambda_s$  и угла  $\theta_1$ . Так, для всех рассматриваемых точек старта при одинаковой начальной скорости  $U_1 = 2,6$  км/с в вариантах 3, 5, 6 времена полета по номинальным траекториям различаются всего лишь на 0,7 часа, т. е. менее чем на 0,8%. Время полета  $T_{1,3}$  в сфере действия тоже, естественно, монотонно увеличивается с уменьшением начальной скорости (табл. 18.1). Соответственно убывает величина  $U_3$  селеноцентрической скорости выхода из СД.

Углы  $\psi$ , в основном определяющие направление скорости выхода  $U_3$ , получились меньше, чем по методу ТСД, причем отличие тем больше, чем больше сам угол  $\psi$ . Объясняется это тем, что СД имеет размер, не малый по сравнению с расстоянием Земля — Луна. Точки 3 выхода из СД имеют тем большую величину  $\eta_3$ , чем меньше скорость  $U_3$  (величина  $\xi_3$  и угол  $\nu_3$  малы). Соответственно, тем больше должен быть повернут к оси  $\xi_3$  вектор  $U_3$ , чтобы результат  $V_3$  его сложения со скоростью Луны — выходная геоцентрическая скорость — был направлен к центру Земли (а не параллельно оси  $\xi$ , как предполагается в методе ТСД).

Отметим, что отличие номинальных характеристик для вариантов 4 и 5, имеющих одну и ту же точку старта и величину начальной скорости, обусловлено тем, что после выхода из СД КА в варианте 5 сразу приближается к Земле по нисходящей траектории, а в варианте 4 сначала удаляется от Земли по восходящей ветви траектории и лишь затем приближается к Земле по нисходящей ветви той же траектории. Соответственно различаются углы  $\psi$ , времена полета и другие параметры.

Результаты расчета отклоненных траекторий в различных видах представлены на рис. 18.1—18.3. На рис. 18.1 представлены соответственно для вариантов 1—5 на плоскости компонент  $C_1$ ,  $C_2$  геоцентрического



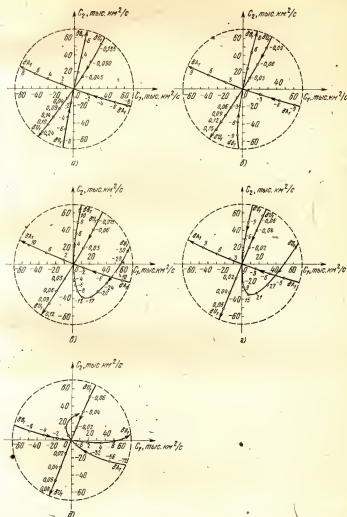


Рис. 18.1. Влияние отклонений величины  $U_1$  или угла возвышения  $\theta$ , или азимута  $A_1$  вектора начальной селеноцентрической скорости на компоненты  $C_1$ ,  $C_2$  геоцентрического кинетического момента траектории возвращения (а, б, в, г, д соответствуют вариантам 1—5 таблицы 18.1).

кинетического момента точки, получающиеся при отклонении одного из начальных параметров  $U_1, \theta_1, A_1$  от номинального значения (отвечающего  $C_1 = C_2 = 0$ ). Такие точки располагаются по двум лучам, отвечающим соответственно положительному и отрицательному отклонениям. Таким образом, влияние изменений трех начальных параметров (величины скорости  $U_1$ , угла возвышения  $\theta_1$  и азимута  $A_1$  вектора скорости) изображается шестью лучами.

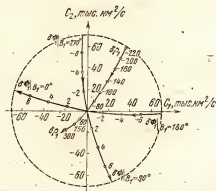


Рис. 18.2. Влияние отклонений модуля  $r_1$  и направления  $\Phi_1$  начального селеноцентрического радиуса (при различных азимутах  $B_1$  смещения начальной точки из номинальной) на компоненты  $C_1$  и  $C_2$  геоцентрического кинетического момента траектории возвращения.

Кроме влияния изменения величины и направления начальной скорости, рассматривается еще влияние изменения положения начальной точки на траектории возвращения (рис. 18.2). Варьируется величина начального селеноцентрического радиуса-вектора  $r_1$ , а также при постоянном модуле  $r_1$  даются отклонения направления вектора  $r_1$  на различные углы  $\delta\Phi$  в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, определяемых азимутами  $B_1 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ . Таким образом, шестью лучами на рис. 18.2 представлено влияние изменения трех параметров  $r_1, \Phi_1, B_1$ .

На рис. 18.1, 18.2 отклонения  $\delta A_1, \delta\theta_1, \delta\Phi_1, \delta B_1$  даны в градусах,  $\delta U_1$  — в км/с,  $\delta r_1$  — в км. Точки штрихового круга  $C = 70$  тыс. км/с примерно соответствуют траекто-

риям, касающимся атмосферы Земли. Постоянство величины  $C$  для таких траекторий вызвано тем, что для рассматриваемых траекторий скорость у поверхности Земли близка к параболической  $V_n = 11$  км/с и соответственно  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  близко к  $r_0 V_n = 70\,000$  км<sup>2</sup>/с.

Перигейные расстояния  $r_n$  траекторий монотонно увеличиваются от нуля до  $r_0$  при движении соответствующих им на плоскости  $C_1 C_2$  точек по лучам от середины к концу луча. Хордовые производные перигейных расстояний по исходным данным в конечных точках лучей (т. е. при  $r_n = r_0$ ) могут характеризовать влияние разброса начальных данных для траекторий пологого возвращения в земную атмосферу. Такие производные от  $r_n$  (по параметрам  $U_1, \theta_1, A_1$ ) приведены в шести последних строках табл. 18.1, раздельно для положительных и отрицательных лучей (отклонений исходных данных).

Как и следовало ожидать, с уменьшением начальной скорости  $U_1$  влияние разброса по скорости возрастает (табл. 18.1), а влияние разброса по направлению вектора скорости убывает, хотя и в меньшей степени. Это относится как к задаче возвращения от Луны на Землю в целом, так и к задаче попадания в заданный коридор по высоте условного перигея. Положительные ошибки в скорости сказываются меньше, чем отрицательные, так как номинальная величина скорости близка к минимально допустимой. Для начальной скорости  $U_1 = 2,6$  км/с при старте из окрестности точки вертикальной посадки (вариант 3) предельно допустимы одиночные ошибки: по скорости  $+125$  и  $-85$  м/с, по направлению вектора скорости — порядка  $+10^\circ$  и  $-5^\circ$ .

Для варианта 4 оказываются допустимыми весьма большие положительные ошибки  $\delta\theta_1$  (порядка  $50^\circ$ ). Дело в том, что этот вариант соответствует полету по восходящим относительно Земли траекториям, которые с ростом  $\theta_1$  непрерывно переходят в нисходящие траектории.

Для траектории варианта 5, начинающейся почти вертикально ( $\theta_1 = 84^\circ, 5$ ), влияние ошибок по азимуту, естественно, оказывается несущественным. Диапазон предельных отклонений в боковом направлении, исчисляемый по дуге большого круга, составляет около  $16^\circ$  (от  $-9^\circ$  до  $+7^\circ$ ).



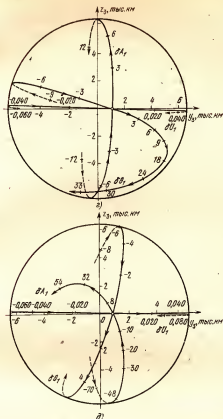


Рис. 18.3. Смещения конца траектории возвращения из номинальной точки на поверхности Земли, соответствующие отклонениям на рис. 18.1.

Оказалось, что для варианта 1 предельное отрицательное  $\delta r_1 = -220$  км, а положительное предельное отклонение примерно на порядок больше. Предельные углы  $\delta \Phi_1$  оказались порядка  $8^\circ$ , что соответствует отклонениям точки старта от номинальной на лунной поверхности порядка 250 км. Таким образом, относительно большие изменения положения начальной точки несущественно сказываются на траекториях возвращения.

Заметим, что если на рис. 18.1 для варианта 1 в плоскости  $C_1C_2$  все лучи почти прямые, то для варианта 2

уже видно искривление отрицательного  $\theta_1$ -луча, а для варианта 3 это искривление очень сильное и предельное значение  $\delta\theta_1 \approx -30^\circ$ . Объясняется это так же, как объяснялись большие положительные пределы  $\delta\theta_1$  в варианте 4: при старте из окрестности точки вертикальной посадки рост по модулю отрицательных углов  $\theta_1$  отвечает постепенному переходу траекторий в область второго типа (см. вариант 4). Реально же такие полеты не осуществимы, так как при  $\delta\theta_1 < -5^\circ, 14$  соответствующая траектория пересекает поверхность Луны.

Аналогично при  $U_1 = 2,65$  км/с имеем  $\delta\theta_1 < -10^\circ$  (см. табл. 18.1).

На рис. 18.3 представлены в геоцентрических осях координат  $m_c y_3 z_3$ , параллельных осям  $m_L y_3 z_3$ , лучи на земной сфере, соответствующие лучам на рис. 18.1. Видим, что почти прямолинейным лучам на плоскости  $C_1 C_2$  отвечают лучи на земной сфере, близкие к дугам большого круга. Отклонения от дуг большого круга вызваны искривлением соответствующего луча на плоскости  $C_1 C_2$ . Видно, что рассматриваемые лучи охватывают Землю почти со всех сторон.

### § 18.3. Расчет и анализ отклоненных траекторий возвращения с орбиты ИСЛ к Земле

Расчет проводился методом ИВ на ЭВМ. Предполагалось, что селеноцентрическая орбита ИСЛ задается ее элементами  $\Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0$  в селеноцентрической системе координат  $m_L r^0 m^0 b^0$ , где  $r^0$  — направление геоцентрического радиуса центра Луны, ось  $m^0$  направлена из центра Луны в плоскости лунной орбиты примерно по скорости Луны, а ось  $b^0$  составляет с ортогональными направлениями  $r^0, m^0$  правую тройку (рис. 18.4); что ТВ получается в результате мгновенного сообщения спутнику дополнительного скоростного импульса; что при сообщении импульса угол  $\theta_1$  возвышения вектора скорости над местным горизонтом не изменяется, а азимут результирующего вектора скорости может отличаться от азимута исходного вектора скорости на угол  $I$ .

Перед расчетом отклоненных траекторий находилась траектория попадания в центр Земли (или в заданную точку земной поверхности) путем решения краевой за-

дачи, как в § 17.1, в результате соответствующего изменения величины  $A$  и момента  $t_1$  сообщения импульса. Очевидно, изменение момента  $t_1$  сообщения импульса вызовет изменение и поворот селеноцентрического участка

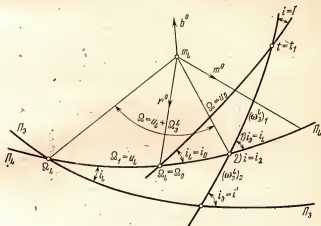


Рис. 18.4. Пересчет угловых элементов селеноцентрического движения при переходе с орбиты ИСЛ на траекторию возвращения к Земле.

вокруг нормали к плоскости орбиты спутника, так что изменение  $t_1$  при решении краевой задачи может использоваться вместо изменения угла возвышения  $\theta_1$ , использованного в § 18.2.

Расчет начальных данных проводится в два этапа. Сначала по заданным величинам  $I$ ,  $i_0$ ,  $\Omega_0$  и дополнительно заданной величине  $u_0(t_1) = \omega_0 + v_0(t_1)$  в системе  $r^0, m^0, b^0$  находятся (рис. 18.4) элементы  $i_\lambda$ ,  $\omega_\lambda$ ,  $\Omega_\lambda$ , определяющие новую плоскость орбиты ИСЛ и новый аргумент широты  $u_\lambda$  начальной точки на орбите (принимается только для расчета, что спутник сначала меняет (на величину  $I$ ) азимут своего вектора скорости, а затем его величину) с помощью формул п. 2 Приложения 2, в которых полагаем (рис. 18.4)

$$i_L = i_0, \quad \Omega_0 = u_0, \quad i = I, \quad \Omega_L = \Omega_0, \quad (3.1)$$

и получаем  $i_3 = i_\lambda$ ,  $(\omega_3^L)_1 = u_\lambda$ ,  $\Omega_3^L = \Omega_\lambda - \Omega_0$ , т. е.  $\Omega_\lambda = \Omega_3$ . При этом  $\omega_\lambda = u_\lambda - v_0(t_1)$ . Затем найденные

элементы используются для вычисления угловых элементов орбиты ИСЛ  $i'$ ,  $\omega'_\lambda$ ,  $\Omega'$  в селеноцентрической геоэкуаториальной системе координат  $m_L x_0 y_0 z_0$ . Используются формулы того же п. 2 Приложения 2, в которых полагаем

$$i_L = i_L, \quad \Omega = u_L + \Omega_\omega^L, \quad i = i_\lambda, \quad \Omega_L = \Omega_L. \quad (3.2)$$

Получаем  $i' = i_\omega$ ,  $\Omega' = \Omega_\omega$ ,  $\omega'_\lambda = \omega_\lambda + (\omega_\omega^L)_2$  (рис. 18.4). Добавляя к найденным элементам  $p_\lambda = p_0$ ,  $e_\lambda = e_0$ ,  $\tau_\lambda = \tau_0$ , получим полную систему элементов для повернутой орбиты спутника Луны.

По этим элементам и моменту  $t_1$  находим декартовы координаты селеноцентрического радиуса-вектора спутника  $\rho(t_1)$  и компоненты его скорости  $\dot{\rho}(t_1)$ . В качестве начальных данных ТВ, по которым находятся элементы  $p'$ ,  $e'$ ,  $\omega'$ ,  $\tau'$  гиперболы возвращения, берутся векторы

$$\rho_1 = \rho(t_1 - 0), \quad \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}(t_1 - 0) + \Delta U \frac{\dot{\rho}(t_1 - 0)}{|\dot{\rho}(t_1 - 0)|}. \quad (3.3)$$

(Для этой гиперболы элементы  $i'$ ,  $\Omega'$  будут те же, что и для ИСЛ.) Здесь  $\Delta U$  — импульс, затраченный на увеличение модуля скорости. Энергетические затраты на поворот плоскости орбиты исходного спутника не рассматривались, так как они зависят от выбора исходной орбиты и при оптимальном выборе обращаются в нуль. В расчетах принималось  $\Delta U = 1$  км/с.

Варьирование величины начальной скорости производится путем замены в последней формуле величины  $\Delta U$  на  $\Delta U + \delta U$ . Аналогично варьируется азимут  $I$  вектора скорости: вместо  $I$  берется  $I + \delta I$  в формулах п. 2 Приложения 2. При варьировании модуля начального радиуса используется  $\rho = \rho_1 + \delta \rho_1 \frac{\rho_1}{\rho_1}$  вместо  $\rho_1$  в первой из формул (3.3).

Варьирование начального положения в направлении касательной к орбите спутника производится непосредственно путем варьирования момента  $t_1$  около значения  $t_1^N$ , отвечающего номинальной траектории. Это варьирование позволяет судить о точности, с которой следует выдерживать момент старта с орбиты спутника. Сложнее



обстоит дело с отклонениями угла  $\theta_1$  вектора скорости с трансверсалью и положения спутника в боковом направлении.

Сначала для номинальной траектории определяются единичные векторы бокового направления  $\mathbf{b} = \rho_1 \times \mathbf{U}_1 / |\rho_1 \times \mathbf{U}_1|$  ( $U_1 = |\rho_1|$ ) и трансверсального  $\mathbf{m} = \mathbf{b} \times \rho_1 / \rho_1$ .

Затем находятся радиальная и трансверсальная компоненты вектора начальной скорости  $U_r = (\dot{\rho}_1 \cdot \rho_1) / \rho_1$ ,  $U_\tau = (\mathbf{m} \cdot \dot{\rho}_1)$ . Тогда угол возвышения  $\theta_1$  определится в  $\pm I$  четверти формулой  $\operatorname{tg} \theta_1 = U_r / U_\tau$ . При замене угла  $\theta_1$  на  $\theta_1 + \delta\theta_1$  получим  $\tilde{U}_1 = m U_1 \cos \tilde{\theta}_1 + \rho_1 U_1 \sin \tilde{\theta}_1 / \rho_1$ . При варьировании начального положения в боковом направлении на расстояние  $\delta s_1$  получим  $\tilde{\rho}_1 = \rho_1 + \mathbf{b} \delta s_1$ .

Вычисление номинальной и отклоненных ТВ производилось с помощью соотношений метода ИВ. Расчет производился для эллиптической орбиты Луны при возвращении к Земле с четырех круговых орбит ИСЛ. Соответственно полагалось  $e = 0$  и  $t_0 = t_1$ . В силу того, что  $e_0 = 0$ , имеем после разгона аргумент широты  $u' = \omega'$ .

Результаты расчетов номинальных и отклоненных траекторий представлены в табл. 18.2, аналогичной табл. 18.1 (за номинальные, как и в § 18.2, приняты ТВ, проходящие через центр Земли).

Величины  $\delta U_1$ ,  $\delta\theta_1$ ,  $\delta I$ ,  $\delta t_1$ ,  $\delta\rho_1$ ,  $\delta s_1$  в этой таблице являются предельными в том смысле, что отклоненная траектория касается поверхности Земли, т. е.  $r_\pi = r_0$ .

Влияние изменения азимута вектора скорости на изменение времени полета заметно меньше, чем влияние угла возвышения вектора скорости, поскольку соответствующее отклонение происходит почти по нормали к плоскости лунной орбиты.

Варианты расчета выбирались из соображений, изложенных в гл. 13. При этом плоскости орбит ИСЛ в вариантах 1 и 2 близки к плоскости орбиты Луны, а в вариантах 3 и 4 почти ортогональны этой плоскости. Направления движения КА по орбите ИСЛ в вариантах 1 и 2, а также в 3 и 4 противоположны.

В варианте 1 орбита ИСЛ получается после торможения из траектории Земля — Луна, проходящей перед Луной, в то время как в варианте 2 соответствующая

траектория перехода на орбиту ИСЛ проходит позади Луны. При несрабатывании тормозной установки в варианте 1 КА несколько тормозится возмущениями от Луны и снова сближается с Землей, а в варианте 2 уходит в бесконечность, разгоняясь возмущениями от Луны.

Таблица 18.2

Характеристики траекторий возвращения с орбит ИСЛ

Параметр	Варианты			
	1	2	3	4
$t_0$ , град	170	10	90	80
$p_0$ , км	1836	1836	1836	1800
$p'$ , км	4772	4768	4772	4662
$e'$	1,599	1,597	1,599	1,580
$T_{1,2}$ , ч	12,89	12,91	12,89	12,95
$\delta U_1$ , м/с	$\begin{cases} 78 \\ -73 \end{cases}$	$\begin{cases} 325 \\ -155 \end{cases}$	$\begin{cases} 105 \\ -95 \end{cases}$	$\begin{cases} 110 \\ -95 \end{cases}$
$\delta \theta_1$ , град	$\begin{cases} 9,2 \\ -6,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 7,2 \\ -9,6 \end{cases}$	$\pm 5,0$	$\pm 5,2$
$\delta I$ , град	$\pm 10,5$	$\pm 10,5$	$\begin{cases} 13,5 \\ -19,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 17 \\ -13 \end{cases}$
$\delta t_1$ , с	$\begin{cases} 225 \\ -295 \end{cases}$	$\begin{cases} 300 \\ -230 \end{cases}$	$\pm 165$	$\pm 160$
$\delta p_1$ , км	$\begin{cases} 140 \\ -115 \end{cases}$	$\begin{cases} 1000 \\ -250 \end{cases}$	$\begin{cases} 185 \\ -145 \end{cases}$	$\begin{cases} 190 \\ -140 \end{cases}$
$\delta s_1$ , км	$\begin{cases} 400 \\ -410 \end{cases}$	$\pm 410$	$\begin{cases} 460 \\ -1000 \end{cases}$	$\begin{cases} 1000 \\ -500 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial U_1}$ , км/м/с	$\begin{cases} 140,4 \\ -167,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 20 \\ -93 \end{cases}$	$\begin{cases} 100 \\ -133,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 103 \\ -127,4 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial \theta_1}$ , км/град	$\begin{cases} 1120 \\ -2025 \end{cases}$	$\begin{cases} 1870 \\ -1115 \end{cases}$	$\begin{cases} 2420 \\ -2470 \end{cases}$	$\begin{cases} 2360 \\ -2300 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial I}$ , км/град	$\begin{cases} 1271 \\ -1270 \end{cases}$	$\begin{cases} 1263 \\ -1200 \end{cases}$	$\begin{cases} 894 \\ -505 \end{cases}$	$\begin{cases} 500 \\ -970 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial t_1}$ , км/с	$\begin{cases} 63,3 \\ -35,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 34,15 \\ -65 \end{cases}$	$\pm 70,7$	$\begin{cases} 72,5 \\ -74,1 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial p_1}$	$\begin{cases} 80,4 \\ -129,1 \end{cases}$	$\begin{cases} - \\ -93,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 60,5 \\ -100 \end{cases}$	$\begin{cases} 55,6 \\ -88,5 \end{cases}$
$\frac{\partial r_{\pi}}{\partial s_1}$	$\begin{cases} 35,6 \\ -32,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 29,5 \\ -25,9 \end{cases}$	$\begin{cases} 36 \\ -12 \end{cases}$	$\begin{cases} 16,3 \\ -34,8 \end{cases}$

Из табл. 18.2 видно, что по влиянию ошибок в угле возвышения и азимуте, а также ошибок в боковом направлении и во времени старта варианты 1 и 2 близки. Однако ошибки в начальной скорости в варианте 2 ска-

зываются значительно слабее, чем в варианте 1. Объясняется это следующим образом. В обоих вариантах при положительной ошибке  $\delta U_1$  селеноцентрическая траектория «распрямляется», а скорость движения по ней и, в частности, величина скорости  $U_3$  выхода из СД увеличивается, поворачиваясь против направления обхода Луны. При этом в варианте 2 уменьшение трансверсальной компоненты геоцентрической выходной скорости вследствие поворота направления вектора  $U_3$  частично компенсируется ее увеличением вследствие увеличения модуля вектора  $U_3$ . В варианте 1 вместо этой компенсации происходит декомпенсация, т. е. сложение уменьшений трансверсальной компоненты от изменения направления и величины вектора  $U_3$ , так что суммарное уменьшение трансверсальной компоненты  $V_{3\tau}$  геоцентрической скорости при гораздо меньших  $\delta U_1 < 0$  приводит к пролету мимо Земли. При уменьшении  $U_1$  компенсация в варианте 2 и декомпенсация в варианте 1 сохраняются.

Той же причиной объясняется отличие во влиянии разброса начального селеноцентрического радиуса, которое сказывается главным образом через изменение избытка начальной скорости над местной параболической скоростью.

Варианты 3 и 4 по влиянию разброса  $\delta U_1$ ,  $\delta t_1$ ,  $\delta r_1$  занимают промежуточное положение между вариантами 1 и 2; диапазоны допустимых отклонений по  $\delta \theta_1$  в полтора раза уже, а по  $\delta I$  — в полтора раза шире, чем в вариантах 1 и 2. Влияние боковых отклонений оказывается менее существенным, чем радиальных. В последних шести строках табл. 18.2 приведены производные перигейных расстояний по исходным данным. Эти производные позволяют оценить требования к точности реализации траектории пологого возвращения КА в атмосферу Земли с орбиты ИСЛ.

Заметим, что влияние малых изменений начальных данных на ТВ с поверхности Луны и с орбиты ИСЛ имеет некоторые общие черты. В частности, изменения полного времени полета при одинаковом модуле приращения вектора выходной селеноцентрической скорости больше для случаев изменения направления этой скорости, чем для случая изменения модуля этой скорости. Объясняется это тем, что направление этой скорости

ближе к геоцентрической трансверсали, чем к радиусу-вектору для рассматриваемых величин этой скорости (рис. 13.2). Соответственно, направление вектора приращения этой скорости при изменении угла возвышения ближе к радиусу, чем к трансверсали, а именно радиальная компонента в основном влияет на время полета до Земли.

Влияние изменения угла  $A_1$  на изменение времени полета заметно меньше, чем влияние изменений угла  $\theta_1$ , поскольку соответствующее отклонение происходит почти по нормали к плоскости лунной орбиты.

## РАЗДЕЛ IV

### ТРАЕКТОРИИ ОБЛЕТА ЛУНЫ

#### Глава 19

#### ОБЩИЙ КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ОБЛЕТА ЛУНЫ

**Определение 1.** *Траекторией облета Луны* или *облетной* называется траектория, начинающаяся (или кончающаяся) на геоцентрическом расстоянии  $r_1, r_n \leq r_T \ll r_L$  и на том же обороте вокруг Земли проходящая через сферу действия Луны.

**Определение 2.** *Траекторией облета Луны с возвращением к Земле* называется облетная траектория, концы которой отстоят от Земли на расстояния

$$r_1 \leq r_T, \quad r_n \leq r_T, \quad r_T \ll r_L. \quad (1.1)$$

Здесь  $r_T$  — заданный предел, например, геоцентрический радиус верхних слоев атмосферы или низкой круговой орбиты ИСЗ, а  $r_L$  — геоцентрический радиус Луны. В расчетах фиксируем  $r_T$  высотой 200 км над земной поверхностью:  $r_T = r_0 + 200$  км. При этом может рассматриваться возвращение, как и в разделе III, не только к Земле в целом, но и в заданный район, т. е. по заданной трассе на земной поверхности.

Напомним, что согласно § 3.4 облетная траектория является траекторией сближения, а потому разбивается границей сферы действия Луны на три участка: участок  $\Gamma_{1,2}$  полета к сфере действия, участок  $\gamma_{2,3}$  полета внутри сферы действия и участок  $\Gamma_{3,n}$  полета от сферы действия.

Для построения одной траектории облета Луны надо построить две подходящие более частные геоцентрические ТС:  $\Gamma_{1,2}$  достижения с Земли СД Луны и траекторию  $\Gamma_{3,n}$  полета от СД. Эти траектории должны быть сопряжены участком  $\gamma_{2,3}$  у Луны в одну траекторию облета, чтобы траектория  $\gamma_{2,3}$  была продолжением траектории  $\Gamma_{1,2}$ , а траектория  $\Gamma_{3,n}$  продолжала траекторию  $\gamma_{2,3}$ .

Если при этом траектория  $\Gamma_{3,k}$  есть ТВ, то суммарная траектория  $\Gamma_2 = \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_{2,3} \cup \Gamma_{3,k}$  будет траекторией облета Луны с возвращением к Земле. Такой путь получения облетных траекторий представляется теперь естественным, так как условия сопряженности даны в разделе I (гл. 5), траектории достижения Луны уже рассмотрены в разделе II, а траектории возвращения от Луны к Земле — в разделе III. В данном разделе приближенные и точные расчетные методы применяются к решению таких траекторных задач, как облет Луны с возвращением к Земле в целом, облет с пологим возвращением в земную атмосферу, облет с целью облегчения маневров перехода на высокоэнергетические орбиты ИСЗ или на траектории полета к планетам.

### § 19.1. Постановка задачи облета Луны с различными целями

На возможность облета Луны с последующим возвращением к Земле указывал еще К. Э. Циолковский [1—1913]. С пятидесятых годов изучению траекторий облета уделяется много внимания как советскими, так и зарубежными учеными. Первая траектория облета была реализована в 1959 г., когда советская автоматическая станция «Луна-3», сфотографировав обратную сторону Луны, возвратилась к Земле (на расстояние  $\sim 40$  тыс. км), передавая информацию. В настоящее время пространственные траектории облета с возвращением к Земле исследованы полностью в интересных диапазонах всех определяющих параметров. Воздействие Луны на КА, проходящий через ее СД, изменяет все элементы геоцентрического движения, т. е. энергию и вектор кинетического момента, аргумент широты и момент прохождения перигея.

Вычисление облетных траекторий труднее, чем более простых траекторий достижения Луны (раздел II) и траекторий возвращения от Луны к Земле (раздел III). Для облетных траекторий имеет место большая чувствительность к изменению начальных данных. Как показали расчеты (см. § 6.2), незначительные изменения геоцентрических координат точки входа в сферу действия Луны (при фиксированной геоцентрической энергии) могут вызвать поворот плоскости геоцентрической траектории

возвращения на  $180^\circ$  или настолько изменить условия облета, что КА после выхода из СД улетит в «бесконечность». Поэтому особенно затруднено определение начальных приближений значений аргументов в краевой задаче поиска облетных траекторий заданного назначения.

Перейдем к постановке траекторной задачи облета с возвращением к Земле. Чтобы любую ТС определить однозначно, необходимо, как показывалось в гл. 5, задать начальные геоцентрические энергию  $h_1$ , кинетический момент  $C_1$ , наклонение  $i_1$  (к плоскости лунной орбиты), кинетический момент  $C_k$  и наклонение  $i_k$  в конце траектории облета, момент  $t_n$  прохождения периселения и знаки  $s_2$  и  $s_3$  радиальной входной и выходной (на СД) геоцентрических скоростей. При этом задание  $s_2$  определяет ветвь геоцентрического конического сечения, на которой происходит сближение с Луной: при  $s_2 > 0$  — восходящую ветвь, при  $s_2 < 0$  — нисходящую. Сближение на нисходящей ветви возможно лишь после прохождения апогея, т. е. лишь при  $h_1 < 0$ .

Задание  $s_3$  определяет ветвь конического сечения, по которому происходит движение после сближения: при  $s_3 > 0$  — восходящую ветвь, при  $s_3 < 0$  — нисходящую. При выходе из СД на восходящую ветвь возвращение к Земле возможно, очевидно, лишь после прохождения апогея, т. е. лишь при  $h_k < 0$ . Задание пары  $(s_2, s_3)$  вместе с  $h_1, C_1, i_1, t_n, C_k, i_k$  определяет число (0, 1 или 2) апогеев облетной траектории вне СД. Поэтому при заданном полном времени облета задание  $(s_2, s_3)$  приближенно определяет и отношение  $T_{1,2}/T_{3,k}$  времен полета к Луне и от Луны.

Вместо перечисленного набора данных можно задавать эквивалентные наборы. Например, если переход на облетную траекторию должен происходить с орбиты ИСЗ, заданной элементами  $i_1, p_1, e_1, \omega_1, u_1$ , а возвращение должно происходить в атмосферу над заданной на Земле трассой, причем полого, то после выбора пары  $(s_2, s_3)$  можно задать: вместо  $h_1$  — целое число  $n$  суток облета, вместо  $C_1$  и  $C_k$  — радиусы  $r_n^{(1)}$  и  $r_k^{(k)}$  перигеев в начале и конце облета, вместо  $i_1$  и  $i_k$  — наклонения  $i_s^{(1)} = i_1$  и  $i_s^{(k)}$  к экватору орбиты старта и трассы возвращения, а вместо  $t_n$  — стартовый полувиток орбиты ИСЗ и усло-

ние равенства географических долгот перигея  $r_{\pi}^{(k)}$  и той точки на заданной трассе, которая имеет географическую широту перигея  $r_{\pi}^{(k)}$ . При этом момент  $t_{\mu}$  может быть однозначно найден с нужной точностью из решения краевой задачи.

Подробнее анализ различных задач облета Луны с возвращением к Земле проводится ниже: приближенный — в гл. 20, точный — в гл. 21.

При полете к планетам Солнечной системы можно использовать приращение  $V_3 - V_2$  геоцентрической скорости на облетной траектории. При этом важно получить такие величину и направление вектора  $V_3$  скорости выхода из СД Луны, чтобы, при прочих равных условиях, для достижения планеты требовались бы меньшие затраты характеристической скорости, чем без использования облета Луны. При этом предполагается, что необходимая эклиптическая долгота вектора геоцентрической скорости на «бесконечности» обеспечивается выбором времени сближения с Луной внутри сидерического месяца. Эта задача до сих пор в общем виде не решена. Поэтому представляет определенный интерес более простая задача (которая является обобщением плоской задачи гл. 6 на пространственный случай): выявить такие условия облета Луны, при которых увеличение геоцентрической энергии КА будет наибольшим при заданных начальных геоцентрических радиусе  $r_{\pi}^{(1)}$  и наклонении  $i_1$  к плоскости лунной орбиты. Эта задача подробно рассматривается в гл. 22.

Можно использовать облет Луны также для облегчения выведения КА на высокоэнергетические орбиты ИСЗ. Например, можно поставить такую задачу:

Пусть заданы начальная орбита ИСЗ набором элементов  $y_{\gamma}^{(1)} = (i_{\gamma}, p_{\gamma}, e_{\gamma}, \omega_{\gamma}, u_{\gamma})$  и конечная орбита ИСЗ — другим набором  $y_{\gamma}^{(k)} = (i_k, p_k, e_k, \omega_k, u_k)$ . Требуется перевести КА с орбиты  $y_{\gamma}^{(1)}$  на орбиту  $y_{\gamma}^{(k)}$ , комбинируя импульсные переходы с облетом Луны. Если не использовать облет Луны, то маневр перехода между орбитами ИСЗ может требовать иногда относительно больших энергетических затрат. Например, обычный двухимпульсный переход с круговой орбиты  $y_{\gamma}$  с элементами



$p_1 = 6570$  км,  $i_1 = 50^\circ$  на геостационарную орбиту  $y_1^{(k)}$  (с  $p_k = 42\,164$  км,  $e_k = i_k = 0$ ) требует затрат характеристической скорости, примерно на  $1600$  м/с больших, чем затраты, необходимые для достижения Луны с орбиты  $y_1$ .

При таких больших наклонениях  $i_1$  оказывается выгодным для перехода на геостационарную орбиту использовать близкий облет Луны [3—1971] (между двумя импульсами).

Поскольку в результате облета Луны могут существенно изменяться все элементы геоцентрического движения, то может оказаться выгодным использование облета для облегчения перехода  $y_1 \rightarrow y_1^{(k)}$  в самых разнообразных случаях (в том числе и в случае, когда  $y_1 = y_1^{(k)}$ ).

Интересно сравнить энергетические затраты импульсных переходов без использования и с использованием облета Луны, предполагая, что допускается не более двух импульсов. Еще интереснее оптимизация перелета КА между заданными орбитами ИСЗ по суммарным затратам характеристической скорости без ограничения числа включений двигателя, как с использованием, так и без использования облета Луны. Несмотря на достигнутые за последние годы успехи в оптимизации переходов между орбитами, эти задачи еще не решены. Поэтому представляет интерес приближенный (в рамках метода ТСД) анализ геоцентрических орбит, которые можно получить, используя лишь облет Луны (т. е. без импульсов на участках движения в СД и от СД). Этот анализ проводится в гл. 22.

## § 19.2. Эволюция пучка начинающихся у Земли облетных траекторий с изменением энергии

Основной особенностью облетных траекторий является выявленная в гл. 3 сильная гиперболичность селеноцентрического движения. Каковы бы ни были около Земли величина и направление начальной геоцентрической скорости  $V_1$  КА, его вход в СД Луны происходит с селеноцентрической скоростью  $U$ , вдвое или более превосходящей селеноцентрическую параболическую скорость  $U_n$  ( $U_n \approx 0,38$  км/с) на границе  $\rho = \rho_*$  СД. Как по-

казано в § 3.4, причиной этого факта является малость начального геоцентрического радиуса  $r_1$  по сравнению с расстоянием  $r_L$ . Земля — Луна:  $r_1 \ll r_L$ . Как и в общем случае (см. § 4.3), если фиксированы наклонение  $i_1$  к плоскости лунной орбиты и величина перигейного радиуса  $r_{\pi}^{(1)} \leq r_1$  и если элементы  $\omega_1, \Omega_1, \tau_1$  меняются так, чтобы вход КА в СД имел место в один и тот же момент  $t_2$  (в любой точке входной области на СД), то зависимость скорости  $U_2$  от начальной полной энергии  $h_1$  является монотонно возрастающей (рис. 4.5). Однако с убыванием энергии  $h_1$  траектория КА перестает достигать СД Луны раньше, чем величина  $U_2$  уменьшится до  $2U_{\pi}$ . На этом эволюция с изменением  $h_1$  пучка облетных траекторий с фиксированными  $i_1, r_{\pi}^{(1)} \ll r_L$  заканчивается. Проследим эту эволюцию подробнее, чтобы указать значения параметров, при которых происходят качественные изменения рассматриваемого пучка траекторий. Это проще всего сделать методом ТСД, рассматривая, как и в § 4.3, эволюцию с изменением  $h_1$  соответствующих «скоростных» многообразий — многообразий выходных скоростей: селеноцентрических  $U_3$  и геоцентрических  $V_3$ .

Фиксируем величину начального радиуса  $r_1 = r_{\gamma}$ . Тогда величина местной параболической скорости  $V_{\pi}(r_1) = \sqrt{2\mu_g/r_1}$  будет фиксирована, и начальная полная энергия  $h_1$  будет однозначно связана с избытком  $\Delta V_1 = V_1 - V_{\pi}$  начальной скорости над  $V_{\pi}(r_1)$ . По определению

$$h_1 = V_1^2 - V_{\pi}^2 = \Delta V_1 (V_1 + V_{\pi}) = \Delta V_1 (2V_{\pi} + \Delta V_1) \quad (2.1)$$

получим  $h_1(\Delta V_1)$ . Обратно, подставляя  $V_1 = \sqrt{V_{\pi}^2 + h_1}$  в определение  $\Delta V_1$ , получим

$$\Delta V_1 = \frac{h_1}{\sqrt{V_{\pi}^2 + h_1} + V_{\pi}} = \frac{h_1}{V_{\pi}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{h_1}{V_{\pi}^2}}}. \quad (2.2)$$

Разложением в ряд получим

$$\Delta V_1 = \frac{h_1}{2V_{\pi}} \left[ 1 + \frac{h_1}{4V_{\pi}^2} - \frac{1}{16} \left( \frac{h_1}{V_{\pi}^2} \right)^2 + \dots \right]^{-1}, \quad (2.3)$$

что для  $h_1/4V_{\pi}^2 \ll 1$  дает

$$\Delta V_1 \approx \frac{h_1}{2V_{\pi}(r_1)} \left[ 1 - \frac{h_1}{4V_{\pi}^2(r_1)} \right]. \quad (2.4)$$

При гиперболических начальных скоростях облет Луны возможен лишь на восходящей ветви траектории. При  $r_{\pi} = r_1$  и  $\Delta V_1 = 0,5$  км/с имеем (рис. 4.5): угол скорости  $V_2$  со входным геоцентрическим радиусом  $\alpha_2 = 3^\circ$ ,  $V_2 = 3,64$  км/с; для наклонений  $i_1 = 0$  и  $i_1 = \pi$  имеем соответственно значения

$$U_2^+ = 3,73 \text{ км/с и } U_2^- = 3,83 \text{ км/с.} \quad (2.5)$$

Если Луну считать материальной точкой, то многообразия скоростей  $U_2$  и  $V_3$  для всех углов  $i_1$  практически совпадают соответственно с  $U_3$ -сферой и  $V_3$ -сферой (как на рис. 4.9). Все выходные геоцентрические скорости  $V_3$  сильно гиперболические.

С уменьшением начальной скорости минимальные геоцентрические выходные скорости  $V_3$  становятся эллиптическими, хотя входные скорости еще гиперболические. Впервые это случится при  $\Delta V_1 = 0,15$  км/с для  $r_{\pi}^{(1)} = r_{\gamma}$  и наклонения  $i_1 = 0$ . С дальнейшим убыванием начальной скорости эллиптические выходные скорости  $V_3$  появляются и для  $r_{\pi}^{(1)} < r_{\gamma}$ ,  $|i_1| > 0$ . Для угла  $|i_1| = 180^\circ$ , при  $r_{\pi}^{(1)} = r_{\gamma}$ , они появляются только при  $\Delta V_1 = 0,144$  км/с.

При переходе начальной скорости  $V_1$  через параболическую  $V_{\pi}(r_1)$  становится возможным сближение на нисходящей ветви сразу для всех значений  $i_1$  и  $r_{\pi}^{(1)} = r_{\gamma}$ . При  $V_1 = V_{\pi}$  и  $r_{\pi} = r_1$  имеем (рис. 4.9)

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0, \quad V_2 = 1,44 \text{ км/с, } \alpha_2 = 7^\circ, 5, \\ U_2 &= 1,65 \text{ км/с, } U_3 = 1,87 \text{ км/с.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Область эллиптических геоцентрических выходных скоростей (лежит выше горизонтального малого круга, проходящего через точки  $O_1$ ;  $O_1'$ ) занимает на  $V_3$ -сфере больше половины направлений (рис. 4.9). Имеем максимальные скорости  $V_3^{(M)+} = 2,67$  км/с,  $V_3^{(M)-} = 2,9$  км/с и минимальные  $V_3^{(m)+} = 0,63$  км/с;  $V_3^{(m)-} = 0,83$  км/с. (Знаки «+» и «-» соответствуют  $i_1 = 0$  и  $i_1 = \pi$ .)

Когда с уменьшением начальной скорости при  $r_{\pi}^{(1)} = r_{\gamma}$  и  $i_1 = 0$  селеноцентрическая входная скорость уменьшится до скорости Луны  $U_2 = V_L$ , то появится нулевая выходная геоцентрическая скорость (рис. 4.12). Соответствующие значения  $\Delta V_1 = \Delta V_1^* = -0,080$  км/с,

$$V_3^{(m)} = 0, \quad V_3^{(M)} = 2V_L \approx 2,05 \text{ км/с}, \quad V_2 \approx 0,6 \text{ км/с},$$

$$\alpha_2 \approx 18^\circ, 4. \quad (2.7)$$

Вспомним, что не всякому вектору на  $V_3$ -сфере может отвечать действительная траектория КА, поскольку Луна — не точка, а сфера радиуса  $\rho_L$ , и траектории, для которых радиус периселения  $\rho_{\pi} < \rho_L$ , не могут быть реализованы. Для этих траекторий угол  $\alpha$  вектора выходной селеноцентрической скорости  $U_3$  с вектором  $U_2$  входной селеноцентрической скорости больше критического, отвечающего траектории, касающейся сферы  $\rho = \rho_L$ .

Угол  $\alpha_{\text{кас}}$  и другие параметры траекторий, касающихся сферы  $\rho = \rho_L$ , были представлены на рис. 4.10. Векторы  $U_3$  и  $V_3$  практически реализуемых траекторий соответственно образуют в пространстве скоростей конусы:  $K_U$  — прямой круговой (с осью  $U_3|_{\alpha=0} = U_2$  и раствором  $\alpha = \alpha_{\text{кас}}$ ) и  $K_V$  — косой, получающийся из  $K_U$  смещением концов его векторов  $U_3$  на вектор  $V_L(t_3)$ . Поэтому на  $U_3$ -сфере и  $V_3$ -сфере получаются равные круги (вырезаемые этими конусами) практически реализуемых селеноцентрических и геоцентрических выходных скоростей. Эти круги расположены между пунктирными векторами  $U$  на рис. 4.9 и 4.12. Угол раствора конуса  $K_U$  составляет около  $45^\circ$  на рис. 4.9 и превышает  $90^\circ$  на рис. 4.12.

При  $\Delta V_1 < \Delta V_1^*$  векторы входной геоцентрической скорости  $V_2$ , как видно из рис. 4.5, уже не могут считаться постоянными при изменении точки входа; соответственно нельзя считать постоянным вектор  $U_2$  входной селеноцентрической скорости. Более того, при  $\Delta V_1 < \Delta V_1^*$ , как показывает непосредственная проверка, траектории с  $r_{\pi} = r_{\gamma}$  уже не могут достигать геоцентрических апогейных расстояний  $r_{\alpha}$ , близких к  $(r_L + \rho_*)$ . Поэтому на сфере выходных селеноцентрических скоростей  $U_3$  появляется запретная область. Соответствующая область появляется и на  $V_3$ -сфере, так что  $U_3$ - и  $V_3$ -много-

образования покрывают соответствующие  $U_3$ - и  $V_3$ -сферы не полностью.

Прежде чем рассматривать эволюцию запретной области с изменением  $\Delta V_1$ , заметим, что, поскольку для

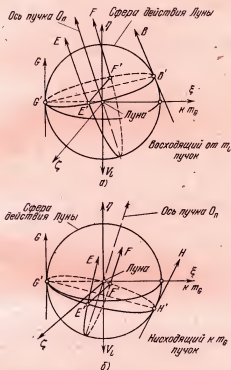


Рис. 19.1. Противоположность характера отклонения от параллельности векторов скорости входа в сферу действия Луны в случаях: а — восходящего и б — нисходящего по отношению к Земле  $t_0$  пучков облетных траекторий.

$\Delta V_1 = \Delta V_1^* (h = h^* = -1,7 \text{ км}^2/\text{с}^2)$  апогейный радиус  $r_a = a_L + \rho_*$ , то для наиболее удаленной от Земли точки  $G'$  входа на СД входные геоцентрические скорости  $V_2$  и селеноцентрические  $U_2$  ортогональны направлению на Землю и являются общими (направление  $G$  на рис. 19.1, а, б) для случаев сближения на восходящих (рис. 19.1, а)

и нисходящих (рис. 19.1, б) ветвях. Однако при входе около ближайших к Земле точек касания траектории и сферы действия для этих случаев векторы  $U_2$  (направления  $B$  и  $H$  на рис. 19.1, а и б) — разные (вследствие различия векторов  $V_2$  для восходящих и нисходящих по отношению к Земле дуг  $\Gamma_{1,2}$ ); различно и расположение соответствующих точек касания ( $B'$  и  $H'$  и промежуточных  $E', F'$  на рис. 19.1, а и б) селеноцентрических траекторий с границей СД.

Рассмотрим диапазон минимальных начальных скоростей

$$\Delta V_{1*} < \Delta V_1 < \Delta V_1^*,$$

соответствующих диапазону апогейных расстояний дуги  $\Gamma_{1,2}$

$$r_L - \rho_* < r_\alpha < r_L + \rho_*.$$

При росте от нуля значений разности  $(r_L + \rho_*) - r_\alpha$  (вследствие убывания  $\Delta V_1$  от  $\Delta V_1^*$ ) часть сферы действия отсекается геоцентрической сферой радиуса  $r = r_\alpha$  (ее пересечение с плоскостью  $\xi\zeta$  показано на рис. 19.2 пунктиром  $G'_1 z'_1 G''_1$ ). В отсеченную (заштрихованную) часть вход КА уже невозможен (хотя по-прежнему возможен выход КА из нее). От этого на  $U_3$ -сфере (в пространстве компонент  $uvw$  выходных скоростей) и возникает в точке  $G$  указанная выше запретная область  $Z$ . Она имеет форму каплеобразного профиля, показанную штриховкой на рис. 19.2, а для случая  $90^\circ < |i_1| < 180^\circ$  в проекции на плоскость  $uw$  (начало координат и направления осей  $\xi\zeta$  и  $\varphi w$  совпадают на рис. 19.2). Там же показаны пунктиром окружность  $\rho = \rho_*$  — линия пересечения сфер  $\rho = \rho_*$  и  $r = r_\alpha$  в проекции на плоскость  $\xi\zeta$ . Точки  $z$  границы  $Z$  области  $Z$  получаются по точкам входа  $z'$  на пересечении сфер  $\rho = \rho_*$  и  $r = r_\alpha$  поворотом вектора  $U_2(z')$  в плоскости  $\Sigma$ , проходящей через центр Луны и направление  $G = U_2(z')$ , на угол  $\alpha(d(z'))^*$ . Заметим, что при  $i_1 \neq 0, 180^\circ$  вектор  $G$  (рис. 19.1) не будет направлен по оси  $v$ , и область  $Z$  не

\*) Здесь  $d$  — прицельная дальность, т. е. расстояние от центра Луны асимптоты селеноцентрической траектории — гиперболы, для которой  $z'$  является точкой входа в СД.

будет симметрична относительно плоскости  $uv$  (на рис. 19.2 индекс 1 означает проектирование на плоскость  $\xi\zeta$  параллельно оси  $\eta$ ).

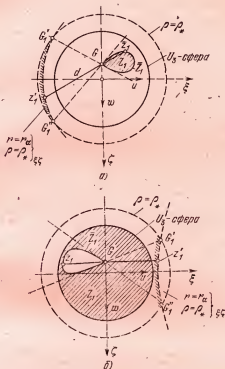


Рис. 19.2. Увеличение запретной зоны  $Z$  на  $U_3$ -сфере выходных селеноцентрических скоростей с уменьшением апоцентрического радиуса  $r_\alpha$  облетной траектории:  $a$  — от значений  $r_\alpha^{(a)} < r_L + \rho_*$ , но близких к  $r_L + \rho_*$ ;  $b$  — до значений  $r_\alpha^{(b)} > r_L - \rho_*$ , но близких к  $r_L - \rho_*$ . Индекс 1 означает проектирование на плоскость  $\xi\zeta$  параллельно оси  $\eta$ .

С убыванием  $\Delta V_1$  (и  $r_\alpha$ ) область  $Z$  расширяется, охватывая при  $r_\alpha = r_L$  полусферу  $u > 0$  на  $U_3$ -сфере (рис. 19.3), а при  $r_L - \rho_* < r_\alpha < r_L$  — большую часть  $U_3$ -сферы (рис. 19.2, б). При  $\Delta V_1 \rightarrow \Delta V_{1*} + 0$  будет  $r_\alpha \rightarrow r_L - \rho_* + 0$ , и область  $Z$  займет всю  $U_3$ -сферу, кроме точки  $G$ . Многообразие скоростей  $U_3$  сведется к этой точке. При этом

на СД точки входа  $G'$ ,  $B'$ ,  $H'$  (рис. 19.1) сойдутся в одной точке  $(p_*, 0, 0)$ , и соответствующие векторы  $G$ ,  $B$ ,  $H$  на рис. 19.1, 19.3 тоже придут к совпадению. На рис. 19.3 занимаемая многообразием скоростей  $U_3$  полусфера находится слева, причем выделена верхняя ее часть, точки

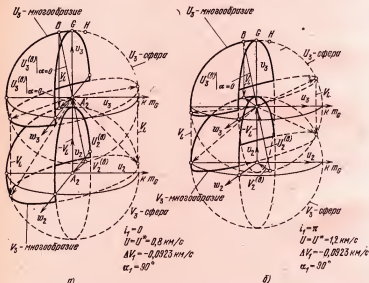


Рис. 19.3. Характер скоростных многообразий выходных скоростей: селеноцентрических ( $U_3$ ) на  $U_3$ -сфере и геоцентрических ( $V_3$ ) на  $V_3$ -сфере при наклонениях, близких по модулю:  $a$  — к нулю,  $b$  — к  $180^\circ$  — при сближении на восходящей ветви геоцентрической траектории.

которой соответствуют траекториям, не соударяющимся с Луной.

Многообразия выходных геоцентрических скоростей  $V_3$  строятся по рассмотренным многообразиям скоростей  $U_3$  обычным образом, т. е. прибавлением соответствующих векторов  $V_L(t_3)$ .

Размеры скоростных многообразий убывают вместе с  $\Delta V_1$  и с  $|i_1|$ . При этом для  $i_1 = 0$  будем иметь  $U < V_L$ , начиная с  $\Delta V_1 = \Delta V_1^*$ ; тогда проекция  $v_3 = (V_3)_0 < 0$ , и движение от СД оказывается возможным лишь в полупространство  $v_3 < 0$  (рис. 4.13, 19.3,  $a$ ). Для  $i_1 = 180^\circ$  (рис. 19.3,  $b$ ) при всех  $\Delta V_1 \geq \Delta V_1^*$  имеем  $U > V_L$ ,



и движение от СД возможно и в полупространство  $U_3 > 0$ . При промежуточных значениях  $i_1$  размеры скоростных многообразий промежуточные. Во всех случаях для определения реальных границ этих многообразий на  $U_3$ - и  $V_3$ -сферах необходимо учитывать ограничение на радиус периселения  $\rho_n > \rho_L$  (непрохождение траектории через Луну) и ограничение на геоцентрический выходной радиус  $r_2 \leq r_a$ . Для  $r_a = r_L$   $U_3$ - и  $V_3$ -многообразия даны на рис. 19.3 для случаев сближения на восходящих по отношению к Земле ветвях траекторий. (В случае сближения на нисходящих ветвях край  $U_3$ -многообразия проходил бы не через точку  $G$ , а через точку  $H$  на рис. 19.3, а, б).

Заметим, что при начальных скоростях, близких к минимальным, входные геоцентрические скорости  $V_2$  малы, и движение происходит примерно так же, как если бы сфера действия налетала на покоящийся в пространстве КА.

### § 19.3. Анализ влияния невыполнения предположений метода ТСД

Несовпадение направлений  $G$  и  $B$  (или  $H$ ) с направлением оси  $O_n$  пучка на рис. 19.1 означает, что направление входной селеноцентрической скорости  $U_2$  при минимальных начальных скоростях заметно меняется вместе с изменением точек входа.

Вследствие переменности вектора  $U_2$  при сближении в плоскости лунной орбиты на восходящей ветви не реализуется окрестность дуги  $GB$  (рис. 19.3), а в случае сближения на нисходящей ветви окрестность дуги  $GH$  реализуется дважды. Действительно, если, начиная с малых прицельных расстояний  $|d|$ , брать  $d \rightarrow \rho_*$  в случае рис. 19.1, а, то на рис. 19.3 будет  $U_3 \rightarrow B$ , поворачиваясь по часовой стрелке (если смотреть с оси  $w$ ), а если брать  $d \rightarrow -\rho_*$  то  $U_3 \rightarrow G$ , поворачиваясь против часовой стрелки, так что дуга  $BG$  не реализуется.

В случае же рис. 19.1, б при  $d \rightarrow \rho_* - 0$  дуга  $GH$  проходится вектором  $U_3$  первый раз, а при  $d \rightarrow -\rho_* + 0$  она проходится второй раз (в обратном направлении). Рассмотренные особые окрестности дуг  $BG$  и  $GH$  на рис. 19.3 существуют при любых начальных скоростях вследствие

наличия разницы в направлениях скорости  $V_2$  в плоскостях  $G'B'O_{\pi}$  и  $G'H'O_{\pi}$  (рис. 19.1) на разных геоцентрических расстояниях  $r$ ,  $r_L - \rho_* < r < r_L + \rho_*$  (нарушение предположения 1 о постоянстве вектора  $U_2$  метода ТСД). При этом и величина скорости  $V_2$  (и  $U_2$ ) в окрестности точки входа  $G'$  (на рис. 19.1) будет меньше, чем в окрестности точек входа  $B'$ ,  $H'$  (вследствие большей величины  $r_2$  в геоцентрическом интеграле энергии).

Заметим, что векторы скорости  $U_2$  в симметричных относительно плоскости  $\xi\zeta$  точках касания (типа  $E$ ,  $F$  на рис. 19.1) траектории с границей СД не одинаковы даже при значениях  $i_1 = 0,180^\circ$ . Это — следствие различия в этих точках направлений геоцентрического входного радиуса  $r_2$  (нарушение предположения 2 метода ТСД о том, что  $r_2 = r_L$ ) при одинаковости радиальной и трансверсальной компонент векторов  $V_2$ . При вычитании одинакового вектора  $V_L$  получается два разных вектора селеноцентрической скорости  $E$  и  $F$  (рис. 19.1): их проекции на плоскость, содержащую прямую  $E'F'$  и ось  $O_{\pi}$  пучка траекторий, отклоняются от этой оси (примерно по оси  $\xi$ ) в противоположные стороны. Если в плоскости  $E'F'O_{\pi}$  пучок селеноцентрических входных скоростей всегда является расходящимся, то в перпендикулярной плоскости он является сходящимся для случая сближения с Луной на восходящих ветвях геоцентрических траекторий (плоскость  $G'B'O_{\pi}$  на рис. 19.1, а) и расходящимся — для случая нисходящих ветвей (плоскость  $G'H'O_{\pi}$  на рис. 19.1, б). С убыванием начальных энергий до минимальных убывает скорость  $V_2$ , а вместе с ней и расходимость в плоскости  $E'F'O_{\pi}$ . Эта расходимость всегда невелика — порядка  $10^\circ$ .

В § 4.2 в целях упрощения метода ИВ до метода ТСД пренебрегалось не только переменностью вектора входной геоцентрической скорости на СД и отличием входного и выходного геоцентрических радиусов от радиуса Луны, но также пренебрегалось изменением на угол  $\varphi_L$  направления вектора скорости  $V_L(t)$  Луны за время  $T_{2,3} = t_3 - t_2$  полета КА внутри СД между моментами  $t_2$  входа и  $t_3$  выхода. Это изменение равно нулю для траекторий, касающихся СД. Поэтому точки  $U_3$ - и  $V_3$ -сфер, соответствующие тривиальным решениям:  $U_3|_{\alpha=0}$  и  $V_3|_{\alpha=0}$  (рис. 4.15) — при учете угла  $\varphi_L$ , т. е. при невыполнении

предположения 3 в § 4.2, не изменятся. Остальные точки при учете того, что  $\varphi_L \neq 0$ , сдвинутся со своих мест на  $U_3$ - и  $V_3$ -сферах по-разному вследствие отворота вектора  $V_L(t_3)$  от вектора  $V_L(t_2)$  на переменный угол  $\varphi_L$ . Как видно из рис. 4.11, угол  $\varphi_L = \omega_L T_{2,3}$  для всех величин  $U_2$  изменяется качественно почти одинаково с убыванием прицельной дальности  $d$  от граничного значения  $|d| = = \rho_*$ : сначала быстро (как  $\sqrt{\rho_* - |d|}$ ) возрастает, а затем делается практически постоянным вплоть до значения  $|d| = 0$ . При  $|d| < 40$  тыс. км переменность  $\delta\varphi_L = \varphi_L - - \varphi_L^{\text{cp}}$  угла  $\varphi_L$  не превосходит  $0,5^\circ$  для  $U = 3,75$  км/с ( $\varphi_L^{\text{cp}} \approx 4,7^\circ$ ) и  $1,5^\circ$  для  $U = 0,8$  км/с ( $\varphi_L^{\text{cp}} \approx 22^\circ, 3$ ). Если поправкой  $\delta\varphi_L$  к поправке  $\varphi_L$  пренебречь, то окажется, что для всех векторов  $U_3$  и  $V_3$ , отвечающих значениям  $0 < < d < 40$  тыс. км, вектор  $V_L(t_3^{\text{cp}})$  будет одним и тем же, а потому одинаковым будет, и сдвиг — вектор поправки  $\Delta V_3 = [V_L(t_3^{\text{cp}}) - V_L(t_2)]$  для большинства точек  $V_3$ -сферы. В результате скоростное  $V_3$ -многообразие будет почти целиком сферой (рис. 19.4) с центром  $\tilde{A}_2$  (смещенным из точки  $A_2$  на тот же вектор  $\Delta V$ ), за исключением небольшой окрестности вокруг точки  $V_3|_{\alpha=0}$  (рис. 19.4).

Угловой размер этой окрестности не превосходит угла  $\alpha$  между векторами  $U_3$  и  $U_2$  при  $d = 40$  тыс. км, который согласно рис. 4.8 составляет менее  $5^\circ$  для  $U = 1,7$  км/с. Для этого случая имеем таблицу:

$d$ , тыс. км	0	23	40	54	66
$\alpha$ , град	180	8	4	2	0
$\varphi_L$ , град	11,5	11	9,5	7,5	0

Из нее следует, что скоростное  $V_3$ -многообразие имеет малый бугорок, основанием которого является малый круг с радиусом  $\sim 5^\circ$  и с центром в точке  $(V_3|_{\alpha=0} + \Delta V_3)$ . Гладкая вершина бугорка смещена относительно центра основания на вектор  $-\Delta V_3$ , а его склоны гладко сопрягаются у краев основания с основной, сферической частью  $V_3$ -многообразия (рис. 19.4).

Такого рода отличия  $U_3$ - и  $V_3$ -многообразий соответственно от  $U_3$ - и  $V_3$ -сфер метода ТСД мало существенны и в случае нужды легко могут быть учтены.

Невыполнение предположения 4 метода ТСД (о совпадении направлений геоцентрических радиусов  $r_L(t_3)$  Луны и  $r_3$  КА в момент  $t_3$  выхода из СД) приводит к различию направлений выходной геоцентрической скорости

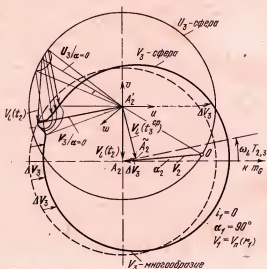


Рис. 19.4. Скоростные многообразия на  $U_3$  и  $V_3$ -сферах, построенные с учетом изменения направления скорости Луны за время полета КА внутри ее сферы действия.

$V_3$  при одинаковой выходной селеноцентрической скорости  $U_3$  и разных точках выхода  $r_3$ . Влияние несовпадения направлений  $r_L(t_3)$  и  $r_3$  является чисто геометрическим и может быть учтено так же, как и рассмотренное выше влияние несовпадения направлений  $r_L(t_2)$  и  $r_2$ .

Невыполнение предположения 5 метода ТСД (о несовпадении величин  $r_L(t_3)$  и  $r_3$ ) приводит к различию геоцентрических энергий при одинаковых геоцентрических выходных скоростях  $V_3$  и разных удалениях КА от Земли в момент выхода. Это различие легко может быть уч-

тено путем использования фактического выходного радиуса (вместо  $r_L$ ) в расчете движения от СД.

Учет невыполнения предположений 4 и 5 менее существен, чем предположений 1—3, потому что последние относятся к дугам  $\Gamma_{1,2}$  и  $\gamma_{2,3}$  и непосредственно влияют на условия прохождения КА около Луны, определяющие дугу  $\Gamma_{3,k}$ .

Проведенный анализ влияния нарушения предположений метода ТСД позволяет уверенно применять этот метод к расчету траекторий облета Луны, вводя в случае нужды поправки к нему или уточняя его результаты методом ИВ и другими более точными методами.

#### § 19.4. Сравнение результатов анализа траекторий сближения с Луной методами ТСД и ИВ

Правильность результатов, получаемых в пространственной задаче методом ТСД, подтверждают результаты работы [2—1964], полученные как при помощи интегрирования точной системы уравнений небесной механики, так и методом ИВ (игнорирования возмущений от Луны вне ее СД и от Земли — внутри СД). В этой работе при фиксированных начальных энергии  $h_1 = h_0$ , наклоне  $i_1 = i_0$ , кинетическом моменте  $C_1 = C_0$  и долоте  $\lambda_L$  Луны в момент сближения пучок «облетных траекторий» получается (стр. 845) изоэнергетическими вариациями  $\delta\omega_1$  и  $\delta\Omega_1$  (положений перигея  $\omega_1$  и узла  $\Omega_1$ ). Эти вариации пересчитываются в декартовы координаты

$$d_L = d \cos \sigma, \quad d_z = d \sin \sigma, \quad (4.1)$$

где  $d$  — прицельная дальность селеноцентрической гиперболы (оскулирующая в окрестности периселения), а  $\sigma$  — азимут поворота плоскости этой гиперболы вокруг оси  $O_n$  пучка гипербол. Азимут  $\sigma$  отсчитывается от меридиана оси  $O_n$  пучка (рис. 4.6, б), если за полюс принята нормаль  $\xi$  к плоскости лунной орбиты. Результаты расчета облетных траекторий представляются в плоскости  $d_L, d_z$  в виде изолиний

$$r_k = r_m = \text{const}, \quad i_k = i = \text{const}, \quad t_k = T = \text{const}, \quad (4.2)$$

где  $r_m$  — минимум геоцентрического радиуса  $r$ , первый пос-

ле выхода КА из сферы действия Луны,  $T$  — полное время полета от Земли до перигея  $r_m$  по трем дугам  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\Gamma_{2,3}$ ,  $\Gamma_{3,m}$ ,  $i$  — наклонение плоскости дуги  $\Gamma_{3,m}$  к плоскости орбиты Луны.

Отмечаются следующие качественные закономерности [2—1964, стр. 848]:

«В плоскости  $d_L d_Z$  существуют две точки, соответствующие  $r_m = 0$  (см. рис. 19.5—19.8, взятые из [2—1964]).

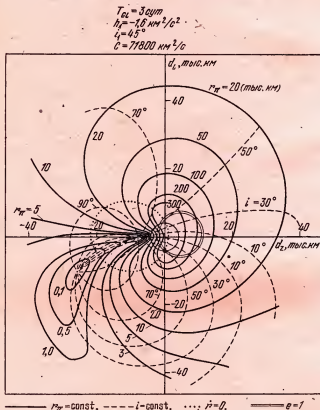


Рис. 19.5. Линии постоянства радиуса  $r_m$  и наклонения  $i$  в перигее участка возвращения облетной траектории на плоскости компонент  $d_L d_Z$  прицельной дальности на участке сближения КА с Луной при начальных энергии  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$  и наклонении  $i_1 = 45^\circ$ .

Для качественной картины расположения изолиний эти точки являются особыми. Для линий  $i(d_L, d_z) = \text{const}$  эти точки являются узлами, что естественно, так как значение  $i$  при  $r_m = 0$  не определено. Для линий  $r_m(d_L, d_z) = \text{const}$  эти точки являются центрами.

Все изолинии  $i(d_L, d_z) = \text{const}$  соединяют обе особые точки. Исключением является изолиния  $i(d_L, d_z) = i_0$ , где  $i_0$  — наклонение орбиты в начале геоцентрического участка полета. Для поверхности  $i = i(d_L, d_z)$  значение  $i = i_0$  — асимптотическое для больших  $d_z$ .

Эти качественные особенности, как и другие, можно получить из вида рассмотренных в гл. 4 скоростных многообразий. Действительно, в работе [2—1964] рассматриваются только случаи, когда селеноцентрическая выходная скорость  $U_3$  превосходит скорость  $V_L$  Луны, причем для начального участка геоцентрической траектории рассматриваются лишь значения перигейного радиуса  $r_x^{(1)} = r_m = 6600$  км, энергии  $h_1 = h_0 = -1,6$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $h_1 = h_0 = 0,28$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> (и, соответственно, значения кинетического момента  $C_1 = C_0 = 71800$  км<sup>2</sup>/с и  $C_1 = C_0 = 72400$  км<sup>2</sup>/с).

Таблица 19.1

	$h_0 = -1,6$ км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>			$h_0 = 0,28$ км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
$i$ , град	45	90	135	90
$U$ , км/с	1,119	1,235	1,341	1,855

В табл. 19.1 из [2—1964, стр. 851] приводятся значения скорости  $U$  (соответствующие различным значениям  $h_0, i_0$ ) КА относительно Луны на сфере действия.

Видим, что все значения  $U > V_L$ , т. е. больше, чем на рис. 4.12. Значение  $U = 1,855$  км/с больше, чем на рис. 4.9 (построенном для  $h_0 = 0$ ).

Поскольку  $U > V_L$ , то на  $V_3$ -сфере существует, согласно § 4.3, два направления, соответствующие чисто радиальному (по отношению к Земле) выходу из СД, — нисходящее  $V_3^{(н)}$  и восходящее  $V_3^{(в)}$ . Поскольку векторы  $V_3^{(н)}$  и  $V_3^{(в)}$  являются внутренними точками многообразия скоростей  $V_3$  на  $V_3$ -сфере, то имеются вокруг нисхо-

дящей и восходящей радиальных траекторий траектории всех наклонений. Поэтому пары  $(d_L, d_Z)$ , при которых реализуются векторы  $V_3^{(H)}$  и  $V_3^{(B)}$ , являются особыми точками, причем центрами — для линий  $r_m(d_L, d_Z) = \text{const}$  и узлами — для линий  $i(d_L, d_Z) = \text{const}$ . Последние линии соединяют оба узла, так как соответствуют сечениям  $V_3$ -многообразия плоскостями, проходящими через ось  $u_3$ , т. е. через прямую  $v_3 = w_3 = 0$  в системе координат  $A'_2 u_3 v_3 w_3$  (рис. 4.9, 4.19). Линия  $i(d_L, d_Z) = i_0$  не замыкается для конечных  $d_L, d_Z$ , поскольку на ней должна находиться точка тривиального решения задачи — возвращения к Земле по невозмущенной Луной исходной траектории (для последней  $d_L = d_Z = \infty$ ).

Объясним с помощью скоростных многообразий, почему в [2—1964, стр. 849] «для качественной картины расположения изолиний  $r_m(d_L, d_Z) = C = \text{const}$  характерны два случая. В первом случае (рис. 19.5) в плоскости  $d_L, d_Z$  существует изолиния  $r_m = C' < r_{m0} = 6\,600$  км типа лемнискаты. В каждой ее петле лежит особая точка вместе с охватывающими ее замкнутыми изолиниями при значениях  $C$  из интервала  $0 \leq C < C'$ . Замкнутые изолинии  $r_m = C$ , где  $C' < C < r_{m0}$ , окружают кривую  $r_m = C'$  и обе особые точки. Линией  $r_m = r_{m0}$  это свойство отделено от остальной части плоскости, где  $r_m > r_{m0}$ . Здесь изолинии также замкнуты, но они не охватывают ни одну из особых точек».

Нетрудно понять (см. § 4.5), что «кривая типа лемнискаты» в случае, представленном на рис. 19.5, соответствует на  $V_2$ -многообразии в системе координат  $A'_2 v_3 u_3 w_3$  правильной «восьмерке» из точек, для которых  $r_m$  имеет то же значение, что и для точки  $(0, V_3^{(m)}, 0)$  на оси  $v_3$  вершины  $V_3$ -многообразия (рис. 4.19). Эта точка является точкой самопересечения для «восьмерки» (кривой  $C = C'$  на рис. 19.5), так как для больших  $r_m$  кривые  $r_m = \text{const}$  на  $V_3$ -многообразии (типа кривых  $r_m = C \geq C'$ ) должны иметь большую трансверсальную компоненту и потому должны дальше отстоять от оси  $u_3$ , чем точки кривой  $r_m = C'$ . Линии  $r_m = C < C'$  должны быть ближе к оси  $u_3$ . Поэтому каждая из них охватывает лишь одну особую точку и лежит внутри соответствующей петли линии  $r_m = C'$ . Образ семейства  $r_m = C < C'$



на плоскости  $d_L d_Z$  разбит линией  $r_m = r_{m0}$  на два подсемейства  $r_m = C < r_{m0}$  и  $r_m = C > r_{m0}$ , потому что на этой плоскости линия  $r_m = \text{const} = r_{m0}$  не может быть замкнута (ибо содержит тривиальное решение — как и линия  $i = \text{const} = i_0$ ).

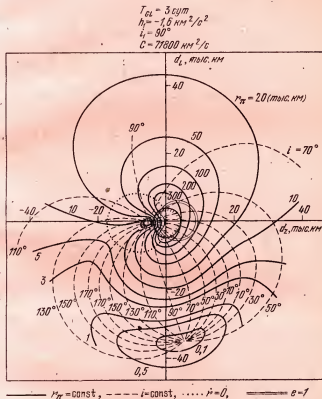


Рис. 19.6. Линии постоянства радиуса  $r_\pi$  и наклоения  $i$  в перигее участка возвращения облетной траектории на плоскости компонент  $d_L d_Z$  прицельной дальности на участке сближения КА с Луной при начальных энергии  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$  и наклонении  $i_1 = 90^\circ$ .

Подсемейство  $r_m = C < r_{m0}$  охватывает обе особые точки, так как линии его прообраза на рис. 4.20 располагаются между линиями  $r_m = C'$  и  $r_m = r_{m0}$ . Линии подсемей-





Нетрудно видеть, что кривая типа улитки Паскаля соответствует на  $V_3$ -многообразии той же правильной «восьмерке»  $r_m = C'$ , что и в первом случае, и отличие второго случая от первого состоит лишь в том, что стало  $C' > r_{m0}$  (вместо  $C' < r_{m0}$ ). Поэтому неограниченная кривая  $r_m = r_{m0}$  разорвала на плоскости  $d_L d_z$  не то семейство линий  $r_m = \text{const}$ , прообраз которого на рис. 4.20 располагался вне «восьмерки», а семейство вокруг особой точки  $V_3 = V_3^{(s)}$ , прообраз которого на рис. 4.20 находится внутри левой петли восьмерки (левой, поскольку именно ею окружено тривиальное решение при рассматриваемом в [2—1964] сближении с Луной на восходящей ветви траектории).

Поэтому качественно не изменилась на плоскости  $d_L d_z$  картина окрестности образа правой петли восьмерки. Благодаря замкнутости всех линий прообраза семейства  $r_m = C > C'$  вне «восьмерки» вокруг точки  $(0, -V_M, 0)$  с максимальным значением  $r_m$  образ левой петли лемнискаты превратился в наружную петлю улитки Паскаля, охватывающую вместе с внутренней петлей это семейство. Образ семейства линий  $r_m = C < C'$ , расположенного на рис. 4.20 внутри левой петли «восьмерки», должен содержать неограниченную линию  $r_m = r_{m0}$  (рис. 19.6, 19.8), и потому занимает всю плоскость вне наружной петли, причем разделяется линией  $r_m = r_{m0}$  на две подсемейства замкнутых линий, одно из которых обязано примыкать к наружной петле, а другое — содержать центр  $r_m = 0$ .

Рост значений  $U$  и  $C'$  с ростом значения  $i$ , полученный точным расчетом на стр. 851 работы [2—1964], можно легко получить из приближенных формул метода ТСД:

$$V_3^{(m)} = U - V_L, \quad C_3 = r_L V_3^{(m)}, \quad h_3 = (V_3^{(m)})^2 - \frac{2\mu_G}{r_L}, \quad (4.3)$$

$$V_\pi = C_3/r_\pi, \quad V_\pi^2 = 2\mu_G/r_\pi + h_3. \quad (4.4)$$

Из последних двух формул имеем квадратное уравнение относительно  $r_\pi$

$$h_3 r_\pi^2 + 2\mu_G r_\pi - C_3^2 = 0, \quad (4.5)$$

положительный корень которого и есть  $C'$ :

$$C' = (-\mu_G + \sqrt{\mu_G^2 + h_3 C_3^2}) \frac{1}{h_3} = C_3^2 \frac{1}{\mu_G + \sqrt{\mu_G^2 + h_3 C_3^2}}, \quad (4.6)$$

если  $C_3$  и  $h_3$  выражаются через  $U$  формулами (4.3). Имеем

$$C' \approx \frac{C_3^2}{2\mu_G} \quad \text{при} \quad \frac{h_3 C_3^2}{\mu_G} \ll 1, \quad (4.7)$$

т.е.  $|1 - e| \ll 1$ , так как  $1 - e^2 = -\frac{hC^2}{\mu_G}$ .

Нетрудно проверить, что значения  $U^2$  для вариантов 1 и 3 таблицы на стр. 851 в [2—1964] отличаются от  $U^2$  варианта 2 на  $0,275 \text{ км}^2/\text{с}^2$  в противоположные стороны, что связано, согласно формуле (4.2.4), с тем, что  $\cos 45^\circ = -\cos 135^\circ$ .

Расчет  $C'$  с помощью формулы (4.6) по значениям табл. 19.1 для  $U$  дает  $C' = 1,7; 8; 20; 230$  тыс. км., что близко к значениям  $\sim 1, \sim 7, \sim 18, \sim 200$  таблицы на стр. 851 в [2—1964]. Видно, что относительная точность расчета  $C'$  методом ТСД слабо убывает с приближением  $U$  к  $V_L$ .

На стр. 851 работы [2—1964] говорится: «Если заданные  $r_m > C'$ , то для участка траекторий после сближения с Луной существуют наклонения  $i$ , которые нельзя получить за счет специального прохождения вблизи Луны. Увеличение  $C'$  может быть получено за счет увеличения энергии селеноцентрического движения. Однако одновременно с этим происходит приближение верхней особой точки  $r_m = 0$  к центру Луны (рис. 19.5—19.8). При больших значениях  $U$  верхняя особая точка вместе с семейством замкнутых изолиний оказывается внутри линии  $\rho = 1736$  км, ограничивающей поверхность Луны (рис. 19.8)». Первые два утверждения очевидны из рис. 4.20, причем ясно, что при увеличении заданного  $r_m$  от  $C'$  сначала исчезают наклонения, отвечающие окрестности вектора  $V_3^{(m)}$ , т.е. движениям, близким к плоскости лунной орбиты и обходящим Землю против направления обхода ее Луной. Приближение селеноцентрической

траектории к центру Луны с ростом  $U$  связано с очевидным из рис. 4.9 увеличением угла  $\alpha$  между  $U_2^{(в)}$  и  $U_3^{(н)}$  с ростом  $U$  (т. е. радиуса  $U_3$ -сферы, так как естественно, что для поворота притяжением большего вектора  $U$  на

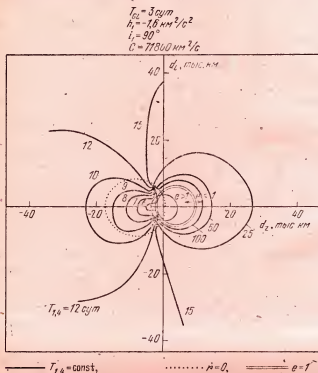


Рис. 19.9. Линии постоянства времени  $T = T_{1,0}$  облета Луны на плоскости компонент  $d_L d_Z$  прицельной дальности на участке сближения КА с Луной при начальной энергии  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$ .

больший угол  $\alpha$  требуются меньшие расстояния траектории от центра тяготения (см. рис. 4.8).

Аналогично можно объяснить с помощью сферических многообразий скоростей  $U_3$  и  $V_3$  и остальные качественные свойства семейств изолиний на плоскости  $d_L d_Z$ , отмеченные в работе [2—1964]. Можно даже уточнить харак-

тер поведения изолиний  $T(d_L, d_z) = \text{const}$ . Они представлены на рис. 19.9, 19.10, взятых из [2—1964] и там на стр. 851 о них говорится следующее: «Здесь также для качественной картины существенно наличие двух особых точек, в которые, как в узел, сходятся изолинии  $T(d_L, d_z) = C$ , где  $C \leq 30$  суток. Обе особые точки соответствуют траекториям, для которых после выхода из

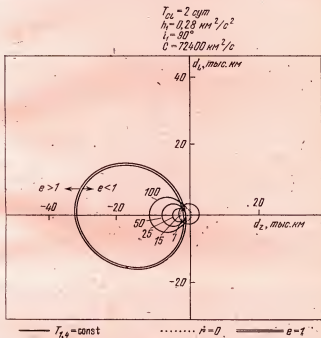


Рис. 19.10. Линии постоянства времени  $T = T_{1,к}$  облета Луны на плоскости компонент  $d_L, d_z$  прицельной дальности на участке сближения КА с Луной при начальной энергии  $h_1 = 0,28 \text{ км}^2/\text{с}^2$ .

СД Луны геоцентрическая орбита имеет эксцентриситет  $e$ , равный нулю, т. е. после сближения с Луной орбита является круговой с радиусом порядка радиуса лунной орбиты. Неопределенность времени полета  $T$  в этих точках связана с неопределенностью в положении перигея для круговых орбит. Сколь угодно малые возму-

щения в зависимости от их направления существенно меняют положение перигея и время его достижения после выхода из СД Луны.

В связи со сказанным выше особые точки должны лежать на линии  $\dot{r}=0$ . При этом замкнутую линию  $\dot{r}=0$  указанные особые точки делят на две дуги. Для

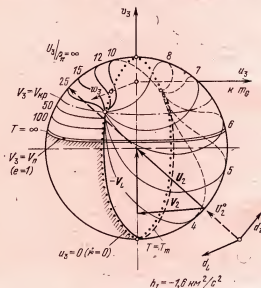


Рис. 19.11. Линии постоянства времени  $T = T_{1, \kappa}$  полета (от Земли до перигея после сближения с Луной) на  $V_3$ -многообразии в пространстве компонент  $u_3, v_3$ , геоцентрической скорости  $V_3$  выхода из сферы действия Луны при начальной энергии  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$ .

траекторий с параметрами  $d_L, d_z$ , которые принадлежат дуге линии  $\dot{r}=0$ , обращенной в сторону больших  $T$ , перигей участка траектории после сближения с Луной расположен непосредственно при выходе из СД  $\rho = \rho_*$ . Другая дуга линии  $\dot{r}=0$  соответствует траекториям, у которых непосредственно при выходе из СД реализуется апогей орбиты».

Далее будет показано, что последние два утверждения несправедливы для случая  $h_1 > 0$  (рис. 19.10). А сейчас построим схематически изолинии  $T = \text{const}$  на  $V_3$ -



сферах в случаях  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$  и  $0,28 \text{ км}^2/\text{с}^2$  на рис. 19.11 и 19.12, где эти линии не покрывают лишь область, ограниченную сверху малым кругом  $V_3 = V_n(r_L)$  ( $e = 1$ ) — двойной линией и справа большим кругом  $u_3 = 0$  ( $\dot{r} = 0$ ) — линией с точками, как на рис. 19.5—19.10. Векторы скорости  $V_3$  из этой области соответствуют траекториям ухода КА из СД в бесконечность без прохождения перигея.

Семейство линий  $T = \text{const}$  на  $V_3$ -сфере устроено совершенно одинаково как в случае  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$ , так

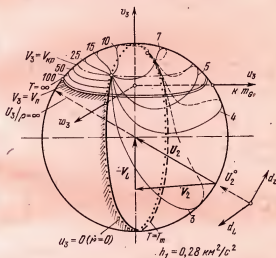


Рис. 19.12. Линии постоянства времени  $T = T_{1, \kappa}$  полета (от Земли до перигея после сближения с Луной) на  $V_3$ -многообразии в пространстве компонент  $u_3, v_3, w_3$  геоцентрической скорости  $V_3$  выхода из сферы действия Луны при начальной энергии  $h_1 = 0,28 \text{ км}^2/\text{с}^2$ .

и в случае  $h_1 > 0$ . И орты  $d_L, d_Z$  направлены примерно одинаково в плоскости, перпендикулярной вектору  $U_2$ :  $d_L$  — примерно в сторону  $w_3$ ,  $d_Z$  — почти параллельно плоскости  $u_3 u_3$ , потому что вследствие малости компоненты  $w_2$  вектора  $U_2$  пучок селеноцентрических траекторий входит в СД почти параллельно плоскости лунной орбиты.

Отличие на рис. 19.9, 19.10 (или на рис. 19.11, 19.12) происходит от того, что при  $h_1 > 0$  (рис. 19.10, 19.12) круг  $V_3 = V_n$  весь находится в полупространстве  $d_z > 0$  пространства скоростей  $U_3$  (а потому соответствующие точки входа принадлежат полупространству  $d_z < 0$  селеноцентрического пространства координат  $U_2^0, d_L, d_z$ , в то время как при  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2 < 0$  (рис. 19.9, 19.10) круг  $V = V_n$  частично заходит и в полупространство  $d_z < 0$  пространства скоростей  $U_3$  (а потому соответствующие точки входа заходят и в полупространство  $d_z > 0$  в пространстве координат  $U_2^0, d_L, d_z$ ). В обоих случаях время  $T$  вдоль изолиний  $T = \text{const}$  на  $V_3$ -сфере возрастает от минимального  $T = T_m$  до  $T = \infty$ . Линия  $T = T_m$  близка к той части круга  $r = 0$ , на которой скорость  $V_3$  превосходит местную круговую скорость  $V_{кр}(r_L) \approx V_L$ . Поэтому точки этой линии соответствуют перигеям  $r_3 = r_n^{(к)}$ ; соответственно время полета  $T_{3,к} = 0$ , и  $T_m \approx T_{1,2}$  (с погрешностью порядка  $T_{2,3}/2$ ).

С ростом  $C$  от  $T_m$  изолиния  $T = C$  на  $V_3$ -сфере все более отклоняется своей серединой от середины линии  $T = T_m$ , сохраняя те же концы ( $r = 0, V_3 = V_{кр}$ ). При  $C$  порядка  $\sim 10$  суток отклонение направления  $V_3^{(ср)}$  в середине изолиний  $T = C$  от среднего направления  $V_L^0$  изолинии  $T = T_m$  будет порядка  $180^\circ$ , а при  $C$  около 25 суток — порядка  $270^\circ$  (какого порядка  $C$  — указано цифрами на рис. 19.11, 19.12). Начиная с  $C \gtrsim 30$  сут, изолинии  $T = C$  становятся похожими на половинки  $u_3 < 0$  параллелей  $v_3 = \text{const}$  (т. е.  $V_3 = \text{const}$ ), так как начинают опускаться вместе с концами. Это опускание заканчивается на точной полупараллели  $\{V_3 = V_n(r_L), u_3 < 0\}$ , на которой  $C = \infty$ , так как на всякой близкой параллели  $V_3 \leq V_n$  возвращение КА к Земле происходит после прохождения очень удаленного апогея, т. е. за очень большое время  $C$ .

В работе [2—1964] не были отмечены образы областей, заштрихованных на рис. 19.11, 19.12, а также осталась незаполненной изолиниями  $T = C$  окрестность начала координат (см. рис. 19.9, 19.10). Как она должна быть заполнена, схематически показано (в увеличенном масштабе) на рис. 19.13, 19.14 (соответствующих

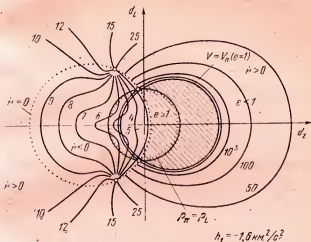


Рис. 19.13. Линии постоянства времени  $T_{1,n}$  облета Луны на плоскости компонент  $d_L d_z$  прицельной дальности для случая сближения КА с Луной при начальной энергии  $h_1 = -1,6 \text{ км}^2/\text{с}^2$  (для малых  $d_L, d_z$ ).

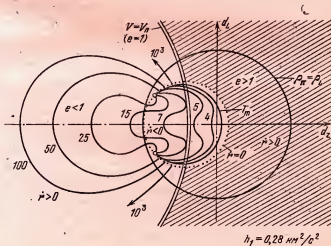


Рис. 19.14. Линии постоянства времени  $T_{1,n}$  облета Луны на плоскости компонент  $d_L d_z$  прицельной дальности для случая сближения КА с Луной при начальной энергии  $h_1 = 0,28 \text{ км}^2/\text{с}^2$  (для малых  $d_L, d_z$ ).

рис. 19.11, 19.12), а именно, заштрихованы области, где не могут располагаться изолинии  $T(d_L, d_z) = \text{const.}$  Однородно заполнена область около точки  $d_L = d_z = 0$ , ограниченная кривыми  $r = 0$  и  $V_3 = V_n$  на рис. 19.13, 19.14, где  $d_z$  меняет знак. Она на  $V_3$ -сфере соответствует области  $r < 0$ ,  $V_r > V_n$ . Таким образом, пустот на плоскости  $d_L, d_z$  нет.

Из характера картины изолиний  $T = C$  на рис. 19.14 следует неправильность отмеченных выше утверждений для случая  $h_1 > 0$ . Действительно, на рис. 19.14 в сторону больших  $T$  обращена левая часть линии  $r = 0$ , на которой согласно рис. 19.12  $V_3 < V_{кр}$ , так что этой части соответствуют не перигей, а апогей. Перигей же соответствуют ее другой части (на которой  $V_3 > V_{кр}$  согласно рис. 19.12).

### § 19.5. Анализ некоторых общих свойств пучка облетных траекторий методом ТСД

1. *Предельность плоской задачи для пространственной.* Выше приводились значения  $U_2$  селеноцентрической скорости входа в СД лишь для двух значений  $|i_1| = 0$  и  $|i_1| = \pi$  модуля  $|i_1|$  начального геоцентрического наклонения, потому что при других значениях  $|i_1|$  величина  $U_2(|i_1|)$  промежуточна (см. рис. 4.6, а и формулу (4.2.4)):

$$U(0) \leq U(|i_1|) \leq U(\pi). \quad (5.1)$$

Соответственно промежуточные и параметры облетных траекторий ( $V_3^{(M)}$ ,  $V_3^{(m)}$  и др.).

Выше было показано, что с уменьшением начальной скорости характер траекторий изменяется сперва для  $|i| = 0$ , затем для  $|i_1| > 0$  и, наконец, для  $i_1 = \pi$ . При этом оказывается, что различные виды решений пространственной задачи возникают и исчезают в плоскости лунной орбиты, как решения плоской задачи. Сходство плоской и пространственной задач в том, что в них при фиксированных  $i_1$ ,  $r_\pi^{(1)}$ ,  $h_1$  многообразия входных геоцентрических и селеноцентрических скоростей являются точками (в пространстве  $u_2 v_2 w_2$  имеется лишь по одному вектору  $V_2$  и  $U_2$ , независимо от точки входа), а также

в том, что многообразия выходных скоростей (селеноцентрических  $U_3$  и геоцентрических  $V_3$ ) являются сферами в соответствующем пространстве.

2. *Изменение многообразий входных скоростей с изменением начальных данных.* При изменении  $|i_1|$  и фиксированных  $h_1, r_{\pi}^{(1)}$  векторы входных скоростей геоцентрических  $V_2$  и селеноцентрических  $U_2$  образуют соответствующие конусы (см. рис. 4.6, а). Если при фиксированном  $r_{\pi}^{(1)}$  уменьшать энергию  $h_1$  до минимальной

$$h_m(r_{\pi}^{(1)}) = -\frac{2\mu_G}{r_{\pi}^{(1)} + r_L} \quad (5.2)$$

(в предположениях метода ТСД), то становится

$$V_{2r} = 0, \quad V_{2\tau} = V_2 =$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu_G}{r_L} + h_m} \approx$$

$$\approx V_{\pi}(r_{\pi}^{(1)}) \cdot \frac{r_{\pi}^{(1)}}{r_L} = V_{\tau}^* \quad (5.3)$$

и происходит вырождение  $V_2$ -конуса в круг радиуса  $V_{\tau}^*$  в плоскости  $uw$  (рис. 19.15) и вырождение  $U_2$ -конуса в соответствующий плоский угол (в той же плоскости  $uw$ ), охватывающий снаружи  $V_2$ -круг так, что круг вписан в угол и касается его в точках  $D$  и  $D'$  (рис. 19.15).

Если при фиксированной энергии  $h_1 \geq h_m$  и любых наклонениях  $-\pi < i < \pi$  уменьшать радиус  $r_{\pi}^{(1)}$  до нуля, то  $V_2$ -конус вырождается в единственный вектор  $V_{2r}$ , а  $U_2$ -конус — в соответствующий вектор

$$U_2|_{r_{\pi}^{(1)}=0} = V_{2r} + V_L(t_2). \quad (5.4)$$

3. *Область на сфере действия, запретная для точек входа облетных траекторий.* Покажем, что эти траектории не могут входить в СД в окрестности точки, проти-

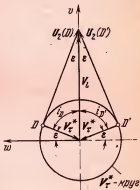


Рис. 19.15. Построение входных селеноцентрических скоростей максимального наклона к плоскости лунной орбиты при минимальной начальной энергии методом точечной сферы действия в трансверсальной плоскости.



торе  $ACB$ , где  $C$  — точка пересечения  $A$ -круга с  $B$ -кругом, так что запретная зона не занимает углы сектора  $ACB$ . Очевидно (рис. 19.15 и 19.16, б), что запретная зона располагается выше (по оси  $\eta$ ) своих граничных точек  $D$  и  $D'$ , отвечающих входу с минимальной скоростью  $V_2 = V_{2\tau}^*$  при наклонениях  $i_D = (90^\circ - \varepsilon)$  и  $i_{D_1} = (-90^\circ + \varepsilon)$  соответственно, где  $\sin \varepsilon = \frac{V_{2\tau}^*}{V_L} \approx \frac{1}{5}$ , т. е.  $\varepsilon \approx 12^\circ$  (см. рис. 19.4, а, где точкам типа  $D$  и  $D'$  в пространстве  $uvw$  отвечают точки  $E', F'$ ).

При возрастании начальных скоростей от минимальных получится недостающая нижняя часть  $EDF$  границы запретной зоны, симметричная для восходящих и нисходящих ветвей относительно плоскости  $\eta\xi$ . Наклонения вдоль нее близки к  $90^\circ$ . Таким образом, граница запретной зоны вокруг точек  $\xi = 0$ ,  $\eta = \rho_*$ ,  $\zeta = 0$  состоит из четырех кривых (рис. 19.16, б):  $EDF$  и симметричной  $E'D'F'$ , малого  $A$ -круга и большого  $B$ -круга.

## § 19.6. Энергетические особенности облетных траекторий

1. Оценка энергетического диапазона облетных траекторий методом ТСД. Из формулы (5.2) видно, что энергия  $h_m$  минимальна при  $r_\pi = 0$ :

$$\min_{r_\pi^{(1)}} h_m = -2\mu_G/r_L \approx -2 \text{ км}^2/\text{с}^2. \quad (6.1)$$

Если принять  $r_L$  за единицу длины, а  $V_L$  — за единицу скорости, то будет  $\mu_G = 1 - \mu_L/\mu_G$ . Так что в этих единицах имеем оценку  $h$  снизу

$$h \geq -2(1 - \mu_L/\mu_G) > -2. \quad (6.2)$$

Оценим  $h$  сверху. Сближение с Луной возможно при любых начальных скоростях  $V_1(h) > V_1(h_m)$ . Однако зависимости  $V_2(\Delta V_1)$  и  $U(\Delta V_1)$  приобретают асимптотический (в смысле  $\Delta V_1 = -\infty$ ) характер уже при  $\Delta V_1 = 0,5$  км/с, как можно видеть на рис. 4.5, вычисленном для траекторий облета Луны, причем для начального радиуса  $r_1 = r_G + 200$  км. Поэтому для облетных траекторий достаточно рассмотреть  $\Delta V_1 < 0,5$  км/с, т. е. согласно

(2.1)  $h_1 < 11,25 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . Округлим это ограничение и будем считать

$$h_1 < 10 \text{ км}^2/\text{с}^2. \quad (6.3)$$

При  $r_\pi = r_G + 200 \text{ км}$  величина  $V_\pi(r_\pi) = 11 \text{ км/с}$ , так что для  $h_1 = 10 \text{ км}^2/\text{с}^2$  линейный по  $h_1$  член ряда (2.3) составляет менее  $1/40$ , а квадратичный — менее  $10^{-4}$  и т. д. Из интегралов площадей и энергии

$$r_2 V_\tau = r_\pi V_\pi, \quad V_\pi = \sqrt{V_\pi^2(r_\pi) + h_1}. \quad (6.4)$$

Разложением радикала в ряд получим  $V_\tau = V_\tau^*$  при  $h_1 < 10 \text{ км}^2/\text{с}^2$  с погрешностью менее 5%. Здесь  $V_\tau^*$  есть константа:  $V_\tau^* \equiv \frac{r_\pi}{r_L} V_\pi(r_\pi) \approx 190 \text{ м/с}$ .

2. *Связь вариаций модулей скоростей КА вблизи Земли и вблизи Луны.* Из (6.4) варьированием интеграла площадей получим при постоянных радиусах  $r_2 \approx r_L$  и  $r_\pi$ :

$$\delta V_\tau = \frac{r_\pi}{r_L} \delta V_\pi, \quad (6.5)$$

где  $V_\pi$  — начальная скорость (в перигее). Поскольку  $r_\pi/r_L = V_\tau^*/V_\pi(r_\pi)$  из (6.4), то (6.5) представимо в виде

$$\delta V_\tau/V_\tau^* = \frac{\delta V_\pi}{V_\pi(r_\pi)}. \quad (6.5')$$

Поскольку в (6.5) отношение  $r_\pi/r_L$  мало, то столь же мало и отношение вариаций  $\delta V_\tau/\delta V_\pi$ . Поэтому ошибки в перигейной скорости практически не сказываются на компоненте  $V_\tau$  (если они не связаны с изменением  $r_\pi$  и  $r_2$ ). Например, ошибка  $\delta V_1 = 5 \text{ м/с}$  вызовет ошибку  $\delta V_\tau < 0,1 \text{ м/с}$ . Такими ошибками в приближенных оценках влияния разброса начальной скорости можно пренебречь.

Тогда, считая  $r_2 = r_L$  и используя обозначения

$$V_\tau = V_2 \sin \alpha_2, \quad V_* \equiv V_\tau \cos i_1, \quad U_* \equiv V_L - V_*, \quad (6.6)$$

получим из формулы (4.2.4)

$$U_2^2 = V_2^2 + U_*^2 - V_*^2. \quad (6.7)$$

Вследствие постоянства  $V_L$ ,  $i_1$  и  $V_\tau$  при варьировании  $V_1$  величины  $V_*$ ,  $U_*$  будут постоянны, так что имеем

$$U_2 \delta U_2 = V_2 \delta V_2. \quad (6.8)$$



Варьированием геоцентрического и селеноцентрического интегралов энергии

$$V_{\pi}^2 - \frac{2\mu G}{r_{\pi}^{(1)}} = V_2^2 - \frac{2\mu G}{r_2} \quad \text{и} \quad U^2 - \frac{2\mu L}{\rho} = U_2^2 - \frac{2\mu L}{\rho_2} \quad (6.9)$$

при  $r_2 = r_L$ ,  $\rho_2 = \rho_*$  и фиксированных расстояниях  $r_{\pi}$  и  $\rho$  получим

$$V_2 \delta V_2 = V_{\pi} \delta V_{\pi}, \quad U \delta U = U_2 \delta U_2. \quad (6.10)$$

Тогда из (6.8)–(6.10) при постоянных  $r_{\pi}$ ,  $r_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho$  будем иметь

$$U \delta U = V_{\pi} \cdot \delta V_{\pi}. \quad (6.11)$$

Таким образом, получена теорема:

*Для облетных траекторий с фиксированными радиусами геоцентрическим  $r_{\pi}$  и селеноцентрическим  $\rho$  отношение вариаций относительных скоростей на этих радиусах (соответственно относительно Земли и Луны) обратно пропорционально отношению этих скоростей.*

3. Уменьшение энергетического диапазона для двух классов траекторий облета с возвращением к Земле. При фиксированной величине селеноцентрической скорости  $U$  входа в СД (выхода из СД) и всевозможных наклонениях — начальном  $i_1$  и конечном  $i_k$  рассмотрим в первую очередь такие возвращающиеся к Земле облетные траектории, по которым движение к СД является восходящим по отношению к Земле, а движение от СД — нисходящим. Облет по таким траекториям требует наименьшего времени. Соответствующие конусы скоростей  $V_2$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $V_3$  для симметрии чертежа представлены на одной и той же сфере радиуса  $U$  (рис. 19.17) сплошными линиями (для случая, когда  $r_{\pi}^{(1)} = r_{\pi}^{(k)}$ ). При этом начало координат  $u_3 v_3 w_3$  для отсчета скоростей  $V_3$  смещено из центра  $U_3$ -сферы по оси  $v$  на вектор  $-V_L$  (вместо того, чтобы  $V_3$ -сферу получить смещением  $U_3$ -сферы на вектор  $V_L$ ).

Благодаря этому видно, что пара векторов  $(U_2^{(M)}, U_3^{(M)})$ , угол между которыми  $\alpha_M = \max_{i_1, i_k} \alpha$ , принадлежит

плоскости  $u, v$  лунной орбиты. Проекции векторов  $U_2$ ,  $U_3$  на ось  $u$  имеют обратные знаки. Поэтому соответствующие им векторы  $V_2$  и  $V_3$  имеют радиальные компоненты разных знаков.

Соответствующие наклонения — геоцентрические  $i_1 = i_k = 0$ , селеноцентрическое  $i' = \pi$  (отсчитываются они в соответствующих перицентриях в диапазоне  $(-\pi, \pi)$ ). Соответствующие траектории лежат в плоскости  $\Pi_L$  лунной орбиты, и влияние Луны для них максимально по сравнению с ее влиянием для других траекторий облета

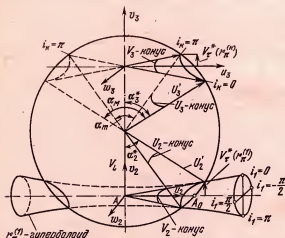


Рис. 19.17. Конусы геоцентрических и селеноцентрических входных  $V_2, U_2$  и выходных  $V_1, U_1$  скоростей в пространствах скоростных компонент  $u_2 v_2 w_2$  и  $u_3 v_3 w_3$  соответственно.

с возвращением к Земле на расстояние  $r_\pi = r_\pi^{(k)}$ . (Заметим, что при  $r_\pi^{(k)} = r_\pi^{(1)}$  соответствующая траектория симметрична относительно прямой Земля — Луна.)

Из рис. 19.17 видно также, что пара векторов  $U_2, U_3$ , между которыми угол  $\alpha_m = \min_{i, i_k} \alpha$ , тоже принадлежит плос-

кости  $\Pi_L$  лунной орбиты, им соответствуют геоцентрические наклонения  $i_1 = i_k = \pi$  и селеноцентрическое  $i' = \pi$ . Соответственно с ростом значений  $U$  от минимальных (вместе с ростом начальной геоцентрической энергии) траектория облета (с возвращением к Земле) раньше станет пересекать поверхность  $\rho = \rho_L$  Луны при  $i_1 = i_k = 0$ , чем при  $i_1 = i_k = \pi$ . Из рис. 19.17 находим

$$\cos \alpha_{2,3}^* = \frac{V_L \mp V_\pi^*(r_\pi^*)}{U}, \quad \alpha_{M,m} = \alpha_2^* + \alpha_3^*, \quad (6.12)$$

где  $r_{\pi}^*$ ,  $r_{\pi}^{(1)}$ ,  $r_{\pi}^{(K)}$ , верхний знак отвечает  $i_1 = i_K = 0$  (т. е.  $\alpha_m$ ), а нижний  $i_1 = i_K = \pi$  (т. е.  $\alpha_m$ ). Из условия  $\sin(\alpha/2) = 1/e'$ , где  $e'$  — эксцентриситет селеноцентрической гиперболы  $\gamma_{2,3}$ , можно получить [1—1968, стр. 34] формулу

$$\rho_{\pi} = \frac{\left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \mu_L}{U^2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (6.13)$$

По формулам (6.12), (6.13) находим, увеличивая постепенно значения  $U$  (от  $U_m = V_L - V_{\tau}(r_{\pi}^{(1)})$ ), что для  $i_1 = i_K = 0$  становится  $\rho_{\pi} = \rho_L$  при  $U = U'$ , где  $1,1 < U' < 1,2$  км/с, и для  $i_1 = i_K = \pi$  — при  $U = U''$ , где  $1,3 < U'' \leq \sqrt{2}V_L = 1,43$  км/с. Здесь бралось  $r_{\pi}^{(K)} = \frac{1}{50} > r_{\pi}^{(1)} = \frac{1}{60}$ ;  $V_{\tau}^*(r_{\pi}^{(K)}) = 0,2$  км/с. Таким образом, самые кратковременные траектории облета с возвращением на радиус  $r_{\pi}^K = r_L/50 \approx 7700$  км имеет смысл рассматривать лишь при значениях  $U < 1,43$  км/с.

Таким значениям, как видно из рис. 4.5, отвечают эллиптические начальные скорости. Следовательно, существуют при тех же  $h_1$ ,  $i_1$ ,  $r_{\pi}^{(1)}$  облетные траектории, по которым движение к Луне является нисходящим, а от Луны — восходящим по отношению к Земле с теми же по величине скоростями  $V_2$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $V_3$ , симметричными рассмотренным в скоростном пространстве  $uvw$ . Значит, реализуемый энергетический диапазон для них тот же, только безапогейные дуги  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,K}$  заменяются на дуги, содержащие каждая апогей.

Для облета с возвращением на исходное перигейное расстояние  $r_{\pi}^{(K)} = r_{\pi}^{(1)}$  без изменения знака радиальной геоцентрической скорости в результате сближения с Луной наибольшие начальные скорости потребуются, как видно из рис. 19.17, в том случае, когда движение происходит в плоскости лунной орбиты с заменой гиперболической скорости  $V_2$  и наклона  $i_1 = 0$  на (почти) параболическую скорость  $V_3 = V_{\pi}(r_L)$  и наклонение  $i_K = \pi$  (верхний пункт на рис. 19.17). Параметры такого перехода найдем из рис. 4.5, используя  $V_3 = V_{\pi}(r_L)$  вместо  $V_2$ ; соответствующие значения  $U_2 = U_3 \approx 1,9$  км/с нахо-

дим по более высокой кривой  $U^-(\Delta V_1)$  при  $\Delta V_1 = 0$  (так как  $V_2|_{i_1=0} > V_2|_{i_1=\pi}$  для  $U = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ). Соответственно по значению 1,9 км/с на более низкой кривой  $U^+(\Delta V_1)$  найдем  $\Delta V_1 \approx 0,035$  км/с, получим, согласно (2.1), соответствующую энергию  $h_1 \approx 0,77$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

Можно убедиться непосредственной проверкой (предоставляем ее читателю), что между вектором  $U_2|_{i_1=0}$  и вектором  $U_3|_{i_1=\pi}$  (пунктирными на рис. 19.17) угол  $\alpha$  гораздо меньше предельного угла  $\alpha_{\text{пред}} > 50^\circ$  (отвечающего величине  $U = 1,9$  км/с на рис. 4.10), так что рассмотренный облет с возвращением физически реализуем.

Кроме рассмотренных, возможны еще облеты с возвращением после сближения с Луной на нисходящей ветви  $\Gamma_{2,3}$  траектории. Для них, очевидно, начальная геоцентрическая энергия  $h_1$  должно быть отрицательной.

Таким образом, для траекторий облета с возвращением к Земле должно быть  $h_1 < 0,77$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

## Глава 20

### ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ОБЛЕТА ЛУНЫ С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

#### § 20.1. Траектории облета с возвращением к Земле в целом

Как и в задаче возвращения с Луны или с орбиты ИСЛ (раздел III), рассмотрим с помощью метода ТСД сначала задачу облета Луны с возвращением в сферу заданного радиуса  $r_1 \ll r_L$ . За осевую траекторию  $\Gamma_N$  рассматриваемого в этой задаче пучка траекторий естественно принять такую, у которой участок  $\Gamma_{3,k}$  движения к Земле является радиальным. При фиксированных начальных энергии  $h_1$ , радиусе перигея  $r_n$ , наклонении  $i_1$ , знаках  $s_2$  и  $s_3$  геоцентрических радиальных скоростей в точках входа и выхода на СД и времени  $t_n$  прохождения периселения такая траектория, если она существует, единственна. Ее действительно можно назвать осью пучка траекторий  $\Gamma_{3,k}$  возвращения к Земле, так как при достаточно малой величине  $r_1$  будет мала и трансверсальная компонента  $V_1^*$  (рис. 19.17) геоцентрической скорости выхода из СД Луны. Конус направлений  $V_{3,k}^0$  будет узок и осесимметричен, причем соответствующий траектории  $\Gamma_N$  вектор  $V_3$  будет направлен по оси  $V_3^0$ -конуса.

Рассмотрим многообразие векторов входной скорости  $V_2(i_1)$ , соответствующих фиксированным значениям  $r_n^{(1)}$  и  $U = |U_2|$  при различных значениях  $-\pi < i_1 < \pi$ . На рис. 20.1 это многообразие представлено  $V_2$ -конусом, соответствующим  $s_2 > 0$  (т. е. сближению на восходящей ветви). Строится этот конус по  $r_n^{(1)}$  так же, как строился в § 19.4. По-прежнему осью  $r_n^{(1)}$ -гиперболоида будет в плоскости  $u_2$  прямая  $A_2A_0$ , т. е. ось  $u_2$ . Назовем эту ось осью  $V_2$ -конуса, по  $V_2$ -конусу построим  $U_2$ -конус



имеет модуль  $|V_{3N}^{(s)}| \geq V_n(r_L) = \sqrt{2}V_L$ , и два решения — при обратном неравенстве, которое в силу того, что  $U_{3N}^2 = V_{3N}^2 + V_L^2$ , дает  $U_N < \sqrt{3}V_L$ . Здесь индексом  $N$  отмечаются параметры осевой траектории.

Если не задавать и знак  $s_2$ , то получится еще одно удвоение числа решений при  $h_1 < 0$ . При  $h_1 \geq 0$  это число не удваивается (поскольку сближение со знаком  $s_2 < 0$  невозможно ввиду отсутствия нисходящих ветвей).

Заметим, что в случае  $h_1 < 0$ , т. е.  $V_{2N} < \sqrt{2}V_L$ , не обязательно существует решение с  $s_3 > 0$ , так как согласно (4.24) в этом случае при достаточно малых  $|h_1|$  может стать  $U_2^2 > 3$  при  $|i_1| > \pi/2$ .

Аналогично при  $h_1 > 0$  (т. е.  $V_2 > V_L\sqrt{2}$ ) не обязательно отсутствует решение с  $s_3 > 0$ , так как согласно (4.24) при достаточно малых  $|h_1|$  может стать  $U_2^2 < 3$  при  $|h_1| < \pi/2$ .

Заметим еще, что осевые траектории, отличающиеся лишь знаком  $j_1 = \text{sign } i_1$ , симметричны относительно плоскости лунной орбиты. Возможна ситуация (например, при запуске КА из высоких широт), когда реализуемые сплошные интервалы значений  $i_1 > 0$  и  $i_1 < 0$  разделены нереализуемым интервалом, содержащим значение  $i_1 = 0$ . Соответствующие реализуемые симметричные классы траекторий удобно различать знаком  $j_1$ . Таким образом, наибольшее возможное число различных классов решений при фиксированных значениях  $h_1, r_\pi^{(1)}, |i_1|, t_\mu$  равно 8. Если же задать  $t_1$  полностью, т. е. со знаком, то это число равно четырем. Их будем обозначать  $(s_2 > 0, s_3 > 0)$ ,  $(s_2 < 0, s_3 < 0)$ ,  $(s_2 < 0, s_3 > 0)$ ,  $(s_2 > 0, s_3 < 0)$ .

Для решений всех классов, учитывая, что кинетический момент  $C_3 = 0$ , получим из (5.2.1) простую формулу (учитывая, что в методе ТСД  $h_2 = h_1, C_2 = C_1, h_k = h_3$ )

$$h_k = h_1 - 2C_1 \cos i_1; \text{ где } C_1 \approx \sqrt{2\mu_G r_\pi^{(1)}}.$$

Заметим, что при  $s_2 = -s_3$  наклонения  $i'$  селеноцентрического участка  $\gamma_{2,3}$  траектории к плоскости  $\Pi_L$  лунной орбиты невелики, каковы бы ни были наклонения  $i_2$ , поскольку вектор  $U_3 = V_3 - V_L$  параллелен  $\Pi_L$  (в силу того, что  $V_3$  и  $V_L$  параллельны  $\Pi_L$ ), а вектор  $U_2$ , как сей-

час будет показано, образует небольшой угол с плоскостью  $\Pi_L$  и не близок к коллинеарности с вектором  $U_3(u_N, V_L, 0)$ , где  $u_N = \pm V_{3N}$  (рис. 20.1).

Действительно, как было показано в гл. 19, для рассматриваемых траекторий сближения трансверсальная компонента  $V_{2\tau} < V_{\tau}^* \approx 0,19$  км/с невелика, причем у вектора  $U_2$  проекция  $w_2 \leq V_{2\tau}$ , а нормаль к плоскости  $\Pi'$  селеноцентрического движения имеет направление

$$K = U_3 \times U_2 = (-w_2 V_L, u_N w_2, V_L u_2 - u_N v_2),$$

(согласно (4.2.3)), откуда

$$|\operatorname{tg} i'| = \sqrt{\frac{K_u^2 + K_v^2}{K_w^2}} = \left| \frac{w_2}{V_L u_2 - u_N v_2} \right| \sqrt{V_L^2 + u_N^2} = \left| \frac{w_2 \sqrt{1 + u_N^2/V_L^2}}{u_2 - u_N (v_2/V_L)} \right|.$$

Имеем  $V_L - V_{2\tau} < v_2 < V_L + V_{2\tau}$ , где  $V_{2\tau} < V_{\tau}^*$ . Поэтому величина  $v_2$  — порядка  $V_L$ , и при  $s_2 = -s_3$  будет  $u_2$  не близко к  $(v/V_L)u_N$  (т. к. их знаки различны), т. е. будет  $|\operatorname{tg} i'|$  того же порядка, что и  $w_2/V_L$ , т. е. невелик. В случае  $s_2 = s_3$  знаки  $u_2$  и  $u_N$  одинаковы, и  $\operatorname{tg} i'$  может быть малым. Это можно видеть из анализа входных и выходных скоростей в пространстве  $uvw$  их компонент.

Поскольку векторы  $U_{3N}^{(n)}$  и  $U_{3N}^{(b)}$  параллельны плоскости  $\Pi_L$  лунной орбиты, то они в плоскости  $\Pi'$  идут по направлению линии узлов селеноцентрического движения. Из рис. 20.1 видно, что вектор  $U_{3N}^{(n)}$  далек от коллинеарности с каждым вектором  $U_2$ -конуса. Поскольку этот конус узок и симметричен относительно плоскости  $u_2 v_2$ , то каждая плоскость  $\Pi'_n$  пары векторов  $(U_2(i_1), U_{3N}^{(n)})$  близка к плоскости  $u_2 v_2$  (лунной орбиты).

Иначе ведет себя плоскость  $\Pi'_b$  пары векторов  $U_2(i_1), U_{3N}^{(b)}$ , которые почти коллинеарны, так как линия действия вектора  $U_{3N}^{(b)}$  проходит внутри узкого  $U_2$ -конуса (см. штриховое продолжение  $OA_0$  в направлении вектора  $-U_{3N}^{(b)}$ ). Рассмотрим соответствующий класс  $s_2 > 0, s_3 > 0$  подробнее. Когда геоцентри-







орбиты на небольшой угол, так что ее наклонение  $i'$  колеблется около  $\pi$  (поскольку весь пучок  $U_{3N}^{(H)}$ -траекторий обходит Луну по часовой стрелке — рис. 20.3). При этом с ростом  $i_1$  от нуля  $i'$  растет от  $\pi$  менее чем на  $15^\circ$ , а затем убывает до  $\pi$  (при  $i_1 = \pi$ ). При убывании  $i_1$  от 0 до  $-\pi$   $i'$  изменяется симметричным образом. Точки входа и точки выхода проходят при этом на СД овалы  $(GMT)_{вх}$  и  $(GMT)_{вых}$ , симметричные относительно плоскости  $P_L$  лунной орбиты. Овал  $(GMT)_{вх}$  гораздо больше овала  $(GMT)_{вых}$  (рис. 20.3) потому, что изменение угла  $\alpha(i_1)$  между векторами  $U_2(i_1)$  и  $U_{3N}^{(H)}$  (с изменением  $i_1$ ) реализуется при рассматриваемом расположении вектора  $U_{3N}^{(H)}$  относительно  $U_2$ -конуса главным образом за счет изменения точки входа.

Поскольку при всех  $i_1$  углы между  $U_2(i_1)$  и  $U_{3N}^{(H)}$  — порядка  $\pi/2$ , то все траектории тесным пучком проходят близко от центра Луны со стороны, невидимой с Земли, причем наиболее близкая траектория реализуется при  $i_1 = 0$ , а наименее близкая — при  $|i_1| = \pi$ . Времена полета для траекторий этого класса близки минимальным — порядка удвоенного времени полета Земля — СД.

В случае  $s_2 < 0$  (сближение с Луной на нисходящей по отношению к Земле ветви) направления векторов скоростей  $V_2$ ,  $U_2$  и траектории будут симметричны представленным на рис. 20.1—20.3. Опять имеем два принципиально разных класса: с сохранением и с изменением знака радиальной скорости после сближения с Луной ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 < 0$ ) и ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 > 0$ ).

Класс ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 < 0$ ) аналогичен классу ( $s_2 > 0$ ,  $s_3 > 0$ ) предыдущего случая, времена полета для него — того же порядка, его номинальные траектории тоже образуют трубку, содержащую внутри Луну, так что Луна при всевозможных наклонениях  $-\pi < i_1 < \pi$  обходится траекториями со всех сторон.

Класс ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 > 0$ ) по характеру движения внутри СД аналогичен классу ( $s_2 > 0$ ,  $s_3 < 0$ ): его номинальные траектории образуют тесный пучок вблизи плоскости лунной орбиты и обходят Луну с одной стороны. Однако это — сторона, видимая с Земли. Времена полета по траекториям класса ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 > 0$ ) могут сколь угодно превосходить время полета по траектории класса ( $s_2 > 0$ ,

$s_3 < 0$ ), так как на траектории последнего класса не проходятся апогеи, а на траектории первого — проходятся, причем дважды.

Плоские траектории, возвращающиеся к Земле и не охватывающие Луну в системе координат, вращающейся вместе с прямой Земля — Луна, в [2—1957] были названы *долетными* — в отличие от плоских *облетных*, охватывающих Луну. Осевые плоские облетные траектории не могли переходить в долетные при непрерывном изменении определяющих параметров, однако пространственные — могут, как, например, переходят траектории внутри классов ( $s_2 < 0$ ,  $s_3 < 0$ ) и ( $s_2 > 0$ ,  $s_3 > 0$ ) при непрерывном изменении наклона  $i_1$ . Это — принципиальное отличие плоских траекторий от пространственных.

Рассмотренная картина имеет место, если энергия  $h_1$  или начальная скорость  $V_1$  таковы, что  $U > V_L$ . Когда  $V_1$  уменьшается, то радиус  $V_3$ -сферы  $U$  уменьшается, соответственно укорачиваются векторы  $V_{3N}^{(H)}$  и  $V_{3N}^{(B)}$ , соответственно сближаются направления  $U_{3N}^{(H)}$  и  $U_{3N}^{(B)}$ , пока они не сольются при  $U = V_L$ . При этом будет  $V_{3N}^{(B)} = V_{3N}^{(H)} = 0$ , и при меньших энергиях (начальных скоростях) рассмотренных осевых траекторий не существует.

## § 20.2. Траектории облета Луны с заданным наклоном и радиусом перигея возвращения

Как показано в гл. 5, траектория сближения определяется однозначно, если кроме наклона  $i_k$  и радиуса перигея  $r_{\pi}^{(H)}$  задан знак  $s_3$  радиальной геоцентрической скорости на участке  $\Gamma_{3,k}$  возвращения, время  $t_k$  прохождения периселения на участке  $\gamma_{2,3}$  в СД, знак  $s_2$  и параметры  $t_1, r_{\pi}^{(1)}, h_1$  (полная энергия) на участке  $\Gamma_{1,2}$  полета к СД. Примем предположения метода ТСД. Поскольку задан радиус перигея  $r_{\pi}^{(H)}$ , то задан  $r_{\pi}$ -гиперболоид выходных скоростей  $V_3$ , и кривая  $S$  его пересечения с  $V_3$ -сферой содержит вектор  $V_3$  искомой траектории. Для его получения надо найти пересечение кривой  $S$  с заданной полуплоскостью  $i = i_k$ . Такое пересечение будет только одно, поскольку параметры  $r_{\pi}^{(1)}, h_1$  определяют  $C_1$ , а вмес-

те с  $i_1$ ,  $s_2$  определяют векторы входных скоростей  $V_2$  и  $U_2$ ,  $U_3$ -сферу и  $V_3$ -сферу. Знак  $s_3$  определяет нужную половину  $r_{\pi}^{(k)}$ -гиперболоида, параметр  $i_3 = i_k$ , выделяет на ней один нужный меридиан, а точка его пересечения с  $V_3$ -сферой даст искомый вектор  $V_3$ , определяющий вместе с  $r_3 \approx r_L$  искомую траекторию облета с возвращением.

Если не задавать  $j_k = \text{sign } i_3 = \text{sign } i_k$ , то число решений удваивается по сравнению с числом решений предыдущей задачи (где этот знак не задавался, поскольку само наклонение  $i_k = i_3$  не имеет смысла при  $r_{\pi}^{(k)} = 0$ , т. е. для чисто радиального движения). Оно может еще раз удвоиться, если не задавать  $s_2$ , и еще раз удвоится, если не задавать  $j_1 = \text{sign } i_2 = \text{sign } i_1$ . Значит наибольшее число решений при фиксированных  $h_1, r_{\pi}^{(1)}, |i_1|, t_{\mu}, r_{\pi}^{(k)}, |i_k|$  равно шестнадцати. При изменении этих параметров получаем соответственно 16 классов траекторий. Эти классы с помощью другой методики, может быть, не столь геометричной, получены в [3—1967] и [5—1970]. Каждый класс удобно задавать набором  $(s_2, s_3, j_1, j_k)$  знаков  $s_2, s_3$  геоцентрических входных и выходных радиальных скоростей и знаков  $j_1, j_k$  наклонений.

Как и в предыдущей задаче, резко различаются в СД траектории с  $s_3 = s_2$  и  $s_3 = -s_2$ . При фиксированном  $j_k < 0$  изменением  $i_1: -\pi < i_1 < \pi$  — получается пучок траекторий, похожий в случае  $s_3 = -s_2$  на пучок при  $r_{\pi}^{(k)} = 0$  и  $s_3 = -s_2$ . В случае  $s_3 = s_2$  пучок траекторий похож на соответствующий пучок предыдущей задачи лишь при  $r_{\pi}^{(k)} < r_{\pi}^{(1)}$ . Если же  $r_{\pi}^{(k)} > r_{\pi}^{(1)}$ , то картина в пространстве  $u, v, w$  получается качественно симметричной картине случая  $r_{\pi}^{(1)} > r_{\pi}^{(k)}$ . Она получается и количественно симметричной, если положить  $r_{\pi}^{(1)} = 0$ .

Симметрия здесь в том, что вместо  $U_2$ -конуса имеется единственный вектор  $U_2$ , а вместо единственного вектора  $U_3$  имеется  $U_3$ -конус осевых векторов. Действительно, рассмотрим различные значения  $-\pi < i_k \leq \pi$ . Получим соответствующие конусы векторов  $V_3(i_k)$  и  $U_3(i_k)$  в пространстве скоростей (рис. 20.4) и соответственно трубку траекторий, пересекающих СД (рис. 20.5). Эта трубка, как и в случае  $r_{\pi}^{(k)} = 0$ , содержит Луну, но, в отличие от этого случая, знаки наклонений селеноцентрического дви-



он будет расходящимся (в той же мере, в какой пучок на рис. 20.3 является сходящимся).

В случае входа в СД на нисходящей по отношению к Земле ветви участка  $\Gamma_{1,2}$ , т. е. когда  $s_2 < 0$  и  $s_3 < 0$  направления движений (векторов и стрелок) на рис. 20.4 и

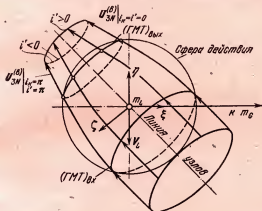


Рис. 20.5. Облетные траектории с участками возвращения всевозможных наклонов обходят Луну со всех сторон (в случае чисто радиальных по отношению к Земле траекторий сближения с Луной).

20.5 заменяются на симметричные (относительно плоскостей  $uv$  и  $\eta\xi$  соответственно).

Время полета по облетным траекториям с  $r_L \gg r_{\pi}^{(K)} > r_{\pi}^{(1)}$  являются примерно такими же, как и при соответствующих комбинациях знаков  $s_2$  и  $s_3$  в случае  $r_{\pi}^{(K)} = 0$ . Эти знаки определяют, сколько (0, 1 или 2) апогеев содержит облетная траектория (и если задано полное время полета по ней, то они приблизительно определяют отношение  $T_{1,2}/T_{3,4}$  времен полета к Луне и от Луны).

Рассмотренная качественная картина в пространстве  $uvw$  и в СД имеет место, если начальная энергия  $h_1$  такова, что скорость  $U > V_L + V_{\tau}^*(r_{\pi}^k)$ . Когда  $h_1$  уменьшается, то вследствие уменьшения скорости  $U$  укорачиваются векторы  $V_{3N}^{(n)}$  и  $V_{3N}^{(n)}$ ; соответственно сближаются направления тех из них, которые ближе к оси  $v$ . При  $U = V_L + V_{\tau}^*(r_{\pi}^{(K)}) \equiv U^*$  эти векторы совпадают, совпадут

и соответствующие им векторы  $U_{2N}^{(n)}$  и  $U_{3N}^{(n)}$ . При меньших величинах  $h_1$  будет  $U < U^*$ , и облетные траектории будут охватывать сферу  $r = r_{\pi}^{(n)}$  не со всех сторон, а при  $U = V_L$  они будут охватывать лишь полусферу, имеющую полюсом направление  $V_L(t_3)$ . При энергии  $h_*$ , для которой  $U = V_L - V_{\pi}^*(r_{\pi}^{(n)})$ , они перестают касаться сферы  $r = r_{\pi}^{(n)}$  так что при  $h < h_*$  осевых траекторий с  $r_{\pi}^{(n)} = r_{\gamma}$  не существует.

### § 20.3. Приближенный расчет параметров траектории облета Луны (с возвращением) за заданное время

Предполагается, что задано суммарное время  $T_{\Sigma}$  полета (к Луне и обратно). Пусть время  $T_{2,3}$  пребывания в СД Луны пока не выделяется: одна его половина включается во время  $T_{1,2}$  полета к Луне, а другая — во время  $T_{3,\kappa}$  возвращения (время  $T_{2,3}$  можно выделить позднее, когда определятся  $T_{1,2}$  и  $T_{3,\kappa}$ ,  $h_1$ ,  $h_{\kappa}$  и селеноцентрическая скорость входа  $U$ , в основном определяющая  $T_{2,3}$ ).

Приближенный расчет параметров облетной траектории при заданных значениях  $r_{\pi}^{(1)}$ ,  $i_1, s_2, s_3, i_{\kappa}, r_{\pi}^{(\kappa)}$ ,  $T_{\Sigma}$  делается в рамках ТСД с помощью приближенного критерия Тиссерана в форме (5.1.4)

$$\begin{aligned} h_1 - 2C_1 \cos i_1 &= h_{\kappa} - 2C_{\kappa} \cos i_{\kappa}, \\ C_1 &\approx \sqrt{2\mu_G r_{\pi}^{(1)}}, \quad C_{\kappa} \approx \sqrt{2\mu_G r_{\pi}^{(\kappa)}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

и с помощью аппроксимации зависимостей  $h_1(T_{1,2})$ ,  $h_{\kappa}(T_{3,\kappa})$ , как в разделе III (рис. 15.2), но полиномами второго порядка:

$$h = h_0 + k(T - T_0)^2. \quad (3.2)$$

Отношение  $T_{1,2}/T_{3,\kappa}$  зависит в основном от выбора знаков  $s_2$  и  $s_3$ .

Рассмотрим сначала случай, когда знаки  $s_2$  и  $s_3$  противоположны и еще энергии  $h_1$  и  $h_{\kappa}$  различаются не сильно, так что формула (3.2) с одними и теми же коэффициентами  $h_0$ ,  $T_0$ ,  $k$  даст  $h_1$  и  $h_{\kappa}$  с достаточной точностью. Этот случай имеет место, например, когда  $s_2 > 0$ ,  $s_3 < 0$ , причем траектория полета к Луне начинается с



низкой орбиты ИСЗ, а кончается пологим входом в атмосферу. Здесь  $r_{\pi}^{(K)}$  и  $r_{\pi}^{(1)}$  различаются на величину порядка 100 км, что мало по сравнению с  $(r_{\pi}^{(1)} + r_{\pi}^{(K)})/2 \approx 6500$  км. Считая  $T_{1,2}$  и  $T_{3,K}$  неизвестными, кроме условия  $T_{1,2} + T_{3,K} = T_{\Sigma}$ , имеем из (3.1) и (3.2) соотношение для их определения:

$$2(C_K \cos i_K - C_1 \cos i_1) = k[(T_{3,K} - T_0)^2 - (T_{1,2} - T_0)^2]. \quad (3.3)$$

Учитывая, что  $T_{3,K}^2 - T_{1,2}^2 = T_{\Sigma} \Delta T$ , где  $\Delta T = T_{3,K} - T_{1,2}$ , получим

$$\Delta T = 2(C_K \cos i_K - C_1 \cos i_1)/[k(T_{\Sigma} - 2T_0)]. \quad (3.4)$$

Видим, что  $\Delta T$  пропорционально разности  $\Delta C_z = C_{zK} - C_{z1}$  проекций кинетических моментов на ось  $z$ .  
Решение

$$2T_{1,2} = T_{\Sigma} - \Delta T; \quad 2T_{3,K} = T_{\Sigma} + \Delta T \quad (3.5)$$

позволяет найти  $h_1(T_{1,2})$  и  $h_K(T_{3,K})$  из (3.2); оно не зависит от  $h_0$ , а зависит только от  $k$  и  $T_0$ . Это решение годится и в случае  $s_2 = s_3$ , но только при условии, что одно из слагаемых в  $T_{\Sigma}$  не намного меньше, а другое — не намного больше времени  $T'$  полета по полуэллипсу Гомана, хотя в этом случае точность аппроксимации (3.2) понизится (по сравнению со случаем близких  $T_{3,K}$  и  $T_{1,2}$ ) из-за увеличения интервала аппроксимации.

Если же заданное время  $T_{\Sigma}$  относительно велико, и времена  $T_{1,2}$  и  $T_{3,K}$  находятся по разные стороны от абсциссы точки перегиба на кривой  $h(T)$  (рис. 15.2), то для аппроксимации этой кривой в окрестностях значений  $T_{1,2}$  и  $T_{3,K}$  потребуются две разные формулы вида (3.2), т. е. с разными тройками коэффициентов

$$(h_0^{(K)}, T_0^{(K)}, k_0^{(K)}) \neq (h_0^{(1)}, T_0^{(1)}, k_0^{(1)}). \quad (3.6)$$

В этом случае вместо (3.3) получим

$$2(C_z^{(K)} - C_z^{(1)}) = (h_0^{(K)} - h_0^{(1)}) + \\ + [k^{(K)}(T_{3,K} - T_0^{(K)})^2 - k^{(1)}(T_{1,2} - T_0^{(1)})^2], \quad (3.7)$$

откуда, подставляя  $T_{3, \kappa} = T_{\Sigma} - T_{1, 2}$ , получаем уравнение

$$(k^{(\kappa)} - k^{(1)}) T_{1, 2}^2 + 2PT_{1, 2} + Q = 0, \quad (3.8)$$

$$P = k^{(\kappa)} T_0^{(\kappa)} + k^{(1)} T_0^{(1)} - k^{(\kappa)} T_{\Sigma},$$

$$Q = (h^{(\kappa)} - h^{(1)}) - 2(C_z^{(\kappa)} - C_z^{(1)}) + \\ + [k^{(\kappa)} (T_0^{(\kappa)})^2 - k^{(1)} (T_0^{(1)})^2 + k^{(\kappa)} T_{\Sigma}^2 - 2k^{(\kappa)} T_0^{(\kappa)} T_{\Sigma}].$$

Отсюда получаем решение

$$T_{1, 2} = \mp Q / [\sqrt{P^2 - (k^{(\kappa)} - k^{(1)}) Q \pm P}], - \\ T_{3, \kappa} = T_{\Sigma} - T_{1, 2}, \quad (3.9)$$

причем надо брать верхние знаки при  $P > 0$  и нижние при  $P < 0$ , чтобы это решение переходило в (3.5) при  $P \rightarrow 0$ .

Подставляя найденные значения  $T_{1, 2}$ ,  $T_{3, \kappa}$  в соответствующие формулы вида (3.2), получим  $h^{(1)}$ ,  $h^{(\kappa)}$ . Расчет величин  $h_1$  и  $h_{\kappa}$  можно уточнить, если вместо  $C = \sqrt{2\mu_0} r_{\kappa}$  в (3.7) брать  $C = r_{\kappa} \sqrt{2\mu_0/r_{\kappa}} + h$ , повторив предварительно расчет коэффициентов (3.6).

В данном методе начальная энергия  $h_1$  и время  $T_{1, 2}(h_1)$  определяются фиксированными значениями  $r_{\kappa}^{(1)}$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $r_{\kappa}^{(\kappa)}$ ,  $T_{\Sigma}$  и заданными наклонениями  $i_1$ ,  $i_{\kappa}$  к плоскости лунной орбиты, а момент  $t_{\kappa}$  остается произвольным. Но на практике заданы обычно наклонения  $i_0^{(1)}$  и  $i_0^{(\kappa)}$  к экватору для трассы запуска и трассы возвращения КА. Из желания наибольшей надежности работы аппаратуры КА время  $T_{\Sigma}$  обычно задается близким к минимальному для определяемого класса облетных траекторий.

Дело в том, что реализовать заданное время  $T_{\Sigma}$  можно лишь с дискретностью 0,5 сут., так как плоскость траектории возвращающегося от Луны КА может лишь два раза в звездные сутки совмещаться с плоскостью наземной трассы возвращения, совершающей суточное движение вместе с Землей. Таким образом, время  $T_{\Sigma}$  заранее известно с погрешностью  $\delta T_{\Sigma} < 0,5$  сут. С соответственно меньшей погрешностью находятся данным методом время  $T_{1, 2}$  и  $T_{3, \kappa}$  для выбранных знаков  $s_2$  и  $s_3$  и средних значений наклонений  $i_1$ ,  $i_{\kappa}$  к плоскости лунной орбиты.

Для выбранной даты  $d_1$  старта приближенно находится дата  $d_n = d_1 + T_{1,2}$  сближения, а по ней — приближенное положение  $u_L(d_n)$  Луны во время сближения с КА. Затем находятся отличные от средних значения наклонения  $i_1 = i_1(i_0^{(1)}, u_L)$  и  $i_n = i_n(i_0^{(n)}, u_L)$  к плоскости лунной орбиты (как в § 9.1). Теперь методом настоящего параграфа находится более точное значение  $T_{1,2}$ , а по нему уточняются дата  $d_n$  сближения с Луной и соответствующие значения  $u_L$ ,  $i_1$  и  $i_n$ .

Хотя эти итерации можно повторять, но дальнейшие уточнения целесообразно делать иначе, используя долготную привязку участков полета к Луне и от Луны в рамках метода ТСД, т. е. находя моменты  $t_1$  запуска,  $t_n$  сближения и  $t_k$  возвращения внутри соответствующих дат  $d_1$ ,  $d_n$  и  $d_k$  из условий старта и возвращения КА по соответствующим географически заданным наземным трассам. После этого расчет облетных траекторий (участков  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\gamma_{2,3}$ ,  $\Gamma_{3,k}$ ) можно вести так, как это делается на первом этапе в гл. 5. Так же находится и время  $T_{2,3}$  полета внутри СД, находятся геоцентрические радиусы  $r_2$  и  $r_3$  точек входа и выхода на СД. Дальнейшие уточнения можно делать методом ИВ, а затем и точным методом (см. гл. 24).

Если предположить, что  $|i_0^{(1)}| > i_L$  и  $|i_0^{(n)}| > i_L$ , то согласно рис. П.5 (Приложение 3), будет  $j_1 = \text{sign } i_2 = \text{sign } i_3^{(1)}$  и  $j_k = \text{sign } i_k = \text{sign } i_3^{(k)}$  независимо от значения  $u_L$  (здесь считается, что  $|i_1| < \pi$ ,  $|i_k| \leq \pi$ ). В этом случае при  $i_1 > 0$  участок  $\Gamma_{1,2}$  траектории  $\Gamma$  будет проходить над северным полушарием Земли, а при  $i_1 < 0$  — над южным. Поэтому вместо ряда символов  $\Gamma_{1,2}$  и  $j_1 = \text{sign } i_1$  можно употреблять один:  $N$  при  $j_1 > 0$  и  $S$  при  $j_1 < 0$ . Аналогично участок  $\Gamma_{3,k}$  возвращения при  $i_k > 0$  будет проходить над южным полушарием, а при  $i_k < 0$  — над северным, так что его можно обозначать символом  $S$  при  $j_k > 0$  и символом  $N$  при  $j_k < 0$ . Приняв эти обозначения, можно определять различные облетные траектории пятью символами:  $N$  (или  $S$ ),  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $N$  (или  $S$ ),  $T_z$ , если считать для этих траекторий значения  $r_n^{(1)}$ ,  $r_n^{(k)}$  одинаковыми, а значения величин  $t_n$ ,  $i_1$ ,  $i_k$  несущественными.

## Глава 21

### ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ ОБЛЕТА ЛУНЫ С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

#### § 21.1. Применение критерия сопряжимости к точному расчету облетных траекторий

Полученные в гл. 5 результаты могут быть использованы для точного решения задачи облета Луны при старте с орбиты ИСЗ и возвращении в атмосферу Земли, когда точки  $M_1$  старта и  $M_k$  конца облета можно считать перигейными. Пусть в этих точках заданы радиусы  $r_\pi^{(1)}$  и  $r_\pi^{(k)}$  и наклонения к экватору  $i_\pi^{(1)}$  и  $i_\pi^{(k)}$  соответственно. Пусть заданы также дата  $d_1$  старта и знаки  $s_2$  и  $s_3$  геоцентрических радиальных скоростей входа и выхода на СД Луны. Пусть, наконец, задано полное время  $T_x$  облета или заданы географическая долгота  $\lambda_\pi^{(k)}$  в точке  $M_k$  и число  $n$  целых суток во времени облета.

Покажем, что по этим данным находятся однозначно начальная энергия  $h_1$ , кинетические моменты  $C_1$  и  $C_k$ , наклонения  $i_1$  и  $i_k$  и момент  $t_x$  сближения, т. е., согласно гл. 5, облетная траектория определяется однозначно. Делается это методом гл. 5 в три этапа с помощью дополнительных (к анализу гл. 5) итераций по одному параметру  $h_1$ . Задавшись начальным приближением  $h_1$ , на первом этапе, т. е. в рамках метода ТСД, получим дугу  $\Gamma_{1,2}$  и найдем  $C_1$ :

$$(V_\pi^{(1)})^2 = 2\mu_G/r_\pi^{(1)} + h_1, \quad (1.1)$$

$$C_1 = r_\pi^{(1)} V_\pi^{(1)}. \quad (1.2)$$

Аналогично на участке  $\Gamma_{3,k}$  получим соотношения

$$(V_\pi^{(k)})^2 = 2\mu_G/r_\pi^{(k)} + h_k, \quad (1.3)$$

$$C_k = r_\pi^{(k)} V_\pi^{(k)}. \quad (1.4)$$

По значению  $h_1$  и знаку  $s_2$  приближенно находится время  $T_{GL}$  полета до Луны (§ 15.2). Значит, приближенно известно в любое время положение упрежденной точки, движущейся впереди Луны, и, решая задачу о точке встречи, получим, как и в задаче достижения Луны, момент  $t_n$  сближения, соответствующее положение  $u_L(t_n)$  Луны и наклонения  $i_1(i_n^{(1)}, u_L)$  и  $i_k(i_n^{(k)}, u_L)$ . Теперь, используя из гл. 5 связь (5.1.4), найдем

$$h_k = 2C_k \cos i_k + T_1, \quad (1.5)$$

где  $T_1 = -2C_1 \cos i_1 + h_1$ . С другой стороны, исключая  $V_\pi^{(k)}$  из (1.3), (1.4), получим

$$C_k^2 = 2\mu_G \cdot r_\pi^{(k)} + h_k \cdot (r_\pi^{(k)})^2.$$

Подставляя сюда  $h_k$  из предыдущего уравнения, получим квадратное уравнение для определения  $C_k$ :

$$C_k^2 - 2C_k \cos i_k (r_\pi^{(k)})^2 - [2\mu_G r_\pi^{(k)} + T_1 (r_\pi^{(k)})^2] = 0. \quad (1.6)$$

Его решение

$$C_k = \cos i_k (r_\pi^{(k)})^2 + \sqrt{2\mu_G r_\pi^{(k)} + T_1 (r_\pi^{(k)})^2 + \cos^2 i_k (r_\pi^{(k)})^4}. \quad (1.6')$$

Знак минус перед радикалом отброшен, так как дает  $C_k < 0$ , что бессмысленно. В наших единицах  $e_r = r_L$  и  $e_v = V_L$  имеем  $\mu_G = 1 - \mu_L \approx 1$  и  $r_\pi^{(k)} \approx r_G \approx 1/60$ , а  $(r_\pi^{(k)})^2 \approx 1/3600$  мало. Поэтому под радикалом главным является член  $(C_\pi^{(k)})^2 = 2\mu_G \cdot r_\pi^{(k)}$ , так что  $C_k \approx C_\pi^{(k)} = V_\pi(r_\pi^{(k)}) \cdot r_\pi^{(k)}$ , где  $V_\pi(r_\pi^{(k)}) = \sqrt{2\mu_G/r_\pi^{(k)}}$  — параболическая скорость.

Поэтому

$$C_k = C_\pi^{(k)} [ \sqrt{1 + e_c} + \cos i_k (r_\pi^{(k)})^{3/2} / \sqrt{2\mu_G} ], \quad (1.7)$$

где

$$e_c = [T_1 + \cos^2 i_1 (r_\pi^{(k)})^2] r_\pi^{(k)} / 2\mu_G.$$

Для малых  $r_\pi^{(k)}$

$$C = C_\pi^{(k)} [1 + T_1 r_\pi^{(k)} / (4\mu_G) + \cos i_k (r_\pi^{(k)})^{3/2} / \sqrt{2\mu_G}] \quad (1.8)$$

с относительной погрешностью порядка  $(r_\pi^{(k)})^3 \approx 1/2 \cdot 10^{-5}$ . Зная  $C_k$ , найдем  $h_k$  из (1.5).

По значению  $h_k$  и знаку  $s_3$  приближенно находится согласно зависимости  $h(T)$  (рис. 15.2) время  $T_{Lo}$  возвращения от Луны до перигея  $r_p^{(k)}$ . Теперь имеем полное время облета  $T_z = T_{Lo} + T_{GL}$ . Если оно отличается от заданного  $\bar{T}_z$ , то изменением начальной энергии  $h_1$ , т. е. решением однопараметрической краевой задачи, можно добиться совпадения  $T_z$  с  $\bar{T}_z$ , поскольку на рассматриваемых участках постоянства знаков  $s_2$  и  $s_3$  зависимость  $h(T)$  монотонна и поскольку при начальных энергиях, не близких к минимальным, производная  $\partial T/\partial h_1$  для содержащей апогей дуги перелета существенно больше, чем для дуги, не содержащей апогея. В случае, когда вместо  $\bar{T}_z$  в точке  $r_p^{(k)}$  задана географическая долгота  $\bar{\lambda}_\pi$ , условие  $\lambda_\pi^{(k)} = \bar{\lambda}_\pi$  тоже можно реализовать изменением энергии  $h_1$ , поскольку долгота  $\lambda_\pi^{(k)}$  монотонно убывает с ростом времени полета  $T_z$  вследствие суточного вращения Земли. При этом задание числа  $n$  целых суток, содержащихся во времени полета, однозначно определит траекторию полета.

Заметим, что при каждом изменении энергии  $h_1$  необходимо путем повторного решения задачи о точке встречи уточнять момент  $t_n$  сближения (положение  $u_L(t_n)$  Луны), поскольку изменяется время  $T_{GL}$  полета до Луны и положение упрежденной точки впереди Луны.

Если итерации по  $h_1$  на I этапе (в рамках метода ТСД) сошлись, то дальнейшее уточнение расчета облетной траектории может быть получено переходом ко II этапу (т. е. к методу ИВ) по формулам (5.2.2) — (5.2.24). На втором этапе уточняется в первую очередь положение Луны в момент  $t_2$  входа в СД путем решения новой задачи о точке встречи по ставшим известными точке  $p_2$  входа и времени  $T_{1,2}$  полета до нее (при этом векторы  $p_2$  и  $p_3$  считаются постоянными в системе координат  $m_L x_2 y_2 z_2$ , вращающейся вместе с радиусом  $r_L$ ).

В результате становятся известными векторы  $r_2$  и  $r_3$  в невращающейся геоцентрической системе координат  $m_0 x_0 y_0 z_0$ , по ним и заданным наклонениям  $i_0^{(1)}$  и  $i_0^{(k)}$  находятся с помощью формул вида (5.3.7) — (5.3.10) аргументы широты  $u_2^{(s)}$  и  $u_3^{(s)}$  и долготы узлов  $\Omega_2^{(s)}$  и  $\Omega_3^{(s)}$ . Затем по величинам  $i_0^{(1,k)}$ ,  $u_{2,3}^{(s)}$ ,  $\Omega_{2,3}^{(s)}$  находятся наклоне-

ния  $i_1, i_k$  к плоскости лунной орбиты (Приложение 2). Далее уточняется определение  $h_3$  путем использования координат точек  $M_2$  и  $M_3$  на СД и моментов входного  $t_2$  и выходного  $t_3$ . Это делается путем применения уравнения (5.3.1) вместо уравнения (1.5) при получении уравнения (1.6) и значения  $h_k$  по найденному из (1.6) значению  $C_k$ .

Кроме того, находятся наклонение  $i_1(i_1^{(1)})$  из условия встречи КА с  $M_2$  (вместо  $m_L$ ), а наклонение  $i_k(i_k^{(k)})$  — из условия возвращения из точки  $M_3$  (вместо  $m_L$ ). Дальнейший расчет делается по прежним формулам (5.3.2) — (5.3.15) второго этапа путем рассмотренных в гл. 5 итераций. И так же, как после I этапа, делается уточнение подбора  $h_1$  с помощью решения внешней (по отношению к рассматриваемым в гл. 5 итерациям) однопараметрической краевой задачи с целью выполнения условия  $\lambda_\pi^{(k)} = \bar{\lambda}_\pi$  или  $T_2 = \bar{T}_2$  на конце.

Расчет на третьем этапе делается в принципе аналогично расчету третьего этапа гл. 5 по задаваемому со II этапа значению  $h_1$ . Он начинается с уточнения решения задачи о встрече КА с точкой  $\rho_2$  путем учета возмущений. Далее вместо уравнения (5.3.1) для вычисления  $h_k$  используется уравнение (5.1.8), куда подставляются найденные на II этапе значения  $h_1$ , (5.3.19) и элементы  $C_1 = C(r_1^{(1)})$  и  $i_1, i_k$ , найденные по заданным  $i_1^{(s)}, i_k^{(s)}$  путем решения задачи о точке встречи.

Опять решается система (1.3), (1.4), (5.1.8), из которой находятся  $C_k, h_k$ . Эти величины реализуются, как и в § 5.3, с помощью исправления элементов на СД, а именно, находятся с помощью численного интегрирования вне СД возмущения в элементах (5.3.16), (5.3.17), с помощью предположений (5.3.20) вносятся поправки в элементы на СД и находятся согласно (5.3.21) новые элементы; по ним и прежним векторам  $\rho_2, \rho_3$  с помощью прежних формул (5.3.3) — (5.3.12) находятся векторы  $V_2, U_2, V_3, U_3$ .

После этого, как и в § 5.3, производится два интегрирования внутрь СД до ее границы, находятся граничные точки и моменты времени, моменты  $\tau_2$  и  $\tau_3$  прохождения точек периселения, и по формулам (5.3.13), (5.3.14) уточняются точки  $M_2, M_3$ , моменты  $t_2, t_3$ , и процесс уточ-

нения точек и элементов на СД повторяется, начиная с интегрирования вне СД.

Когда итерации сойдутся, необходимо при том же значении  $h_1$  получить точное решение задачи о встрече КА с точкой  $p_2$  на СД — точное в том смысле, что оно учитывает разности геоцентрических элементов в перигее  $r_{\pi}^{(1)}$  и в точке  $M_2$  входа в СД, а также точное время полета до этой точки (полученное численным интегрированием от СД до перигея).

При решении задачи о встрече векторы  $p_2$  и  $p_3$  считаются, как и на II этапе, постоянными во вращающейся вместе с Луной системе координат, так что это решение уточняет значения наклонений  $i_1$  и  $i_n$ , учитывая дополнительно влияние возмущений (полученное численным интегрированием от СД до перигея). Наконец, как и на II этапе, решается внешняя краевая задача выбора значения  $h_1$  из условия  $\lambda_{\pi}^{(n)} = \bar{\lambda}_{\pi}$ .

## § 21.2. Постановки краевых задач точного расчета траекторий облета

Рассмотренные в § 21.1 расчетные методы, основанные на условиях сопряжения движений к СД и от СД, позволяют получить решение трехпараметрической задачи облета Луны как в приближенной, так и в точной постановках путем последовательного решения ряда однопараметрических задач. При этом в рамках метода ТСД расчет облетных траекторий сводится к наиболее простым конечным аналитическим выражениям. Как только вводится в рассмотрение конечный размер СД Луны ( $r_* \approx 66$  тыс. км), так задача расчета облетной траектории существенно усложняется, особенно при точном расчете — поиске облетной траектории с помощью численного интегрирования уравнений движения. Если же заданная область изменения свободных параметров является достаточно узкой, то схему поиска облетной траектории можно упростить, перейдя к двух-, трех- или четырехпараметрической краевой задаче — в зависимости от того, сколько условий задано в конце: 2, 3 или 4.

Приведем примеры постановок соответствующих задач. Во всех задачах в качестве краевых условий на



левом конце промежутка интегрирования  $[t_1, t_n]$  будем считать заданными элементы  $i_1, p_1, e_1, \omega_1, u_1$  орбиты ИСЗ  $y_1$ . Вначале рассмотрим решение задачи облета Луны с пологим возвращением КА в атмосферу Земли. Пусть требуется вывести КА с орбиты  $y_1$  в ее плоскости на траекторию полета к Луне так, чтобы при заданных знаках  $s_2, s_3$  радиальных геоцентрических скоростей КА приблизился к Луне, а затем возвратился к Земле с заданными наклонением  $i_n^{(k)} = \bar{i}_n$  и радиусом  $r_n^{(k)} = \bar{r}_n$  в точке условного перигея.

Поскольку задано лишь два условия в конце, то расчет траектории сводится к численному решению двухпараметрической краевой задачи, в которой аргументами являются время  $t_\Omega$  старта с Земли и время  $t_\infty$  старта с орбиты ИСЗ, а функциями —  $i_n^{(k)}$  и  $r_n^{(k)}$ . В результате решения такой краевой задачи реализуется единственная траектория, если прекращение разгона с орбиты ИСЗ производится при выходе на заранее фиксированную величину геоцентрической энергии  $h = \bar{h}$ .

Аргументы  $t_\Omega$  и  $t_\infty$  (для фиксированной схемы полета к Луне, т. е. знаков  $j_1$  и  $j_n$  наклонений  $i_1$  и  $i_n$ ) незначительно отличаются от значений, получаемых в результате решения задачи попадания в Луну. Малыми вариациями  $t_\Omega$  и  $t_\infty$  достигается смещение точки входа КА на СД Луны в одну из «облетных» областей (примыкающих на плоскости селеноцентрических сферических координат  $\alpha_{сд}, \delta_{сд}$  к области разгонных траекторий). Переход на несколько градусов в область разгонных траекторий может привести к резкому изменению параметров геоцентрического движения на выходе из СД Луны: радиус перигея может измениться от нуля до 400 тыс. км и направления геоцентрической скорости выхода из СД могут быть весьма различными. Зависимость функций  $i_n^{(k)}, r_n^{(k)}$  в краевой задаче от аргументов  $t_\Omega, t_\infty$  существенно нелинейна, что существенно усложняет решение задачи и требует специальных алгоритмов для расчета начальных приближений.

Несмотря на это, наряду с рассмотренными выше нестандартными способами решения облетной задачи иногда удается получить траекторию с географической длиной условного перигея, необходимой для посадки КА

в заданную точку земной поверхности, путем решения стандартной трехпараметрической краевой задачи с аргументами  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$ ,  $h$  и функциями  $r_{\pi}^{(k)}$ ,  $i_{\pi}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\pi}^{(k)}$ .

Краевая задача становится четырехпараметрической, если по каким-либо причинам требуется обеспечить заданное время полета  $T_{1,k}$ . Тогда за аргументы целесообразно принять  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$ ,  $h$  и  $\theta_0$  (угол тангажа в начале активного участка разгона с орбиты ИСЗ), а за функции взять  $r_{\pi}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\pi}^{(k)}$ ,  $i_{\pi}^{(k)}$ ,  $T_{1,k}$ .

Изменение угла  $\theta_0$  изменяет радиус перигея участка полета к Луне. Однако здесь следует иметь в виду, что использование угла  $\theta_0$  в качестве аргумента может приводить к большим отличиям управления вектором тяги на активном участке от энергетически оптимального. Поэтому траекторию с полным временем полета, близким к заданному  $T_{1,k}$ , выгодно предварительно получить путем решения серии трехпараметрических краевых задач, соответствующих различным моментам облета Луны внутри данной календарной даты.

Кроме рассмотренных постановок задач, имеет смысл постановка задачи облета Луны на заданном расстоянии  $\rho_{\pi} = \rho_{\pi}$  с возвращением к Земле на заданное расстояние с заданным наклонением. Такая задача является трехпараметрической, если за аргументы взять  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$ ,  $\theta_0$ , а за функции  $r_{\pi}^{(k)}$ ,  $i_{\pi}^{(k)}$ ,  $\rho_{\pi}$ . При заданной дополнительно географической долготе  $\lambda_{\pi}^{(k)}$  необходимы или решение семейства трехпараметрических задач с аргументами  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$ ,  $h$  и функциями  $r_{\pi}$ ,  $i_{\pi}$ ,  $\lambda_{\pi}$ , или решение четырехпараметрической краевой задачи с аргументами  $t_{\Omega}$ ,  $t_{\omega}$ ,  $h$ ,  $\theta_0$  и функциями  $r_{\pi}^{(k)}$ ,  $i_{\pi}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\pi}^{(k)}$ ,  $\rho_{\pi}$ .

Управление вектором тяги на участке перехода с орбиты ИСЗ на облетные траектории производится, как и при выведении КА на другие траектории полета к Луне (см. гл. 11).

При заданной долготе  $\Omega_1$  узла орбиты ИСЗ реализация облетной траектории возможна в любой момент  $t_{\omega}$ , если допустим пространственный разгон с орбиты ИСЗ. При этом условии за аргумент вместо  $t_{\Omega}$  можно принять угол  $\psi$  вектора тяги  $P$  с плоскостью орбиты ИСЗ в момент начала активного участка.

Заметим, однако, что, несмотря на упрощение схемы, решение многопараметрической краевой задачи требует обычно большего количества вычислений, чем решение серии однопараметрических задач, решающей ту же краевую задачу. Поэтому, если возможно, надо стремиться уменьшить размерность краевой задачи, как, например, было сделано в § 21.1.

### § 21.3. Определение начальных приближений при решении задачи облета Луны в точной постановке

Вычисление начального приближения производится аналитически или с помощью решения предварительной краевой задачи. Аналитические зависимости параметров орбиты перелета Земля — Луна от параметров орбиты возвращения КА от Луны к Земле можно получить с помощью метода ТСД. Как показано в § 5.2, задаваясь наклонениями  $i_1, i_n$ , знаками  $s_2$  и  $s_3$  геоцентрической радиальной скорости на СД, кинетическими моментами  $C_1, C_n$  и датой прохождения периселения, можно получить все шесть элементов селеноцентрического движения и значения геоцентрических энергий  $h_2, h_3$  на СД Луны в моменты входа  $t_2$  и выхода  $t_3$  соответственно. По известным  $h_2, t_2$  и  $h_3, t_3$  можно «привязать» к географической долготе геоцентрические участки траекторий  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{3,n}$  с помощью соотношений (§ 9.1, 11.2) метода долготной привязки траекторий. В результате получим географическую долготу  $\lambda_n^{(k)}$ . Если  $\lambda_n^{(k)}$  не равна заданной  $\bar{\lambda}_n^{(k)}$ , то можно выбрать в заданной календарной дате сближения такой момент  $t_n$  прохождения периселения, для которого реализуется  $\lambda_n^{(k)} = \bar{\lambda}_n^{(k)}$ .

В результате этих расчетов будем иметь все шесть элементов  $\mathcal{E}_1$  геоцентрической траектории  $\Gamma_{1,2}$ , обеспечивающей сближение с Луной и последующее возвращение КА к Земле. Использование элементов  $\mathcal{E}_1$  в качестве начальных позволяет приступить к численному решению краевой задачи в точной постановке (см. § 21.2).

Элементы  $\mathcal{E}_1$  можно уточнить путем сопряжения движений методом ИВ. Это и есть решение предварительной краевой задачи. В результате этого решения (см. § 21.1)

вычисляются начальные приближения, обеспечивающие устойчивую сходимость численного решения краевой задачи в точной постановке. Дадим еще одно из возможных решений предварительной краевой задачи определения начального приближения.

Оно основано на привязке траектории по долготе в точках входа и выхода на СД. Направление оси пучка на входе в СД определяется по графикам рис. 5.1, 5.2, а облетные траектории пересекают СД в точках, отклоненных от оси пучка на углы  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$ , лежащие в пределах от  $1^\circ$  до  $5^\circ$ , причем  $\Delta\alpha$  не может быть равно нулю, если возвращение КА происходит в атмосферу Земли.

Если взять в качестве аргументов углы  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  и время  $t_2$  входа КА в СД, а функциями считать наклонение  $i_3$ , радиус перигея  $r_{\pi}^{(3)}$  на выходе из СД и время  $T_{3, \kappa}$  полета от СД до точки условного перигея, то данная краевая задача разрешима путем итерационной долготной привязки траекторий к точкам на СД и Земле, определяемым краевыми условиями.

Рассмотрим последовательность расчетов на одной итерации. При заданных числе  $n$  целых суток полета, наклонении  $i_3^{(1)}$ , радиусе  $r_{\pi}^{(1)}$ , географической долготе узла  $\lambda \Omega$  и дате  $d_{\kappa}$  сближения с Луной определяется время полета  $T_{0L}$  до центра Луны с помощью привязки траектории по долготе (§ 9.1). По дате  $d_{\kappa}$  находится наклонение  $i_1(i_3^{(1)}, d_{\kappa})$ . По времени  $T_{0L}$  и наклонению  $i_1$  определяется направление  $\alpha_{оп}$ ,  $\delta_{оп}$  оси пучка на СД (рис. 5.1).

Последовательность вычислений на первой итерации начинается после определения начальных значений  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  и  $t_2$ . Величина  $|\Delta\alpha|$  и  $|\Delta\delta|$  назначаются в диапазоне  $1^\circ$ — $5^\circ$ , с учетом того, какую область облетных траекторий (см. рис. 19.5—19.12) желательно использовать. Начальное время  $t_2$  определяется вычитанием из времени  $T_{0L}$  полета до Луны времени  $T_c = T_{2,3}/2$  полета от границы СД до Луны, определяемого по графикам рис. 5.3. Тогда на момент  $t_2$  определяются селеноцентрические координаты КА на СД Луны

$$\begin{aligned} (\xi_c)_2 &= \rho_* \cos(\delta_{оп} + \Delta\delta) \cos(\alpha_{оп} + \Delta\alpha), \\ (\eta_c)_2 &= \rho_* \cos(\delta_{оп} + \Delta\delta) \sin(\alpha_{оп} + \Delta\alpha), \\ (\zeta_c)_2 &= \rho_* \sin(\delta_{оп} + \Delta\delta). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее координаты (3.1) пересчитываем в геоцентрическую систему координат  $m_0 x_0, y_0, z_0$ . Затем производится привязка траектории (методом § 9.1) к точкам 1 (на орбите ИСЗ) и 2 на СД, в результате чего определяются кинематические параметры движения КА на входе в СД и далее, на выходе из СД. Затем по точке на выходе из СД и известной точке условного перигея  $r_{\pi}^{(k)}$  уточняется долготная привязка траектории возвращения по формулам § 9.1, в результате чего определяется необходимое время перелета, которое используется далее как заданное  $\bar{T}_{3,k}$ . Текущие значения функций  $r_{\pi}$ ,  $i_{\pi}$ ,  $T_{3,k}$  определяются по параметрам выхода КА из СД. По невязкам  $r_{\pi} - \bar{r}_{\pi}$ ,  $i_{\pi} - \bar{i}_{\pi}$ ,  $T_{3,k} - \bar{T}_{3,k}$  на каждой предыдущей итерации определяются приращения аргументов  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ ,  $t_2$  для последующей итерации. Аргументы  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  удобны потому, что не допускают приближения траектории-решения к области разгонных траекторий.

Рассмотренная предварительная краевая задача решается за 2—3 мин на машине М-222 и дает результаты, обеспечивающие сходимость точной краевой задачи. Время решения краевой задачи облета Луны в точной постановке с учетом определения начальных аргументов составляет 25—30 мин на машине М-222.

Сравнение различных приближенных методов расчета облетных траекторий показывает, что наилучшее приближение к точным результатам дает метод ИВ. Он гарантирует благодаря учету эллиптичности орбиты Луны высокую точность в сочетании с малыми затратами времени на вычисления. Однако с ростом времени перелета на геоцентрическом участке сверх 10 сут точность метода ИВ падает вследствие длительности действия возмущений от Луны, Солнца и несферичности Земли.

## Глава 22

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СБЛИЖЕНИЯ С ЛУНОЙ ДЛЯ ОБЛЕГЧЕНИЯ МАНЕВРОВ РАЗЛИЧНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

#### § 22.1. Использование сближения с Луной с целью разгона КА без затрат топлива

1. *Постановка задачи.* Если бы Луна не имела относительно Земли скорости  $V_L$ , то скорость КА относительно Земли и Луны была бы одна и та же. При этом прохождение КА на малом расстоянии от Луны изменяло бы лишь направление вектора скорости КА, но не его величину. Однако сближение КА с движущейся Луной, как было показано в гл. 4, изменяет не только направление, но и величину скорости относительно Земли.

Как показано в гл. 4, в предположениях метода ТСД и при условии, что начальные скорости не близки к минимальным, а Луна является материальной точкой (а не телом), многообразия выходных селеноцентрических скоростей  $U_3$  и геоцентрических скоростей  $V_3$  являются сферами одного радиуса  $U$ , где  $U$  — величина входной селеноцентрической скорости  $U_3$ . При этом в случае  $U > V_L$  на  $V_3$ -сфере существуют векторы скорости  $V_3$  любого направления, и при этом каждому вектору  $V_3$  соответствует единственная траектория сближения.

Величина модуля  $V_3$  при изменении точки входа в СД изменяется в диапазоне  $(V_m, V_M)$ , где  $V_m = |U - V_L|$ ,  $V_M = U + V_L$ , причем траектория, для которой величина  $V_3 = V_M$ , тоже единственна (рис. 22.1). Если бы она не пересекала поверхность реальной Луны, то на этой траектории реализовался бы абсолютный максимум приращения геоцентрической энергии КА или, что то же, приращения  $\Delta V = V_3 - V_2$  — модуля скорости в результате сближения с Луной. Покажем, что траектория с  $V_3 = V_M$

пересекает лунную поверхность, и найдем непересекающую траекторию, на которой реализуется максимум приращения геоцентрической энергии КА в результате сближения его с Луной.

2. *Выгодность уменьшения расстояния траектории от лунной поверхности.* Покажем непосредственной проверкой, что та облетная траектория  $\Gamma_M$ , для которой  $V_3 = V_M$ , неизбежно пересекает поверхность Луны, т. е. практически нереализуема.

Действительно, для траектории  $\Gamma_M$  выходные скорости  $U_3$  и  $V_M$  должны быть направлены по скорости Луны. Рассмотрим угол  $\alpha$  между векторами  $U_2$  и  $U_3$ . Этот угол приблизительно равен углу  $\alpha_\infty$  между направлениями  $U_2^\infty$  и  $U_3^\infty$  скоростей «на бесконечности» для рассматриваемой селеноцентрической траектории — гиперболы. При этом всегда  $\alpha < \alpha_\infty$  по определению этих углов, так что достаточно провести рассмотрение для угла  $\alpha_\infty$  вместо угла  $\alpha$ . Заметим, что  $\alpha_\infty = 2\gamma$ , где  $\gamma$  есть угол асимптоты с мнимой полуосью  $b$  гиперболы (см. рис. 4.4), так что

$$\operatorname{tg} \gamma = a/b = \mu_L/bU_\infty^2, \quad (1.1)$$

где  $a = \mu_L/U_\infty^2$  — действительная полуось гиперболы. Можно выразить угол  $\gamma$  и через радиус  $\rho_n$  периселения. Из рис. 4.4  $\sin \gamma = a/ae = 1/e = 1/(1 + \rho_n/a)$ , т. е.

$$\sin \gamma = 1/(1 + \rho_n U_\infty^2/\mu_L), \quad U_\infty^2 = U_2^2 - (2\mu_L/\rho_n). \quad (1.2)$$

Угол  $\alpha_\infty$  монотонно растет с уменьшением радиуса  $\rho_n$  периселения и достигает максимума  $2\gamma_{\max}$  при крайнем сле-

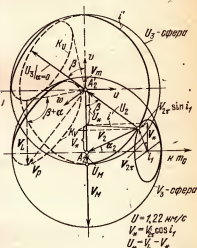


Рис. 22.1. Конусы  $K_U$  и  $K_V$  выходных селеноцентрических и геоцентрических скоростей для траекторий, касающихся лунной поверхности.

ва значении  $\rho_\pi = \rho_L$  ( $\rho_L$  — радиус Луны). Величина этого максимума тем больше, чем меньше величина  $U$  селеноцентрической скорости на СД. Поэтому при максимизации угла  $2\gamma_{\text{кас}}$  по величине наклона  $i_1$ , как видно из формулы (4.2.4), абсолютный  $\max_{i_1} 2\gamma_{\text{кас}}$  достигается при  $i_1 = 0$  (так как  $\min_{i_1} U_2 = U_2|_{i_1=0}$ ).

Обозначим через  $\beta$  угол вектора  $U_2$  с осью  $v$ . С приближением  $i_1$  к нулю угол  $(\pi - \beta)$  между вектором  $U_2$  и направлением  $V_L$  в пространстве  $uvw$  скоростей входа и выхода на СД уменьшается, как видно из рис. 22.1, так что при  $i_1 = 0$  реализуется  $\min_{i_1} (\pi - \beta)$ . Покажем непосредственной проверкой, что даже при минимальной величине  $U_3$ , т. е. при  $i_1 = 0$ , и при минимальном  $\rho_\pi = \rho_L$  не только угол  $\alpha$ , но и угол  $\alpha_\infty$  оказывается меньше угла, необходимого для получения  $U_3 = U_M$ , т. е. покажем, что  $2\gamma_{\text{кас}} < \pi - \beta$ . Имеем из рис. 22.1 соотношение

$$\sin \beta = \sqrt{(V_2 \cos \alpha_2)^2 + (V_2 \sin \alpha_2 \sin i_1)^2} / U, \quad (1.3)$$

$$\cos \beta = (V_L - V_2 \sin \alpha_2 \cos i_1) / U. \quad (1.4)$$

При  $i_1 = 0$  имеем  $\sin \beta = V_2 \cos \alpha_2 / U$ ,  $\cos \beta = (V_L - V_2 \sin \alpha_2) / U$ .

Заметим, что согласно геоцентрическим интегралам энергии и площадей:

$$V_{1,2}^2 = 2\mu_G / r_{1,2} + h_1, \quad r_2 V_{2\tau} = C_1, \quad C_1 = r_\pi V_\pi(r_\pi)$$

не может быть  $V_2 < V_\tau^* \equiv r_\pi V_\pi(r_\pi) / r_L$  ( $V_\tau^* = 0,192$  км/с для  $h_1 = -\mu_G / (r_2 + r_\pi)$ ,  $r_2 = r_L = 384$  тыс. км и  $r_\pi = 6630$  км). С помощью этих интегралов и формул (1.2) — (1.4) для различных значений  $V_2 > V_\tau^*$  получим табл. 22.1:

Таблица 22.1

$V_2$ , км/с	0,192	0,3	0,5	0,7	1,0	1,44	2,0	3,0
$\alpha_2$ , град	90	40	23	16	11	7	6	4
$U$ , км/с	0,833	0,9	0,95	1,07	1,3	1,67	2,16	3,13
$\beta$ , град	0	15	29	39	49	59	68	74
$2\gamma_{\text{кас}}$ , град	113	107	103	95	80	62	47	26
$(\beta + 2\gamma_{\text{кас}})$ , град	113	122	132	134	129	121	115	110



Из табл. 22.1 следует, что  $\max(\beta + 2\gamma_{\text{кас}}) \approx 135^\circ < 180^\circ$ , так что подавно  $\max_{V_2}(\beta + \alpha_{\text{кас}}) < 180^\circ$ , что и требовалось проверить. Для других наклонений и величин  $\rho_\pi > \rho_L$  углы  $(\beta + \alpha_{\text{кас}})$  будут еще меньше.

3. *Максимизация приращения энергии.* Найдем плоскость селеноцентрической траектории, для которой вектор  $V_3$  — наибольший при условии  $\rho_\pi \geq \rho_L$ . Траекториям, не пересекающим поверхность Луны, соответствуют на  $U_3$ -сфере векторы  $U_3$ , образующие с вектором  $U_2$  угол  $\alpha < \alpha_{\text{кас}}$  (рис. 22.1), т. е. лежащие в конусе  $K_U$  с осью  $U_2$  и углом раствора  $\alpha_{\text{кас}}$ . Соответствующие векторам  $U_3 \in K_U$  векторы  $V_3 = U_3 + V_L$  образуют конус  $K_V$  с той же вершиной и основанием на  $V_3$ -сфере. Как видно из рис. 22.1, модули векторов на  $V_3$ -сфере растут с уменьшением компоненты  $v$ , поэтому наибольшим будет вектор  $V_3 \in K_V$  с наименьшей компонентой  $v$ . Этот вектор  $V_p$  лежит в плоскости селеноцентрического движения  $\Pi'(U_2, v)$ , проходящей через ось  $v$  и ось  $U_2$ -конуса  $K_U$ , так как в этой плоскости лежит вектор  $U_p = V_3 - V_L$  с наименьшей компонентой  $v$ . Отсюда следует, что ось  $v$  является линией узлов в плоскости  $uv$ .

Найдем проекции  $(u_p, v_p, w_p)$  вектора  $V_p$ . Для этого найдем сначала наклонение  $i'$  плоскости соответствующего селеноцентрического движения к плоскости  $uv$ . Из рис. 22.1 находим  $i'$  как угол между плоскостями  $uv$  и  $U_2v$ :

$$\operatorname{tg} i' = \frac{V \sin i_1}{V_{2r}} = \frac{\sin \alpha_2 \sin i_1}{\cos \alpha_2}. \quad (1.5)$$

Проектируя вектор  $U_p$  на ось  $v$  и плоскость  $uw$ , получим, учитывая, что  $U_2 = U_p = U$ :

$$U_v = U \cos(\beta + \alpha), \quad U_{uw} = U \sin(\beta + \alpha),$$

а проектируя на оси  $u, v, w$  вектор  $V_p = U_p + V_L$ , где  $V_L = (0, -V_L, 0)$ , получим

$$V_p = (U \sin(\beta + \alpha) \cos i', U \cos(\beta + \alpha) - V_L, -U \sin(\beta + \alpha) \sin i'). \quad (1.6)$$

Отсюда

$$V_p^2 = U^2 + V_L^2 - 2UV_L \cos(\beta + \alpha). \quad (1.7)$$

Этот же результат можно получить из треугольника скоростей  $U_p$ ,  $V_L$ ,  $V_p$  (рис. 22.1), так как его угол против стороны  $V_p$  равен  $\beta + \alpha$ .

Выясним в предположениях метода ТСД, для какого значения начальной энергии  $h_1$  приращение энергии

$$\Delta h = h_k - h_1, \quad h_k = V_p^2 - \frac{2\mu_G}{r_L}, \quad h_1 = V_2^2 - \frac{2\mu_G}{r_L} \quad (1.8)$$

после сближения с Луной максимально при фиксированных начальных перигейном радиусе  $r_k$  и наклонении  $i_1$  плоскости геоцентрического движения к плоскости лунной орбиты. Для этого подставим в (1.7) из (4.2.4) значение

$$U^2 = V_2^2 + V_L^2 - 2V_2V_L \sin \alpha_2 \cos i_1 \equiv V_2^2 + U_*^2 - V_*^2, \quad (1.9)$$

$$V_\tau = V_2 \sin \alpha_2, \quad V_* \equiv V_\tau \cos i_1, \quad U_* \equiv V_L - V_*.$$

При фиксированном  $r_k$  величина  $V_\tau$  согласно § 19.4 является константой, а так как наклонение  $i_1$  тоже фиксировано, то  $V_*$  и  $U_*$  — тоже константы. Переносим все константы влево, получим

$$V_p^2 - C_0 = V_2^2 - 2V_L U (\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha), \\ C_0 = V_L^2 + U_*^2 - V_*^2. \quad (1.10)$$

Из рис. 22.1 находим

$$U \cos \beta = V_L - V_*, \quad U \sin \beta = \sqrt{V_2^2 - V_*^2}. \quad (1.11)$$

Переносим  $V_2^2$  влево, получим согласно (1.8)

$$F(V_2) \equiv \frac{\Delta h - C_0}{2V_L} = - (V_L - V_*) \cos \alpha (V_2) + \\ + \sqrt{V_2^2 - V_*^2} \sin \alpha (V_2). \quad (1.12)$$

Из вида функции  $F(V_2)$  следует, что она должна иметь максимум по  $V_2$ . Действительно, во-первых, при значении  $V_2 = V_*$  производная ее по  $V_2$  бесконечно велика за счет члена с радикалом, а при  $V_2 \rightarrow \infty$  эта производная стремится к нулю, так как член с радикалом согласно (1.2) стремится к нулю.

При этом  $F(V_2)$  стремится к константе —  $(V_L - V_*)$ , монотонно убывая, так как вследствие монотонного стремления  $\alpha$  к нулю с ростом  $V_2$  монотонно растет до  $1 \cos \alpha$ . Так как эта константа меньше, чем  $F(V_*)$  (поскольку  $\cos \alpha < 1$ ), то функция  $F(V_2)$  проходит при некоторой абсциссе  $V_2 = V'_2$  еще раз значение  $F(V_*)$ , а между  $V_*$  и  $V'_2$  достигает максимума (в точке  $\tilde{V}_2$ , где  $dF/dV_2$  обращается в нуль). Искомый  $\max_{V_2} F(V_2)$  оказывается только один за счет того, что с ростом  $V_2$  убывание  $\sin \alpha$  пересиливает рост  $\sqrt{(V_2)^2 - V_*^2}$ .

Этот максимум можно приближенно (полагая  $\alpha = 2\gamma$ ) найти аналитически, перейдя от аргумента  $V_2$  к аргументу  $U_\infty$  с помощью соотношений (1.1), (1.2), (1.12) и

$$bU_\infty = \rho_L U_\pi$$

$$U_\pi^2 = \frac{2\mu_L}{\rho_L} + U_\infty^2, \quad V_2^2 - V_*^2 = U^2 - U_*^2, \quad (1.13)$$

$$\sin 2\gamma = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos 2\gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad t \equiv \operatorname{tg} \gamma.$$

Однако его проще найти численно, беря  $U(V_2)$  из рис. 4.5, а  $\alpha = 2\gamma$  — из рис. 4.10. Таким путем получают две кривые  $F(V_2)$  соответственно для двух крайних значений  $i_1 = 0$  и  $i_1 = 180^\circ$ , т. е. для значений  $V_* = \pm V_\tau$ . Оказалось (рис. 22.2), что  $\max_{V_2} \Delta h$  достигается при прак-

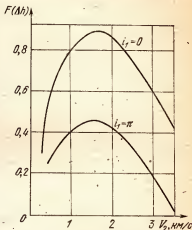


Рис. 22.2. Функции, характеризующие приращение геоцентрической энергии в результате облета Луны.  $V_2$  — геоцентрическая скорость входа в сферу действия,  $i_1$  — наклонение плоскости траектории к плоскости лунной орбиты.

тически одним и тем же слабо гиперболическом значении

$$\tilde{V}_2 \approx 1,6 \text{ км/с:}$$

$$\max_{V_2} \Delta h(i_1 = 0) \approx 3,6 \text{ км}^2/\text{с}^2, \quad \max_{V_2} \Delta h(i_1 = \pi) \approx 2,4 \text{ км}^2/\text{с}^2.$$

Уменьшения  $\Delta h$  с ростом  $i_1$  следовало ожидать вследствие роста  $U$  с  $i_1$  согласно (4.2.4).

4. *Замечания.* 1). Заметим, что  $\max_{V_2} \Delta V_{2,3}$ , где  $\Delta V_{2,3} = V_3 - V_2 = V_p - V_2$ , достигается в обоих случаях на левом краю  $V_2 = V_*$  области изменения  $V_2$ .

2) Заметим также, что задача на  $\max_{V_2} [|\Delta V_{2,3}|]$ , где  $\Delta V_{2,3} = V_3 - V_2$ , имеет в предположениях метода ТСД простое аналитическое решение\*) [1—1980]. Действительно, поскольку  $V_3 = U_3^\infty + V_L$ ,  $V_2 = U_2^\infty + V_L$ , то

$$|\Delta V_{2,3}| = |U_3^\infty - U_2^\infty| = \sqrt{2U_\infty^2 - 2U_\infty \cos \alpha_\infty} = 2U_\infty \sin \gamma \quad (1.14)$$

при любой плоскости  $\Pi'$  векторов  $U_2^\infty, U_3^\infty$  селеноцентрического движения (рис. 4.4). Подставляя  $\sin \gamma$  из (1.2), получим (обозначив  $U_2^\infty = U_3^\infty = U_\infty$ ):

$$|\Delta V_{2,3}| = 2U_\infty / (1 + \rho_\pi U_\infty^2 / \mu_L). \quad (1.15)$$

Отсюда видно, что для увеличения  $|\Delta V_{2,3}|$  выгодно уменьшать  $\rho_\pi$  (до нуля) при любом  $U_\infty$ .

При условии  $\rho_\pi \geq \rho_L$  существует оптимальное значение  $U_\infty^* \equiv \sqrt{\mu_L / \rho_L}$ , как показывает дифференцирование (1.15) по  $U_\infty$ . Соответствующее наибольшее значение

$$|\Delta V_{2,3}|_M = U_\infty^* = \sqrt{\mu_L / \rho_L}, \quad (1.16)$$

так что треугольник скоростей  $U_2 U_3 \Delta U_{2,3}$  является равнобедренным. Таким образом, при условии  $\rho_\pi > \rho_L$  оптимальным значением  $V_2$  в задаче на  $\max_{V_2} |\Delta V_{2,3}|$  является та-

кое значение  $V_2^*$ , при котором

$$U_\infty^2 \equiv V_L^2 + V_2^2 - 2V_L V_2^* \cos i_1 = U_\infty^* \\ (V_2^* = V_2 \sin \alpha_2 = \text{const}).$$

$$\text{Отсюда } V_2^* = \sqrt{\mu_L / \rho_L - V_L^2 + 2V_L V_\tau^* \cos i_1}.$$

\*) Сообщено авторам В. И. Левантовским в 1979 г. (см. [1—1980]).

Для случая Луны получим  $U_2 = 1,7$  км/с,  $V_2^* \approx 1,45$  км/с  $\approx V_2(r_L)$ . При этом направление вектора приращения  $\Delta V_{2,3}$  принадлежит конусу с осью  $U_2^\infty$  и углом раствора  $60^\circ$ .

3) Заметим еще, что при эллиптических скоростях разгон с нисходящей по отношению к Земле ветви выгоднее, чем с восходящей, так как скорости  $V_2$  и  $U_2$  входа оказываются меньше за счет большего удаления от Земли точки входа на СД. Это подтверждают и точные расчеты (см. рис. 22.3).

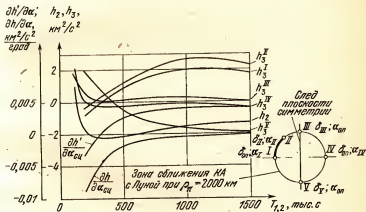


Рис. 22.3. Зависимость геоцентрической энергии, получающейся после облета Луны на расстоянии  $R_L = r_L$  от времени  $T_{1,2}$  полета до Луны для пяти фиксированных плоскостей (I—V) селеноцентрического движения;  $h_2(T_{1,2})$  — начальная энергия.

Задача разгона КА с помощью притягивающего действия Луны в точной постановке была рассмотрена в работе [2—1974]. При этом определялась разница между геоцентрической энергией  $h_3$  на выходе из СД и геоцентрической энергией  $h_2$  на входе в СД. Оказалось, что максимальное приращение геоцентрической энергии КА на выходе из СД зависит от расположения точки входа (на СД) относительно оси пучка и от времени перелета  $T_{1,2}$ . Для  $r_L = 2000$  км исследовалось влияние различия в положении точки входа КА в СД. Результаты исследований для характерных точек входа I—V представлены на рис. 22.3 в виде зависимости геоцентрических энергий

$h_3^I, h_3^{II}, h_3^{III}, h_3^{IV}, h_3^V$  на выходе КА из СД от времени перелета  $T_{1,2}$ . Для времен перелета  $T_{1,2} < T'_{1,2}$ , где  $T'_{1,2}$  — время перелета по траектории, соответствующей минимальной геоцентрической энергии  $h_1$ , наибольший прирост геоцентрической энергии КА достигается при входе в СД с селеноцентрическими координатами  $\delta_{сц} > \delta_{оп}$ ,  $\alpha_{сц} > \alpha_{оп}$ , что соответствует селеноцентрическим наклонениям  $i' < 90^\circ$ .

Траектории с  $T_{1,2} = T'_{1,2}$ , селеноцентрическими широтами  $\delta_{сц} > \delta_{оп}$  становятся эквивалентными по разгонному эффекту при долготах  $\alpha_{сц} > \alpha_{оп}$  и  $\alpha_{сц} < \alpha_{оп}$ . Значит, для гомановских траекторий перелета КА от Земли к Луне можно получить наибольший прирост геоцентрической энергии за счет действия гравитационного поля Луны на селеноцентрических орбитах как с  $i' > 90^\circ$ , так и с  $i' < 90^\circ$ . Вход в СД в точке III (см. рис. 22.3) сохраняет геоцентрическую энергию КА на выходе из СД (для времен перелета  $T_{1,2} > 250$  тыс. с и наклонения селеноцентрической орбиты  $\sim 90^\circ$ ). При  $T_{1,2} > T'_{1,2}$  углы  $\delta_{сц} > \delta_{оп}$  обеспечивают наибольший прирост геоцентрической энергии, который достигает максимума при  $T_{1,2} \approx 900$  тыс. с.

Результаты рис. 22.3 получены для  $i_1 = i_2 = 51^\circ$ , склонения Луны  $\delta_L = -5^\circ,2$ , ее прямого восхождения  $\alpha_L = 341^\circ,6$  при наклонении  $i_L = 27^\circ,8$  плоскости ее орбиты к плоскости экватора Земли.

## § 22.2. Использование сближения с Луной для запуска стационарного ИСЗ

Стационарность ИСЗ означает, что его орбита — круговая с наклонением к экватору  $i_s = 0$ , а период обращения равен звездным суткам. Из последнего условия получается радиус орбиты  $r_{ст} \approx 42\,164$  км, что более чем в шесть раз превосходит радиус  $r_\oplus$  Земли. Хотя  $r_{ст}$  примерно на порядок меньше радиуса  $r_L$  лунной орбиты, тем не менее для запуска стационарного ИСЗ с орбиты низкого ИСЗ в плоскости экватора требуются затраты характеристической скорости, большие затрат для достижения Луны и ближайших планет. При запуске не из плоскости экватора (например, с территории СССР) требуются еще большие энергетические затраты. Поэтому представляет интерес, следуя [3—1971], проанализировать затраты в

случае облета Луны с возвращением на перигейное расстояние  $r_k = r_{ct}$  в плоскости экватора, т. е. при условии  $i_2^{(H)} = 0$ .

Рассматривая эту задачу методом ТСД, из последнего условия получим, что Луна в момент  $t_k$  сближения должна находиться в плоскости экватора, т. е. в одном из узлов лунной орбиты на экваторе. Соответственно к плоскости лунной орбиты плоскость дуги  $\Gamma_{3,k}$  возвращения будет

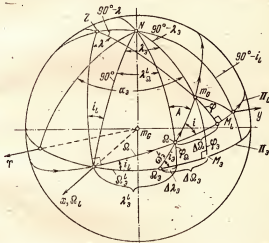


Рис. 22.4. Пересчет угловых параметров, определяющих траекторию в системах координат, связанных с экватором и с плоскостью лунной орбиты.

иметь (рис. 22.4) наклонения  $i_k = i_L$  (после сближения в восходящем узле) и  $i_k = -i_L$  (после сближения в нисходящем узле), где  $i_L$  — фиксированное в диапазоне  $(18^\circ 18', 28^\circ 36')$  наклонение лунной орбиты к экватору.

В пространстве  $uvw$  скоростей  $V_3$  выхода из СД Луны фиксированное наклонение  $i_k = \text{const}$  выделяет по одну сторону от оси  $u$  полуплоскость, которая вырезает на  $V_3$ -сфере часть  $L_i$  малого круга  $L$  (рис. 22.5). Эта часть пересекается с гиперboloидом  $r_k = r_{ct}$  в двух точках  $V_{3k}$  и  $V_{3n}$ , отличающихся знаком их координаты  $u$ :  $u_n > 0$ ,  $u_k < 0$ , т. е. знаком  $s_3$  радиальной скорости  $V_{3r}$ . Вектор  $V_{3n}$  соответствует нисходящему к Земле движению от СД, а век-

тор  $V_{3\downarrow}$  — восходящему. Наибольший практический интерес представляет нисходящее движение, как соответствующее меньшим временам возвращения и меньшему влиянию разброса начальных данных (чем восходящее движение). Оно одно далее и рассматривается. Движение КА к СД тоже рассматривается только восходящее — по тем же причинам.

Для реализуемости этого решения еще необходимо, чтобы траектория не пересекала Луну, т. е. чтобы было

$\rho_{\pi} > \rho_L$ , где  $\rho_{\pi}$  — минимальное расстояние траектории от Луны (в периселении). Здесь следует на основании результатов гл. 20 ожидать относительно узкого диапазона по начальной энергии, так как тип ветви при сближении с Луной меняется (имеем  $s_2 \cdot s_3 < 0$ ).

И действительно, если начальную энергию  $h_1$  характеризовать апогейным радиусом  $r_{\alpha 1}$  дуги  $\Gamma_{1,2}$  движения к СД, то имеем  $4 \cdot 10^5 < r_{\alpha 1} < 5 \cdot 10^5$  км. При меньших значениях  $r_{\alpha 1}$  Луна не всегда достигается (вследствие на-

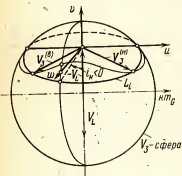


Рис. 22.5. Решения  $V_3^{(в)}$ ,  $V_3^{(н)}$  задачи облета с возвращением на заданные радиус и наклонение в перигее.

личия эксцентриситета у ее орбиты), а при больших значениях  $r_{\alpha 1}$  получается  $\rho_{\pi} < 2000$  км для  $0 < i_3^{(1)} < 90^\circ$ , как видно из рис. 22.6 (взятого из [3—1971]). На том же рис. 22.6 приведены результаты расчета затрат характеристической скорости на разгон к Луне и торможение в точке  $r = r_{\pi} = r_{ст}$ , времен полета  $T_{1,L}$  — к Луне,  $T_{L,\kappa}$  — от Луны (до  $r_{\pi} = r_{ст}$ ) и суммарного времени  $T_{1,\kappa} = T_{1,L} + T_{L,\kappa}$ , а также суммы  $W$  затрат характеристической скорости на разгон (с орбиты низкого ИСЗ с наклонением  $0 < i_1 < 90^\circ$  и торможением на стационарной орбите). Зависимости  $T_{1,L}$ ,  $T_{L,\kappa}$ ,  $T_{1,\kappa}$ ,  $\rho_{\pi}$  от  $r_{\alpha 1}$ , естественно, монотонно убывающие, а функция  $W(r_{\alpha 1})$  — монотонно возрастающая. Оказывается [3—1971], при начальной энергии, близкой к минимальной и наклонениях  $90^\circ > i_3^{(1)} > 30^\circ$  соз-



дание стационарного ИСЗ с помощью облета Луны энергетически выгоднее, чем без него. При  $38^{\circ},6 \leq i_0^1 \leq 90^{\circ}$  минимальные затраты на переход с облетом  $W(i_0^{(1)})$  меньше, чем затраты без облета, на 200—280 м/с.

При заданном  $i_0^{(1)}$  траектория перехода с минимальными энергетическими затратами определяется однозначно. С превышением энергетических затрат  $W$  над минимальными  $W_{\min}$  появляется возможность уменьшить

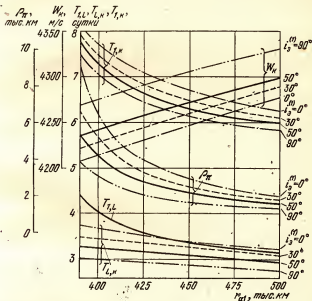


Рис. 22.6. Зависимость характеристик решения задач облета (с возвращением на заданные наклонение  $i_0$  и радиус в перигее) от оскулирующего начального апогейного радиуса.

вре́мя  $T_{1,k}$ . Например, при  $i_0^{(1)} = 50^{\circ}$  для  $W - W_{\min} = 40$  м/с имеем допустимые значения  $3,9 \cdot 10^3 < r_{al} < 4,6 \cdot 10^3$  км и соответствующий диапазон  $4,4_{\text{сут}} > T_{1,k} < 3,3$  сут.

Заметим, что если этот диапазон превышает сутки, то где бы на поверхности Земли ни была расположена траектория запуска, ее можно использовать для реализации рассматриваемого облета Луны.

Отметим также, что при запуске с наклонением  $\pi - i_L > i_3^{(1)} > i_L$ , соответствующим положительному наклонению  $0 < i < \pi$  к плоскости лунной орбиты, сближение с Луной в нисходящем узле должно быть энергетически выгоднее, чем в восходящем (при прочих равных условиях). Действительно, за счет меньшей величины угла между скоростью Луны  $V_L$  и скоростью  $V_2^B$  величина  $U$  входной (и выходной) селеноцентрических скоростей в первом случае будет меньше, чем во втором, т. е. будут меньше

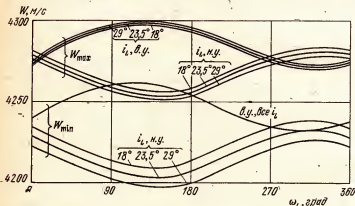


Рис. 22.7. Зависимость затрат  $W$  характеристической скорости от аргумента  $\omega_L$  широты перигея Луны при фиксированных значениях наклонения  $i_L$  плоскости лунной орбиты к экватору (в. у. — восходящий узел, н. у. — нисходящий узел орбиты Луны на экваторе).

радиус  $V_3$ -сферы, энергия  $h_k$  траектории возвращения и тормозной импульс в перигее.

Однако эффект этот оказывается невелик. Причина этого в том, что изменения скорости в перигее на порядок меньше, чем соответствующие изменения скорости на расстоянии Луны (в силу интеграла энергии). Однако он проявляется, как видно из рис. 22.7, взятом из [3—1971], при всех наклонениях  $i$  и почти при всех аргументах широты  $\omega_L$  перигея Луны, лишь на небольшом участке орбиты, перекрываясь другим слабым эффектом — отклонением скорости Луны от нормали к радиусу (из-за наличия эксцентриситета у ее орбиты). Оценка в работе [3—1971] влияния эксцентриситета лунной орбиты показывает, что

метод ТСД может применяться и без использования предположения о том, что орбита массы  $m_L$  — круговая, и может давать не только качественные, но и количественные результаты.

### § 22.3. Приближенный анализ геоцентрических орбит, получающихся после облета Луны

В предыдущем параграфе рассмотрен методом ТСД тот частный случай облета Луны, когда: а) сближение с Луной происходит около одного из узлов лунной орбиты, б) после сближения КА выходит на геоцентрическую орбиту  $\Gamma_{3,k}$ , лежащую в фиксированной плоскости (экватора) и имеющую фиксированный перигейный радиус ( $r_{\pi}^{(k)} = 42\,164$  км). Интересно с помощью метода ТСД рассмотреть сближение КА с Луной во всех точках ее орбиты (а не только в узлах) и выяснить, какие диапазоны изменения геоцентрических элементов дуги  $\Gamma_{3,k}$  можно реально получить за счет изменения точки входа в СД при трех фиксированных начальных данных: наклонении  $i_1$  к плоскости лунной орбиты, радиусе  $r_{\pi}^{(1)}$  перигея и геоцентрической энергии  $h_1$ .

Реально — значит без пересечения траектории с лунной поверхностью  $\rho = \rho_L$ , т. е. при условии, что радиус периселения  $\rho_{\pi} > \rho_L$  на участке  $\gamma_{2,3}$  селеноцентрического движения в СД. Назовем траектории и их элементы, удовлетворяющие этому условию, *допустимыми*. При трех фиксированных начальных элементах  $h_1, r_{\pi}^{(i)}, i_1$  остальные элементы  $\omega_1, \Omega_1, \tau_1$  считаются выбираемыми так, чтобы реализовался нужный вектор  $\mathbf{d}$  прицельной дальности при встрече с реально движущейся СД Луны в заданный (произвольно) момент  $t_{\mu}$ .

Достижимые значения геоцентрических элементов  $h_k, r_{\pi}^{(k)}, i_k, \omega_k, \Omega_k, \tau_k$  дуги  $\Gamma_{3,k}$  полета КА от СД Луны согласно методу ТСД определяются допустимой совокупностью векторов  $V_3$  геоцентрических выходных скоростей на  $V_3$ -сфере. Поскольку размерами СД пренебрегается по сравнению с расстоянием Земля — Луна, то наименьшая  $h_k^{(m)}$  и наибольшая  $h_k^{(M)}$  энергии получаются, соответственно, для наименьшего и наибольшего (по модулю) векторов  $V_3$ . Согласно § 4.3, на  $V_3$ -сфере наименьший мо-

дугу вектора  $V_3$  равен  $|U - V_L|$ . При достаточно больших начальных энергиях  $h_1$  направление  $V_3^{(m)}$ , как следует из рис. 4.9, не принадлежит конусу  $K_V$  скоростей  $V_3$  выхода допустимых траекторий. Поэтому граница  $h_k^{(m)}$  искомого диапазона изменения энергии  $h_k$  определяется вектором  $V^{(m)} \in K_V$ , направление которого образует наименьший угол с направлением  $(-V_L)$ .

С уменьшением начальной энергии  $h_1$  до некоторого небольшого по модулю и (рис. 4.9) отрицательного значения  $h_1'$  направление  $(-V_L)$  оказывается на границе конуса  $K_V$  и при  $h_1 < h_1'$  находится внутри  $K_V$ . По соответствующему вектору  $U_3 \parallel V_L$  для случая встречи с СД на нисходящей ветви дуги  $\Gamma_{1,2}$  находится соответствующее  $h_1'$  значение энергии после сближения, (левый край  $h_k^{(m)}$  диапазона  $h_k$  при  $h_1 \leq h_1'$ ):

$$h_k^{(m)} = (U - V_L)^2 - \frac{2\mu G}{r_L}. \quad (3.1)$$

В случае встречи на восходящей ветви формула (3.1) годится, лишь когда вектор  $V_3$ , имеющий направление  $(-V_L)$ , не принадлежит запретной зоне  $Z$  (как, например, на рис. 19.2, а в § 19.2). Если же он принадлежит области  $Z$  (как на рис. 19.2, б), то минимальной длины вектор  $V_3^{(m)}$  находится на границе  $Z$  этой области из условия минимальности его угла с вектором  $V_L$ .

Направление  $V_L$  при всех значениях  $h_1$  находится вне конуса  $K_V$  (как показано в § 22.1), поэтому вектор  $V_p$ , определяющий правый край  $h_k^{(M)}$  диапазона  $h_k$  по формуле

$$h_k^{(M)} = V_p^2 - \frac{2\mu G}{r_L}, \quad (3.2)$$

так направлен на конусе  $K_V$ , что образует минимальный угол с направлением  $V_L$ . При различных значениях  $h_1$  эти векторы  $V_p$  были проанализированы в § 22.1 (как реализующие наибольший разгон).

Что касается диапазона изменения  $r_{\pi}^{(k)}$ , то его минимальное значение равно нулю при  $U > V_L$ , поскольку в этом случае на  $V_3$ -многообразии существует чисто радиальное (по отношению к Земле) направление вектора

$V_3$ . При  $U < V_L$  такого направления нет, и левый край  $r_{\pi}^{(m)}$  диапазона  $r_{\pi}^{(k)}$  определяется по-разному в случаях встречи КА с СД на восходящей и нисходящей ветвях дуги  $\Gamma_{1,2}$ , как было и при определении величины  $h_k^{(m)}$ .

В случае нисходящей ветви величина  $r_{\pi}^{(m)}$  находится по вектору  $V_3^*$  с минимальной трансверсальной компонентой  $V_{3\tau}^{(m)}$  (причем согласно рис. 19.3, а  $V_3^*$  совпадает с вектором  $V_3^{(m)}$ , по которому согласно (3.1) находится край  $h_k^{(m)}$ ) из интегралов площадей и энергии, написанных для точек 3 выхода из СД и  $\pi$  перигея:

$$r_L V_{3\tau}^{(m)} = r_{\pi}^{(m)} V_{\pi}, \quad V_{\pi}^2 = \frac{2\mu_G}{r_{\pi}^{(m)}} + h_k. \quad (3.3)$$

Беря  $h_k$  из (3.1) и исключая  $V_{\pi}$ , получим для  $r_k^{(m)}$  квадратное уравнение, у которого берется решение, близкое к приближенному  $r_k^{(0)}$ , которое получается при  $h_k = 0$ :

$$r_k^{(0)} = \frac{r_L^2 (V_{3\tau}^{(m)})^2}{2\mu_G}. \quad (3.4)$$

В случае встречи на восходящей ветви вектор  $V_3^*$  с минимальной компонентой  $V_{3\tau}^{(m)}$  может не совпадать с вектором  $V_3^{(m)}$  минимальной длины, если последний принадлежит запретной области  $Z$ . Однако можно пользоваться по-прежнему приближенной формулой (3.4), потому что для облетных траекторий  $r_{\pi}^{(m)} \ll r_L$ , и при  $U < V_L$  будет в (3.3)  $h_k \ll 2\mu_G/r_{\pi}^{(m)}$ .

Максимальное значение  $r_{\pi}^{(M)}$  элемента  $r_{\pi}^{(k)}$ , как показано в Приложении 5, определяется вектором  $V_3$  с максимальной реализуемой компонентой  $V_{3\tau}$ , хотя соответствующая энергия  $h_k$  не мала. При этом  $r_{\pi}^{(k)}$  может достигать предельно большого значения  $r_L$ , например, если: а) встреча КА с СД происходит на нисходящей ветви, б) конус  $K_V$  содержит часть меридиана  $V_3$ -сферы в плоскости  $vw$  и в) на этой части имеются векторы  $V_3$  с модулем  $V_3 > V_L$  (картина, близкая к представленной на рис. 19.3, б для случая встречи на восходящей ветви). Соответствующие этим векторам  $V_3$  дуги  $\Gamma_{3,k}$  имеют  $r_{\pi}^{(k)} = r_L$  потому что  $V_3 \perp r_3 = r_L$ , и величина скорости



клонения  $i_3$  (плоскости дуги  $\Gamma_{3,k}$  к плоскости лунной орбиты) не может быть больше предельного значения

$$i_n = \arcsin(U_2/V_L) \approx 84^\circ 20'. \quad (3.6)$$

Чтобы рассматриваемые векторы  $V_3$  не попадали в запрещенную область  $Z_V$ , будем искать траектории с  $r_n^{(k)} = 7000 \text{ км} > r_n^{(m)}$ . Задание  $r_n^{(k)}$  в рамках метода ТСД определяет линию пересечения  $r_n^{(k)}$ -гиперболоида (см. §§ 4.4, 4.5) с  $V_3$ -сферой, а задание  $i_n$  и знака  $s_3$  определяет единственный вектор  $V_3$  на  $V_3$ -многообразии. По  $V_3$  находят вектор  $U_3 = V_3 - V_L$ , угол  $\alpha$  между векторами  $U_2$  и  $U_3$  и радиус  $\rho_n$  периселения (по формуле (1.3)). Результаты расчетов представлены кривыми  $\rho_n(r_n^{(k)})|_{i=\text{const}}$  на рис. 22.9, а, б соответственно для  $i_k > 0$  и  $i_k < 0$ .

Предельным наклонениям  $i_n^\pm = \pm i_n$  соответствуют две точки — два вектора  $V_3$ :

$$V^\pm = (0, -V_L \cos^2 i^\pm, -V_L \cos i_n^\pm \sin i_n^\pm). \quad (3.7)$$

Общая их величина  $V^\pm = V_L \cos i_n = 0,101 \text{ км/с}$  при малых разностях  $V_L - U > 0$ , т. е. малых  $\cos i_n$  (рис. 22.8), может оказаться меньше величины  $V_{\text{mg}}$ , реализующей  $\min_S V_3$  на линии  $S$  пересечения  $r_n^{(m)}$ -гиперболоида с  $V_3$ -сферой. Эта скорость  $V_{\text{mg}}$  находится в плоскости  $v_3 w_3$  (рис. 22.8), является (согласно §§ 4.4, 4.5, рис. 4.15, 4.19, 20.4) действительной полуосью  $A$   $r_n^{(m)}$ -гиперболоида и определяется по модулю формулой (44.8). Соответствующие векторам  $V_3 = V_{\text{mg}}^{(\pm)}$  значения  $i_A^\pm$  наклонения  $i_k$  определяется из треугольника со сторонами  $UV_L V_{\text{mg}}$  формулой (рис. 22.8);

$$\cos i_A^\pm = (V_{\text{mg}}^2 + V_L^2 - U^2)/2V_{\text{mg}}V_L. \quad (3.8)$$

Для исходных  $r_n^{(k)} = 7000 \text{ км}$  и величины  $U$ , определяемой данными (3.5), получаются  $V_{\text{mg}} = 0,192 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ ,  $i_A^\pm = \pm 83^\circ 10'$ .

Сечения  $V_3$ -сферы плоскостями  $i = i_k^\pm$  — окружности  $L(i_k^\pm)$  и сечения  $\Gamma$   $r_n^{(k)}$ -гиперболоида этими плоскостями — гиперболы  $\Gamma(r_n^{(k)})$  представлены на рис. 22.10 для  $i_k^{(\pm)} = 0$ ;  $i_k = i_A^{(\pm)}$  и для  $r_n^{(k)} = 7 \text{ тыс. км}$  и  $350 \text{ тыс. км}$ .

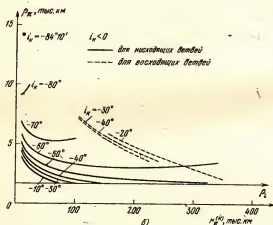
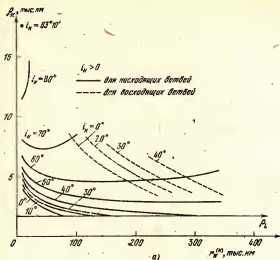


Рис. 22.9. Зависимость радиуса  $\rho_k$  переселения облетной траектории от радиуса  $r_k^{(n)}$  участка полета от Луны при фиксированных наклонениях  $i_k$  этого участка: а)  $i_k > 0$ ; б)  $i_k < 0$ .



Векторы  $V_3$  для значений  $i_K^{(\pm)} = \pm i_A^+, \pm 80^\circ, \pm 60^\circ$  при  $7000 \text{ км} < r_\pi^{(K)} < r_L$  не будут принадлежать запретной зоне  $Z$ , так как при небольших превышениях  $r_\pi^{(K)}$  над  $r_\pi^{(m)} < r_\pi^{(K)} = 7 \text{ тыс. км}$  окружности  $L$  не касаются боков зоны  $Z$ , а при больших  $r_\pi^{(K)}$  - гиперboloид проходит ниже зоны  $Z$  (рис. 22.8). На рис. 22.9 сплошные кривые получены для  $s_3 < 0$ , а пунктирные — для  $s_3 > 0$  (при  $s_3 > 0$

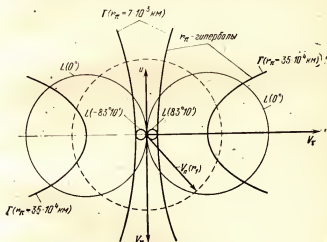


Рис. 22.10. Сечения  $V_3$ -сферы плоскостями  $i_K^{(\pm)} = \pm i_K$  — окружности  $L(i_K^{(\pm)})$  — и  $i_\pi^{(K)}$ -гиперboloидами — гиперболы  $\Gamma(r_\pi^{(K)})$  в пространстве компонент выходной геоцентрической скорости: радиальной  $V_r$  и трансверсальной  $V_\tau$ .

выход из СД происходит на восходящую по отношению к Земле ветвь дуги  $\Gamma_{3,K}$ . Сплошная и пунктирные кривые соединяются справа в точке, соответствующей меридиану  $u_3 = 0$  на  $V_3$ -сфере, т. е. чисто трансверсальному по отношению к Земле выходу КА из СД.

Заметим, что наклонение  $i_0$  к экватору плоскости дуги  $\Gamma_{3,K}$  зависит от  $i_K$  и от долготы  $\Omega$  узла дуги  $\Gamma_{3,K}$ , отсчитываемой от восходящего узла Луны на экваторе. В предположениях метода ТСД величина  $\Omega$  согласно этому определению совпадает с аргументом широты Луны  $u_L$ , а по-

тому известна (она зависит только от момента  $t_*$  сближения, который считается заданным). Задаваясь значением  $i = i_*$ , можно получить из рис. 22.4 по формулам Приложения 3 значения  $i_3(i_*, \varphi)$  (рис. П.5).

Что касается долготы узла  $\varphi_L$  относительно экватора, то она определяется величиной  $\varphi_3^{(L)}$  — углового расстояния узла  $\varphi_3$  траектории на экваторе от восходящего узла  $\varphi_L$  лунной орбиты, а величина  $\varphi_3^{(L)}$  зависит только от  $i_3$  и  $\varphi$  (рис. П.4), так как определяется чисто геометрически (см. рис. 22.4 и Приложение 3).

Величина  $\omega_3^L = \omega_3 - \omega_K$  отличия аргументов широты перигея, отсчитываемых в плоскости траектории соответственно от экватора и от плоскости лунной орбиты, также определяется чисто геометрически по  $i_3$  и  $\varphi$  (см. рис. 22.4 и П.3). Заметим, что если  $r_K^{(K)} = 0$  или величина  $V_3 > V_L$ , а направление  $V_3$  трансверсально, то в предположениях метода ТСД будет  $\omega_K = 0$ . При неточном выполнении этих условий, например при радиусе  $r_K^{(K)} < r_\gamma \ll r_L$ , величина  $\omega_K$  будет мала (порядка нескольких градусов). Пренебрегая этой величиной, приближенно можно считать  $\omega_3 = \omega_3^L$ , т. е. определять аргумент широты перигея  $\omega_3$  относительно экватора формулами (2.2') и (2.5') Приложения 2 (рис. П.3).

Переходя к последнему элементу,  $\tau_K$  — моменту прохождения КА через перигей  $r_K^{(K)}$  (первый после выхода КА из СД), заметим, что интереснее не этот момент, а полное время  $T = \tau_K - t_1$  полета от Земли до перигея  $r_K^{(K)}$ , поскольку начальный момент  $t_1$  задается произвольно. В § 19.4 было показано, что время  $T$  изменяется в диапазоне  $(T_m, \infty)$ , где  $T_m = t_* - t_1$  — определяемое начальными энергией  $h_1$  и расстоянием  $r_2 = r_L$  время полета от Земли до периселения. Изолинии  $T(d_L, d_z) = \text{const}$  были представлены на ортогональной к направлению  $U_2^0$  скорости входа в СД плоскости компонент  $d_L, d_z$  прицельной дальности (рис. 19.9, 19.10) и на  $V_3$ -сфере (рис. 19.11—19.14). Учет ограничения  $\rho_K \geq \rho_L$  реализуемости траектории (т. е. непересечения лунной поверхности  $\rho = \rho_L$ ), как видно из рис. 19.13, 19.14, существенно урезает область относительно малых  $T$ , особенно в случае энергий, не близких к минимальным.

## Приложение 1

### Об определении наклона в диапазоне ( $-180^\circ, 180^\circ$ ) и оси пучка (перигейного радиуса)

1. Такой диапазон определения наклона удобен для рассмотрения осесимметричных пучков траекторий. Осью  $O_n$  селеноцентрического пучка будем считать направление оскулирующего в перигейном (или где-либо вблизи него) вектора скорости «на бесконечности» подлетной ветви гиперболы.

При рассмотрении перелетов Земля — Луна и Луна — Земля вне СД Луны без учета возмущений от Луны направлением оси геоцентрического пучка можно считать направление  $(-r_L^0)$ . С учетом возмущений оскулирующее направление геоцентрического участка траектории будем относить к тому оскулирующему узлу  $\Omega$  в плоскости  $xu$  (например, лунной орбиты), который ближе к оскулирующему перигею. Это удобно, во-первых, потому, что для практически интересных энергий (порядка нескольких км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>) и перигейных радиусов (до 50 тыс. км) направление на перигей  $\pi$  близко к направлению  $(-r_L^0)$  и, во-вторых, потому, что такое определение узла не зависит от того, к Земле или от Земли происходит перелет.

Аналогичным образом определять узел траектории селеноцентрического пучка нецелесообразно, так как для практически интересных малых углов  $\delta_{on}$  оси пучка с плоскостью лунной орбиты ( $|\delta_{on}| < 15^\circ$ ) направление на ближайший к периселению узел может скачком изменяться на противоположное при малом изменении величины прицельной дальности. Поэтому удобнее определять наклонение  $i'$  в узле  $\Omega'$ , ближайшем по его угловому расстоянию к направлению полупрямой  $m_L O_n$  — оси пучка. Это угловое расстояние  $u_{on}$  (как и аргумент широты перигея  $\omega = u_\pi$  в геоцентрическом случае) не может превосходить  $90^\circ$ . Поэтому и отклонение  $\Omega'_* = \Omega' - \alpha_{on}(\Omega_* = \Omega - \lambda_\pi)$  долготы  $\Omega'_*(\Omega)$  узла от долготы  $\alpha_{on}(\lambda_\pi)$  оси пучка (перигея) тоже не превосходит  $90^\circ$  (на рис. П.1, а и в тексте после селеноцентрических параметров даются в скобках геоцентрические параметры).

2. Итак, пусть заданы долгота  $\alpha_{on}(\lambda_\pi)$ , широта  $\delta_{on}(\varphi_\pi)$  оси пучка (перигея) и направляющие косинусы  $C'_x, C'_y, C'_z$  ( $C_x, C_y, C_z$ ) вектора  $C'(C)$  кинетического момента. Повернем вокруг оси  $z'(z)$

оси  $x', y'$  ( $x, y$ ) в такое положение  $x^*, y^*$ , чтобы стало  $\alpha_{оп}^* = 0$  ( $\alpha_{\pi}^* = 0$ ). Соответственно получим направляющие косинусы вектора  $C'(C)$  кинетического момента (рис. П.1, б):

$$C_{x^*} = C'_x \cos \alpha_{оп} + C'_y \sin \alpha_{оп}, \quad C_{y^*} = -C'_x \sin \alpha_{оп} + C'_y \cos \alpha_{оп}.$$

Из формул

$$C_{x^*} = \sin i' \sin \Omega'_*, \quad C_{y^*} = -\sin i' \cos \Omega'_*, \quad C_{z^*} = \cos i'$$

получим

$$-90^\circ < \Omega'_* < 90^\circ, \text{ — по } \operatorname{tg} \Omega'_* = -C_{x^*}/C_{y^*} \text{ и}$$

$$-\pi < i' < \pi \text{ — по } \cos i' = C_{z^*} \text{ и } \operatorname{sign} \sin i' = -\operatorname{sign} C_{y^*},$$

$$\sin i' = -C_{y^*}/\cos \Omega'_* = C_{x^*}/\sin \Omega'_*,$$

причем  $\Omega' = \alpha_{оп} + \Omega'_* (\Omega = \lambda_{\pi} + \Omega'_*)$ .

Эту процедуру можно упростить, находя угол  $\Omega'(\Omega)$  сразу, т. е. без вычисления  $C_{x^*}, C_{y^*}, C_{z^*}, \Omega'_*$ . А именно, по  $\operatorname{tg} \Omega' =$

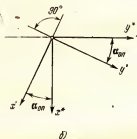
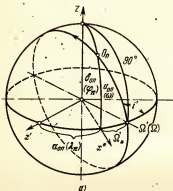


Рис. П.1. Определение наклона  $i'$  в диапазоне  $(-180^\circ, 180^\circ)$  и долготы узла  $\Omega'$  в диапазоне  $(-90^\circ, 90^\circ)$ : а — единичная сфера, б — основная плоскость.

$= -C'_x/C'_y$  находятся два значения долготы узла  $\Omega'(\Omega)$ . Из них оставляется значение, ближайшее к заданной долготы  $\alpha_{оп}(\lambda_{\pi})$ , при этом по  $\cos i' = C_{z^*}$  и  $\sin i' = C_{x^*}/\sin \Omega' = -C'_{y^*}/\cos \Omega'_*$  находится наклонение  $i'(i)$  в диапазоне  $(-\pi, \pi)$ . Заметим, что данное определение углов  $\Omega', (\Omega), i'(i)$ , как и обычное, не зависит от выбора системы координат  $x'y'(xy)$ .

Для заданного значения  $\delta_{оп}(\varphi_n)$  широты направления  $O_n(\pi)$  найдем аргумент широты  $-90^\circ < u_{оп}(\omega) < 90^\circ$  этого направления по  $\sin u = \sin \delta_{оп} / \sin i'$  ( $\sin \omega = \sin \varphi_n / \sin i$ ). Заметим, что  $\cos u_{оп} = \cos \delta_{оп} \cdot \cos \Omega_* \geq 0$ , так как  $\Omega_* (\Omega_*) \leq 90^\circ$  (рис. П.4).

3. Если оказывается  $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$  при данном определении углов  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ , то оно совпадает с обычным. Если оказывается  $-180^\circ < i < 0^\circ$ , то переход к обычному определению делается изменением  $\Omega$  на  $180^\circ$  в такую сторону, чтобы иметь  $0 < \Omega < 2\pi$  (или  $|\Omega| < \pi$ ), увеличением  $\omega$  на  $180^\circ$  и заменой  $i$  на  $(-i)$  (рис. П.1, а).

Если при обычном определении углов  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  оказывается  $|\omega| > 90^\circ$ , то переход к данному в пункте 2 определению делается изменением  $\Omega$  на  $180^\circ$  в такую сторону, чтобы иметь  $0 < \Omega < 2\pi$  (или  $|\Omega| < \pi$ ), уменьшением  $\omega$  на  $180^\circ$  и заменой  $i$  на  $(-i)$ .

## Приложение 2

### Пересчет угловых элементов от плоскости лунной орбиты к плоскости экватора и обратный пересчет

1. Ограниченную круговую задачу трех точек  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  удобно рассматривать в системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , координатной плоскостью  $xy$  которой является плоскость движения притягивающих масс  $m_1$ ,  $m_2$ , а ось  $z$  направлена по кинетическому моменту масс  $m_1$ ,  $m_2$ . Тогда из пространственной задачи легко выделяется плоская — о движении непритягивающей частицы  $m_0$  в плоскости  $xy$ , если брать начальные значения  $z_0 = 0$  и  $dz/dt = 0$ .

Однако в задаче Земля ( $m_G$ ) — Луна ( $m_L$ ) — КА ( $m_0$ ) условия, определяющие траектории перелетов между Землей и Луной, обычно задаются в геоэкуаториальной системе координат  $m_G x_3 y_3 z_3$ , у которой оси  $x_3 y_3$  находятся в плоскости экватора, а ось  $z_3$  направлена к северному полюсу  $N$  Земли. Поэтому нужны формулы пересчета элементов орбиты КА из системы  $m_G x y z$  в систему  $m_G x_3 y_3 z_3$  (и обратно). При этом будут пересчитываться лишь угловые элементы  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ , поскольку остальные элементы  $p$ ,  $e$ ,  $\tau$  не зависят от выбора системы координат. Если принять, что ось  $x$  направлена в восходящий узел  $\Omega_L$  лунной орбиты на экваторе, то ось  $z$  получается из оси  $z_3$  поворотом вокруг оси  $x$  на угол  $i_L$  (наклонения плоскости лунной орбиты к экватору).

2. Дадим формулы расчета элементов  $\Omega_3$ ,  $i_3$ ,  $\omega_3$  по  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega_L$ ,  $i_L$ . Обозначив  $\Omega_3^L \equiv \Omega_3 - \Omega_L$ ,  $\omega_3^L \equiv \omega_3 - \omega$ , получим из теоремы косинусов для угла  $(180^\circ - i_3)$  сферического треугольника  $\Omega_L \Omega_3 \Omega$  (рис. П.2, а):

$$\cos i_3 = \cos i_L \cos i - \sin i_L \sin i \cos \Omega,$$

$$i_3 \text{ — в I, II четверти,} \quad (2.1)$$

по теореме синусов

$$\sin \omega_3^L = \sin i_L \sin \Omega / \sin i_3, \quad (2.2)$$

$$\sin \Omega_3^L = \sin i \sin \Omega / \sin i_3, \quad (2.3)$$

из теоремы косинусов для сторон  $\Omega_L^L, \omega_3^L$  имеем

$$\cos \Omega_L^L = \cos \Omega \cos \omega_3^L + \sin \Omega \sin \omega_3^L \cos i, \quad (2.4)$$

$$\cos \omega_3^L = \cos \Omega \cos \Omega_L^L + \sin \Omega \sin \Omega_L^L \cos i_L.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения  $\cos \Omega_L^L, \sin \Omega_L^L$  и

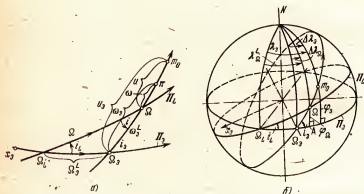


Рис. П.2. Пересчет угловых элементов от одной основной плоскости ( $\Pi_L$  и другой ( $\Pi_3$ ): а — основной сферический треугольник, б — дуги больших кругов на единичной сфере.

$\sin \omega_3^L$  из трех предыдущих формул, после тождественных преобразований получим

$$\cos \omega_3^L = (\cos \Omega \sin i_L \cos i + \cos i_L \sin i) / \sin i_3. \quad (2.5)$$

По формулам (2.2), (2.5) найдем  $|\Omega_L^L| < \pi$ , по формулам (2.3) и (2.4) найдем  $|\Omega_L^L| \leq \pi$  и получим

$$\Omega_3 = \Omega_L + \Omega_3^L, \quad \omega_3 = \omega + \omega_3^L. \quad (2.6)$$

3. Обратный пересчет (от угловых элементов  $\Omega_3, i_3, \omega_3$ , отнесенных к плоскости экватора, к элементам  $\Omega, i, \omega$ , отнесенным к плоскости лунной орбиты) выполняется по тем же формулам (2.1) — (2.6) после замены в них  $i$  на  $\pi - i_3$  (а  $i_3$  на  $\pi - i$ ) и  $\Omega$  на  $\Omega_3$ , поскольку сторона  $\Omega$  и угол  $i$  в сферическом треугольнике  $\Omega_L \Omega_3 \Omega$  (рис. П.2, а) играют такую же роль, как

сторона  $\Omega_0^i$  и угол  $\pi - i_0$ :

$$\cos i = \cos i_L \cos i_0 + \sin i_L \sin i_0 \cos \Omega_0, \quad (2.1')$$

$i$  — в I, II четверти

$$\sin \omega_0^L = \sin i_L \sin \Omega_0 / \sin i_0, \quad (2.2')$$

$$\sin \Omega_0 = \frac{\sin i_0 \sin \Omega_0}{\sin i}, \quad (2.3')$$

$$\cos \Omega_0 = \cos \Omega_0^L \cos \omega_0^L - \sin \Omega_0^L \sin \omega_0^L \cos i_0, \quad (2.4')$$

$$\cos \omega_0^L = \frac{-\cos \Omega_0 \sin i_L \cos i_0 + \sin i_0 \cos i_L}{\sin i}, \quad (2.5')$$

$$\Omega_0^L = \Omega_0 - \Omega_L, \quad \omega = \omega_0 - \omega_0^L. \quad (2.6')$$

### Приложение 3

#### Зависимость угловых элементов траектории от долготы ее узла в плоскости лунной орбиты при постоянном наклонении к экватору Земли

В тех случаях, когда задано наклонение  $i_0$  наземной трассы запуска КА к Луне или перигейного участка траектории возвращения от Луны к Земле, представляют интерес зависимости оскулирующих в перигее (или в близкой к Земле точке) элементов  $\Omega_0(\Omega)$ ,  $\omega_0(\Omega)$ ,  $i(\Omega)$  от долготы  $\Omega$  узла траектории в плоскости лунной орбиты (причем  $\Omega_0$ , как и в Приложении 2, отсчитывается от восходящего узла  $\Omega_L$  лунной орбиты на экваторе). Здесь угол  $\Omega_0$  есть долгота ближайшего к перигею узла траектории в плоскости экватора (отсчитываемая, например, от направления на точку  $\Upsilon$  весеннего равноденствия),  $\omega_0$  — аргумент широты перигея траектории (отсчитываемый от плоскости экватора),  $-\pi < i < \pi$  — наклонение плоскости траектории к плоскости лунной орбиты. Эти углы зависят от наклонения  $i_L$  плоскости лунной орбиты к экватору.

Поскольку величина  $\Omega_0$  зависит не только от  $\Omega$ , но еще от выбора направления оси  $x$  в плоскости экватора и долготы  $\Omega_L$  узла лунной орбиты на экваторе, то вместо  $\Omega_0$  интереснее вычислять угловое расстояние  $\Omega_0^L = \Omega_0 - \Omega_L$  узла траектории от узла  $\Omega_L$  лунной орбиты, которое зависит только от  $\Omega$  (при известном наклонении  $i_L$ ). Аналогично вместо  $\omega_0$  интереснее вычислять аргумент широты  $\omega_0^L = \omega_0 - \omega$  узла  $\Omega$  относительно экватора, поскольку функция  $\omega_0^L(\Omega)$  не зависит от величины  $\omega$ .

Зависимость  $\omega_9^L(\Omega)$  определяется формулой (2.2) Приложения 2 в предположении, что  $|\omega_9^L| \leq 90^\circ$ . Для определения функции  $\Omega_9^L(\Omega)$  сначала находим из прямоугольного сферического треугольника  $\Omega_9 L \Omega_9 A$  (рис. 22.4 и П.2, б) по теореме синусов

$$\sin \varphi_{\Omega_9} = \sin i_L \sin \Omega, \quad |\varphi_{\Omega_9}| \leq 90^\circ \quad (3.1)$$

и по теореме косинусов для сторон

$$\cos \lambda_{\Omega_9}^L = \cos \Omega / \cos \varphi_{\Omega_9}. \quad (3.2)$$

Затем находится из прямоугольных сферических треугольников

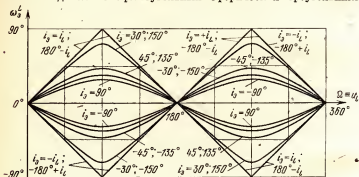


Рис. П.3. Зависимость изменения  $\omega_9^L$  аргумента широты перигея (при переходе к экваториальной основной плоскости) от долготы  $\Omega$  узла плоскости траектории на плоскости лунной орбиты при фиксированных наклонениях  $i_9$  плоскости траектории к плоскости экватора.

$\Omega_9 N \Omega_9 L$  и  $\Omega_9 N \Omega_9 \Omega$  по теореме синусов соответственно

$$\sin \lambda_{\Omega_9}^L = \sin \Omega \cos i_L / \cos \varphi_{\Omega_9}, \quad (3.3)$$

$$\sin \Delta \lambda_{\Omega_9}^L = \sin \omega_9^L \cos i_9 / \cos \varphi_{\Omega_9}. \quad (3.4)$$

Далее находится  $0 < \lambda_{\Omega_9}^L < 2\pi$  из (3.2), (3.3),  $\Delta \lambda_{\Omega_9}^L$  в  $\pm 1$  четверти — из (3.4) и

$$\Omega_9^L = \lambda_{\Omega_9}^L - \Delta \lambda_{\Omega_9}^L. \quad (3.5)$$

Из треугольника  $\Omega_9 L \Omega_9 \Omega$  находим по теореме синусов и теореме косинусов для углов

$$\sin i = \sin \Omega_9^L \sin i_9 / \sin \Omega, \quad (3.6)$$

$$\cos i = \cos i_L \cos i_9 + \sin i_L \sin i_9 \cos \Omega_9^L.$$



Вычисленное по формуле (2.2) семейство кривых  $\omega_2^L(\Omega)|_{i_2=\text{const}}$  представлено на рис. П.3. Это семейство для  $i_2 > 0$  ограничено изнутри кривыми  $i_2 = \pm 90^\circ$ , похожими на синусоиду, а снаружи — двумя ломаными  $i_2 = i_L$  (она же  $i_2 = \pi - i_L$ ) и  $i_2 = -i_L$  (она же  $i_2 = -\pi + i_L$ ). Все кривые, естественно, проходят через точки  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$ . Вершины ломаных находятся в точках  $(\pi/2, \pm\pi/2)$

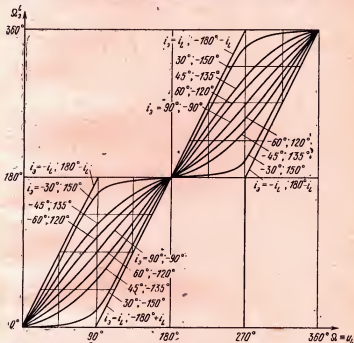


Рис. П4. Зависимость долготы  $\Omega_2^L$  узла плоскости траектории на экваторе от долготы  $\Omega$  ее узла на плоскости лунной орбиты при фиксированных наклонениях  $i_2$  плоскости траектории к плоскости экватора.

и  $(3/2\pi, \pm\pi/2)$ . Это естественно, так как при  $i = i_L$  движение КА происходит в плоскости лунной орбиты, так что  $\omega_2^L$  растет в точности как  $\Omega$  при изменении  $-\pi/2 < \Omega < \pi/2$ . При изменении  $\pi/2 < \Omega < 3/2\pi$  движение происходит не в плоскости лунной орбиты, а в симметричной относительно меридиана узла  $\Omega$  плоскости, так что  $\omega_2^L$  убывает в точности как  $(180^\circ - \Omega)$ . При изменении знака  $i_2$  функция  $\omega_2^L(\Omega)|_{i_2=\text{const}}$  тоже меняет знак. При

изменении  $i_0$  в диапазоне  $(i_L, 90^\circ)$  кривая непрерывно изменяется между граничными кривыми. Согласно (П2.2) величина  $\omega_0^L$  не меняется при замене  $i_0$  на  $\pi - i_0$ , так что кривая  $\omega_0^L(\Omega)|_{i_0=i_0=\text{const}}$  совпадает с кривой  $\omega_0^L(\Omega)|_{i_0=\pi-i_0}$ .

Чтобы построить семейство кривых  $\Omega_0^L(\Omega)|_{i_0=\text{const}}$ , рассмотрим сначала семейство кривых  $\Delta\lambda_{\Omega}(\Omega)|_{i_0=\text{const}}$  — искаженных согласно (П.3.4) синусоид — при изменении  $i_0$  в диапазоне  $(i_L, 90^\circ)$

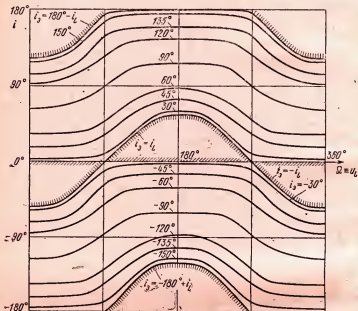


Рис. П5. Зависимость наклонения  $i$  плоскости траектории к плоскости лунной орбиты от долготы  $\Omega$  ее узла при фиксированных наклонениях  $i_0$  плоскости траектории к плоскости экватора.

(рис. П.2, б). При  $|i_0| = 90^\circ$ , естественно,  $\Delta\lambda_{\Omega} = 0$  (для всех  $\Omega$ ). При равных отклонениях  $i_0$  от  $90^\circ$  в разные стороны знаки  $\Delta\lambda_{\Omega}$  будут различны, а модули равны. При изменении знака  $i_0$  меняется знак  $\Delta\lambda_{\Omega}$ . Колеблющиеся (в пределах от  $-90^\circ$  до  $90^\circ$ ) функции  $\Delta\lambda_{\Omega}$  вычитаются, согласно (3.5), из одной монотонно возрастающей от 0 до  $360^\circ$  функции  $\lambda_{\Omega}^L(\Omega)$ . Эта функция играет роль осе-

вой и представлена слабо извилистой кривой (кривая  $i_s = \pm 90^\circ$  на рис. П.4).

При  $i_s = i_L$ ,  $i_s = -\pi + i_L$  с изменением  $-90^\circ \leq \Omega \leq 90^\circ$  узел  $\Omega_s$ , как видно из рис. 22.4, совпадает с  $\Omega_L$ , т. е.  $\Omega_s^L = 0$ . На участке  $90^\circ < \Omega < 270^\circ$  функция  $\Omega_s^L(\Omega)$  монотонно растет от 0 до  $360^\circ$ . При  $i_s = -i_L$ ,  $i_s = \pi - i_L$  узел  $\Omega_s$  траектории совпадает с нисходящим узлом лунной орбиты для  $90^\circ < \Omega < 270^\circ$  (а вне этого интервала — монотонно растет от 0 до  $360^\circ$ ).

Эти «стояния» узла связаны с постоянством значений  $i(\Omega)|_{i_s=i_L} = 0$  при  $|\Omega| < 90^\circ$ ,  $i(\Omega)|_{i_s=\pi-i_L} = 180^\circ$  при  $|\Omega - 180^\circ| < 90^\circ$ ,  $i(\Omega)|_{i_s=-i_L} = 0$  при  $|\Omega - 180^\circ| < 90^\circ$ ,  $i(\Omega)|_{i_s=-\pi+i_L} = -180^\circ$  при  $|\Omega| < 90^\circ$ , (см. формулы (3.6) и рис. П.2 и П.5\*). При  $i_s = i_L$  функция  $i(\Omega)$  с ростом  $\Omega$  от  $90^\circ$  сначала монотонно растет до  $2i_L$  (в точке  $\Omega = 180^\circ$ ), а затем симметрично убывает до нуля. Аналогичны рост и убывание при  $i_s = -\pi + i_L$ . При  $i_s = -i_L$  убывание от 0 до  $-2i_L$  происходит с отклонением  $\Omega$  наружу от краев диапазона ( $90^\circ, 270^\circ$ ) симметрично относительно абсциссы  $\Omega = 180^\circ$ . Так же убывает от  $180^\circ$  функция  $i(\Omega)|_{i_s=180^\circ-i_L}$ .

В результате получаем две непересекающиеся области изменения функций  $i(\Omega)$ : одну с  $180^\circ > i > 0^\circ$  для  $180^\circ - i_L > i_s > i_L$ , другую с  $i < 0$  для  $-180^\circ + i_L > i_s > i_L$  (рис. П.5). Заметим, что полученные результаты не зависят от того, к Луне или от Луны происходит движение, если  $\Omega$  есть узел траектории, ближайший к перигею. При этом в предположении, что  $|i_s| > i_L$  или  $|i_s| < \pi - i_L$ , над северным полушарием будут проходить траектории с  $i > 0$  ( $i_s > 0$ ) при перелете Земля — Луна и  $i < 0$  ( $i_s < 0$ ) — при перелете Луна — Земля, а над южным — траектории с обратными знаками наклонов  $i, i_s$ .

## Приложение 4

### Пересчет географических параметров движения КА в параметры, отнесенные к плоскости лунной орбиты

1. Движение КА по траектории между Землей и Луной, движение Луны  $m_L$  по ее орбите вокруг Земли  $m_E$  и вращение земной поверхности вокруг полярной оси  $m_E N$  происходят независимо. Параметры последних двух движений будем считать известными (например, из Астрономического ежегодника) для заданного момента  $t$  времени. В частности, пусть известны в любой момент  $t$  в геоцентрической невращающейся системе  $m_E x_0 y_0 z_0$  наклонение  $i_L$  лунной орбиты, аргумент  $u_L$  широты Луны, долгота  $\Omega_L$  ее восходящего узла.

Пусть КА имеет в заданный момент  $t$  заданную географическую долготу  $\lambda_g$ , широту  $\varphi_g$  относительно плоскости  $P_g$  экватора, а его геоцентрическая орбита имеет заданное наклонение  $i_g$  к эк-

\*) Кривые на рис. П.3—П.5 вычислены Б. Л. Ворониным в 1975 г.

ватору, причем  $|i_0| > i_L$ , и известен знак  $C_u$  косинуса аргумента  $u_0$  широты КА.

Найти в невращающейся системе координат  $m_0xyz$  долготу  $\lambda$ , широту  $\varphi$  и углы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u$  (где  $u$  — аргумент широты КА).

2. Заметим, что эта задача содержит как часть вычисление углов  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $u_0$  и их пересчет в углы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u$ , причем  $u_0(u)$  играет ту же роль, что и угол  $\omega$  ( $\omega$ ) в Приложении 2. Находим по порядку следующие величины:

1) отсчитываемое в плоскости  $\Pi_0$  экватора от точки  $\Upsilon$  весеннего равноденствия прямое восхождение КА

$$\alpha_0 = \lambda_T + S(t), \quad S(t) = S_0 + \omega_G(t - t^0), \quad (4.1)$$

где  $S$ ,  $S_0$  — выраженное в угловой мере звездное время (прямое восхождение гринвичского меридиана) на моменты  $t$  и начало  $t^0$  даты, которой принадлежит момент  $t$  ( $S_0$  берется из Астрономического ежегодника);  $\omega_G$  — угловая скорость вращения Земли;

2) отсчитываемую в плоскости  $\Pi_0$  от узла  $\Omega_L$  долготу КА

$$\lambda_0 = \alpha_0 - \Omega_L; \quad (4.2)$$

3) аргумент  $u_0$  широты КА относительно экватора по знаку  $C_u$  и по

$$\sin u_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\sin i_0} \quad (4.3)$$

— теорема синусов для прямоугольного треугольника  $m_0\Omega_0M_0$  (рис. 22.4);

4) угол  $\Delta\Omega_0$  в плоскости экватора под дугой  $u_0$  (рис. 22.4) по:

$$\sin \Delta\Omega_0 = \frac{\sin u_0 \cos i_0}{\cos \varphi_0}, \quad \cos \Delta\Omega_0 = \frac{\cos u_0}{\cos \varphi_0} \quad (4.4)$$

(теоремы: синусов — для прямоугольного треугольника  $m_0\Omega_0N$  и косинусов — для прямоугольного треугольника  $m_0\Omega_0M_0$ );

5) отсчитываемую в плоскости  $\Pi_0$  от направления  $\Omega_L$  долготу узла траектории КА

$$\Omega_0^L = \lambda_0 - \Delta\Omega_0; \quad (4.5)$$

6) углы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u$  — по углам  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $u_0$  — с помощью формул (2.1) — (2.6) п. 3 Приложения 2 (при этом  $u_0$  используется вместо  $\omega$ , и получается  $\omega$  вместо  $\omega$ );

7) широту  $\varphi$  относительно  $\Pi_L$  и долготу  $\lambda$  в плоскости  $\Pi_L$ , отсчитываемую от узла  $\Omega_L$ , — по теореме синусов для прямоугольного треугольника  $\Omega_L m_0 M_L$  и прямоугольного треугольника  $\Omega_L m_0 M_L$  и теореме косинусов для треугольника  $\Omega_L m_0 M_L$  (рис. 22.4):

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad \varphi \text{ — в } \pm I \text{ четверти}$$

$$\sin \Delta\lambda = \frac{\sin u \cos i}{\cos \varphi},$$

$$\cos \Delta\lambda = \frac{\cos u}{\cos \varphi}, \quad \lambda = \Omega + \Delta\lambda.$$

## Приложение 5

## Теорема

В предположениях метода ТСД при фиксированных геоцентрических начальных энергии, радиусе перигея и наклонении (к плоскости лунной орбиты) облетные траектории, выходящие из СД трансверсально по отношению к Земле, имеют больший радиус перигея, чем другие облетные траектории того же выходного наклонения.

Доказательство. Фиксируем выходное наклонение и выразим из критерия 1, гл. 5 выходную энергию

$$h = 2C \cos i + T_1, \quad T_1 = h_1 - 2C_1 \cos i_1, \\ C_1 = r_{\pi}^{(1)} \sqrt{2\mu_G / r_{\pi}^{(1)} + h_1} \quad (5.1)$$

через начальные энергию  $h_1$ , радиус  $r_{\pi}^{(1)}$  перигея, наклонение  $i_1$ . Выходной кинетический момент  $C = \sqrt{\mu_G p}$ , где  $p$  — параметр выходного конического сечения. Используем вместе с (5.1) известные соотношения теории конических сечений

$$r_{\pi} = p/(1 + e), \quad e^2 = 1 + hC^2/\mu_G^2,$$

и, обозначая

$$T_1/\mu_G \equiv t, \quad 2 \cos i / \sqrt{\mu_G} = S,$$

получим

$$e = \sqrt{1 + p(t + S\sqrt{p})}, \quad pt + Sp\sqrt{p} > -1, \quad (5.2)$$

$$\frac{dr_{\pi}}{dp} = \left[ (1 + e) - p \frac{(t + S\sqrt{p}) + S\sqrt{p}/2}{2e} \right] / (1 + e)^2.$$

Очевидно,  $\text{sign } dr_{\pi}/dp = \text{sign } D$ , где  $D = 4e + 4e^2 - 2tp - 3Sp\sqrt{p} = 4e + d$ ,  $d = 4 + (2tp + Sp\sqrt{p}) > 2 - Sp\sqrt{p} \geq 0$  при  $S < 0$  с учетом (5.2).

А при  $S > 0$  выражение  $d$  больше, чем при  $S < 0$  (благодаря члену  $Sp\sqrt{p}$ ), так что  $d > 0$  и  $D > 0$  при всех  $S$ , поэтому  $r_{\pi}$  растет с  $p$ , т. е. с  $C$ . Поскольку значения  $C$  в предположениях метода ТСД пропорциональны трансверсальной компоненте  $V_{3\pi}$  выходной геоцентрической скорости, а эта компонента при фиксированном выходном наклонении  $i$ , т. е. в любом сечении  $V_3$ -сферы полуплоскостью  $i = \text{const}$ , максимальна у векторов  $V_3$  чисто трансверсального направления, то теорема доказана.

### Приложение 6

#### Точный расчет пассивных траекторий перелета между Землей и Луной (задача Коши)

Для решения задачи Коши исходной информацией являются начальные данные  $t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  и параметры  $\mu_G, \mu_L$ . Выходная информация — кинематические параметры в счетный момент времени  $t_k, x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ . Обозначим компоненты скорости КА и их производные по времени через  $V_x, V_y, V_z, \dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$  соответственно. Тогда согласно (1.4.1), (1.4.2) имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_x = -\frac{\mu_G}{r^3} \left[ 1 + \frac{A}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right] x + \mu_L \left( \frac{x_L - x}{\rho^3} - \frac{x}{r_L^3} \right) + \mu_S \left( \frac{x_S - x}{|r_S - r|^3} - \frac{x_S}{r_S^3} \right),$$

$$\dot{V}_y = -\frac{\mu_G}{r^3} \left[ 1 + \frac{A}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right] y + \mu_L \left( \frac{y_L - y}{\rho^3} - \frac{y}{r_L^3} \right) + \mu_S \left( \frac{y_S - y}{|r_S - r|^3} - \frac{y_S}{r_S^3} \right),$$

$$\dot{V}_z = -\frac{\mu_G}{r^3} \left[ 1 + \frac{A}{r^2} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right] z + \mu_L \left( \frac{z_L - z}{\rho^3} - \frac{z}{r_L^3} \right) + \mu_S \left( \frac{z_S - z}{|r_S - r|^3} - \frac{z_S}{r_S^3} \right),$$

$$\dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_L = \sqrt{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2}, \quad r_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2},$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2}.$$

Векторы  $r_L = (x_L, y_L, z_L)$  и  $r_S = (x_S, y_S, z_S)$  определяются согласно Астрономическому ежегоднику на каждый момент времени  $t$ , начиная с  $t_0$ .

Система дифференциальных уравнений движения КА решается одним из методов ЧИ. Дадим для примера ее решение методом Рунге — Кутты. Для применения этого метода необходимо исходную систему дифференциальных уравнений привести к системе первого порядка

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_i), \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Согласно методу Рунге — Кутта функция  $y_{i, k+1}$  на  $(k+1)$ -м шаге интегрирования определится по формуле

$$y_{i, k+1} = y_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

где

$$K_1 = f_i(t_k, y_i, k), \quad K_2 = f_i\left(t_k + \frac{h}{2}, y_i, k + \frac{hK_1}{2}\right),$$

$$K_3 = f_i\left(t_k + \frac{h}{2}, y_i, k + \frac{hK_2}{2}\right), \quad K_4 = f_i(t_k + h, y_i, k + hK_3),$$

$h$  — шаг интегрирования. Следовательно, при использовании метода Рунге — Кутта каждая функция на каждом шаге вычисляется четыре раза (для метода Рунге — Кутта четвертого порядка).

Для убыстрения интегрирования (при сохранении точности вычисления) часто в методе Рунге — Кутта вводят алгоритм изменения первоначального шага  $h$  интегрирования.

Для этого схема Рунге — Кутта дополняется вычислением члена  $K$ , указанного в работе [5—1965]:

$$K = \frac{2}{3} K_1 - \frac{2}{3} K_2 - \frac{2}{3} K_3 + \frac{2}{3} K_4.$$

Величина  $K$  с точностью до малых высших порядков равна третьему члену разложения  $\Delta y$  по степеням  $h$  и используется для контроля точности интегрирования на каждом шаге с целью получения заданной точности результата.

Контроль точности интегрирования на каждом шаге и изменение величины шага  $h$  интегрирования можно производить, например, как в п. 8 работы [4—1972].

## Приложение 7

### Переход от кеплеровых элементов орбиты к декартовым координатам (ЭДК)

Исходная информация — элементы  $\Omega_0, i, p, e, \omega, u$  в заданный момент  $t$ , параметр  $\mu$ .

Выходная информация — декартовы компоненты  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  векторов  $\mathbf{r}, \mathbf{V}$  в тот же момент  $t$ .

Находим направляющие косинусы  $\alpha, \beta, \gamma$  вектора  $\mathbf{r}$  и направляющие косинусы  $\alpha', \beta', \gamma'$  нормами к вектору  $\mathbf{r}$ , направленной в полуплоскость, содержащую вектор  $\mathbf{V}$ :

$$\alpha = \cos u \cos \Omega_0 - \sin u \sin \Omega_0 \cos i,$$

$$\beta = \cos u \sin \Omega_0 + \sin u \cos \Omega_0 \cos i,$$

$$\gamma = \sin u \sin i,$$

$$\alpha' = -(\sin u \cos \Omega_0 + \cos u \sin \Omega_0 \cos i),$$

$$\begin{aligned}\beta' &= \cos u \cos \Omega \cos i - \sin u \sin \Omega, \\ \gamma' &= \cos u \sin i.\end{aligned}$$

Находим модули радиуса-вектора  $r$  и вектора  $C$  кинетического момента:

$$r = p/(1 + e \cos \vartheta), \quad \vartheta = u - \omega, \quad C = \sqrt{p\mu}$$

и декартовы компоненты векторов  $r, V$ :

$$\begin{aligned}x &= r\alpha, & \dot{x} &= \frac{C}{p} [\alpha e \sin \vartheta + \alpha' (1 + e \cos \vartheta)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \frac{C}{p} [\beta e \sin \vartheta + \beta' (1 + e \cos \vartheta)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \frac{C}{p} [\gamma e \sin \vartheta + \gamma' (1 + e \cos \vartheta)].\end{aligned}$$

### Приложение 8

#### Переход от декартовых координат к кеплеровым элементам орбиты (ДКЭ)

Входная информация — компоненты  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  векторов  $r, V$  в заданный момент  $t$ , параметр  $\mu$ .

Выходная информация — элементы  $\Omega, i, p, e, \omega, u$  в тот же момент  $t$ .

Находим модули радиуса-вектора  $r$ , вектора скорости  $V$  и угол  $\alpha$  между  $r$  и  $V$ :

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rV},\end{aligned}$$

$\alpha$  в I, II четвертях. Находим компоненты и модули вектора  $C$  кинетического момента и вектора  $f$  Лапласа

$$\begin{aligned}C_1 &= y\dot{z} - z\dot{y}, & f_1 &= -\frac{\mu x}{r} + C_3\dot{y} - C_2\dot{z}, \\ C_2 &= z\dot{x} - x\dot{z}, & f_2 &= -\frac{\mu y}{r} + C_1\dot{z} - C_3\dot{x}, \\ C_3 &= x\dot{y} - y\dot{x}, & f_3 &= -\frac{\mu z}{r} + C_2\dot{x} - C_1\dot{y}, \\ C &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}, & f &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.\end{aligned}$$

Находим параметр, эксцентриситет орбиты  $p = C^2/\mu$ ,  $e = f/\mu$  и наклонение  $i$  плоскости орбиты в I, II четв. по  $\cos i = C_3/C$ .



Находим в диапазоне  $(0, 2\pi)$  углы  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $u$  по

$$\sin \Omega = C_1/C \sin i, \quad \cos \Omega = -C_2/C \sin i,$$

$$\sin \omega = (-f_1 \sin \Omega + f_2 \cos \Omega)/f \cos i,$$

$$\cos \omega = (f_1 \cos \Omega + f_2 \sin \Omega)/f,$$

$$\sin u = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega)/r \cos i,$$

$$\cos u = (x \cos \Omega + y \sin \Omega)/r.$$

Пересчитываем в соответствии с Приложением 1 наклонение  $i$  и долготу  $\Omega$  узла к диапазонам  $|i| < \pi$ ,  $|\Omega| < 90^\circ$ .

По истинной аномалии  $\theta = u - \omega$  в случае необходимости можно найти момент  $\tau$  прохождения перигелического расстояния.

## Приложение 9

### Расчет параметров движения относительно поверхности Земли (Луны)

Входная информация — компоненты  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  векторов  $\mathbf{r}, \mathbf{V}, (\mathbf{p}, \mathbf{U})$  (или элементы  $\Omega, i, p, e, \omega, u$ ) в заданный момент времени  $t$  в геоцентрической (селеноцентрической) геоэквиаториальной системе координат.

Выходная информация — высота  $H$  над поверхностью Земли (Луны), сферические широта и долгота  $\varphi$  и  $\lambda$ ; склонение  $\delta$  КА над горизонтом заданной на поверхности Земли (Луны) точки  $m$ ; азимут  $\psi$  направления на КА из точки  $m$ ; расстояние  $\Delta$  от точки  $m$  до КА; угловая скорость  $\dot{\omega}$  КА относительно системы координат, связанной с Землей (Луной) с началом в точке  $m$ .

Высота над поверхностью Земли (Луны)  $H = r - R$ , где  $r$  — расстояние от центра Земли (Луны) до КА,  $R$  — радиус  $r_G(\rho_L)$  Земли (Луны).

Сферические координаты КА находятся по формулам

$$\sin \varphi = z/r, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

$$\sin \lambda = y/r \cos \varphi, \quad \cos \lambda = x/r \cos \varphi, \quad 0 < \lambda < 2\pi.$$

Для вычисления углов  $\delta$  и  $\psi$  находим единичные векторы вертикали  $\mathbf{b}^0$ , параллели  $\mathbf{p}^0$  и направления  $\mathbf{n}^0$  (на север) меридиана в точке  $m$

$$b_x^0 = \cos \varphi \cos \lambda, \quad p_x^0 = -\sin \lambda, \quad n_x^0 = -\sin \varphi \cos \lambda,$$

$$b_y^0 = \cos \varphi \sin \lambda, \quad p_y^0 = \cos \lambda, \quad n_y^0 = -\sin \varphi \sin \lambda,$$

$$b_z^0 = \sin \varphi, \quad p_z^0 = 0, \quad n_z^0 = \cos \varphi.$$

Находим координаты точки  $m$ :

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \lambda, & Y &= R \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Находим вектор  $\Delta = r - R$ , идущий от точки  $m$  до КА, и имеющие компоненты

$$\Delta_x = x - X, \quad \Delta_y = y - Y, \quad \Delta_z = z - Z.$$

Углы  $\delta, \psi$  получаем по

$$\begin{aligned} \sin \delta &= (\Delta_x b_x^0 + \Delta_y b_y^0 + \Delta_z b_z^0) / |\Delta|, \\ -\pi/2 &< \delta < \pi/2, \end{aligned}$$

$$\cos \psi = (\Delta_x n_x^0 + \Delta_y n_y^0 + \Delta_z n_z^0) / (|\Delta| \cos \delta),$$

$$\begin{aligned} \sin \psi &= (\Delta_x p_x^0 + \Delta_y p_y^0 + \Delta_z p_z^0) / (|\Delta| \cos \delta), \\ 0 &< \psi < 2\pi, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}.$$

Для вычисления угловой скорости  $\omega$  вычислим вначале компоненты скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  точки  $m$  по формулам

$$\dot{X} = -\Omega R \cos \varphi \sin \lambda, \quad \dot{Y} = \Omega R \cos \varphi \cos \lambda, \quad \dot{Z} = 0,$$

где  $\Omega$  — угловая скорость притягивающего тела. Тогда скорость  $\dot{\Delta}$  КА относительно точки  $m$

$$|\dot{\Delta}| = \sqrt{(\dot{x} - \dot{X})^2 + (\dot{y} - \dot{Y})^2 + (\dot{z} - \dot{Z})^2}.$$

Радиальная скорость

$$\dot{\Delta} = [(\dot{x} - \dot{X})(x - X) + (\dot{y} - \dot{Y})(y - Y) + (\dot{z} - \dot{Z})(z - Z)] / \Delta,$$

а угловая скорость

$$\omega = \sqrt{|\dot{\Delta}|^2 - \dot{\Delta}^2} / \Delta.$$

## Приложение 10

### Погрешность расчета скорости методом игнорирования возмущений

Оценить погрешность рассмотрения движения по ТС методом ИВ можно с помощью модели ограниченной круговой задачи трех точек  $m_0, m_L, m_G$ . Векторное уравнение этой задачи имеет вид (1.4.8). Приняв за единицу длины расстояние  $r_L = a_L$ , за единицу массы — сумму масс  $m_L + m_G$ , за единицу времени — величину

$\omega_L^{-1}$ , обратную угловой скорости обращения масс  $m_L$ ,  $m_G$ , и считая отношение  $\rho/r_L$  малым, можем уравнение (1.4.8) частично линеаризовать:

$$\ddot{\rho} = -\frac{\mu\rho}{r^3} - (1-\mu) [(3\rho \cos \theta_\rho) r_L + \rho]. \quad (10.1)$$

Здесь  $\mu = m_L/m_G$ ,  $\theta_\rho$  — угол радиуса  $\rho$  с  $(-r_L)$  (рис. 1.1).

Для оценки точности расчета движения методом ИВ оценим влияние массы  $m_G$  внутри малой сферы  $\rho = \rho_K \ll r_L$  и влияние массы  $m_L$  вне этой сферы на скорость движения, принимая, что изменение характера движения в результате прохождения точки  $m_G$  через сферу  $\rho = \rho_K$  в основном определяется изменением скорости (в силу того, что  $\rho_K \ll r_L$ ). Влияние  $m_L$  сказывается до тех пор, пока расстояние  $\rho$  не превзойдет несколько радиусов  $\rho_K$ . На таких расстояниях  $m_L$ -центрическое движение по ТС гиперболично (§ 3.4) и близко к радиальному. Поэтому достаточно оценить ошибки в радиальной  $m_L$ -центрической скорости.

Оценим сначала влияние массы  $m_G$  внутри сферы  $\rho = \rho_K$  при прохождении точки  $m_G$  на расстоянии  $\rho_0 \ll \rho_K$  от  $m_L$ . После скалярного умножения (10.1) на  $\rho$ , применения тождества  $\dot{\rho}\ddot{\rho} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\rho}^2) + U^2 - \rho^2$  (где  $U = |\dot{\rho}|$ ), умножения результата на  $2\rho\dot{\rho}$  и интегрирования вдоль невозмущенной гиперболы с полуосью  $a'$  (в интеграле энергии) найдем при помощи теоремы о среднем

$$\dot{\rho}^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[ (\rho_0 \dot{\rho}_0)^2 + 2\mu (\rho - \rho_0) - \frac{\mu}{a'} (\rho^2 - \rho_0^2) \right] - \\ - \frac{1-\mu}{2} [1 - 3(\cos^2 \theta_\rho)'] \left( 1 - \frac{\rho_0^4}{\rho^4} \right) \rho^2,$$

где  $(\cos^2 \theta_\rho)'$  — некоторое среднее значение  $\cos^2 \theta_\rho$  на рассматриваемой части траектории, а  $\rho_0$ ,  $\dot{\rho}_0 \ll \rho_K$  — начальные данные. Первый член в правой части отвечает невозмущенному движению, а второй — возмущению движения внутри сферы  $\rho = \rho_K$  массой  $m_G$ .

Подставляя  $\rho = \rho_K$ , пренебрегая во втором члене величиной  $\mu$  и отношением  $(\rho_0/\rho_K)^4 \ll 1$ , обозначая первый член через  $(\dot{\rho}_K^0)^2$  и извлекая приближенно квадратный корень, получим

$$\dot{\rho}_K = \dot{\rho}_K^0 \left[ 1 - \frac{1 - 3(\cos^2 \theta_\rho)'}{4(\dot{\rho}_K^0)^2} \rho_K^2 \right].$$

Поскольку  $|1 - 3(\cos^2 \theta_\rho)'| \leq 2$ , то модуль относительной ошибки в  $m_L$ -центрической скорости от неучета действия массы  $m_G$  при  $\rho < \rho_K$

$$\left| \frac{\delta_G \dot{\rho}}{\dot{\rho}_K^0} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_K}{\dot{\rho}_K^0} \right)^2. \quad (10.2)$$

Оценим теперь возмущение  $\delta_L \dot{\rho}$  массой  $m_L$  радиальной  $m_L$ -центрической скорости движения вне сферы  $\rho = \rho_K$ , считая приближенно, что невозмущенное движение радиально и происходит с постоянной скоростью  $d\rho/dt = \dot{\rho}_K^0$ . Для возмущенного движения имеем уравнение  $d(\delta_L \dot{\rho}) = -(\mu/\rho^2) dt$  (где  $dt = d\rho/\dot{\rho}_K^0$ ). Интегрируя его от  $\rho = \rho_K$ , получим

$$\delta_L \dot{\rho} = \frac{\mu}{\rho_K} \left( \frac{\rho_K}{\rho} - 1 \right) \frac{1}{\dot{\rho}_K^0}.$$

Пренебрегая при удалениях  $\rho \gg \rho_K$  отношением  $\rho_K/\rho \ll 1$ , получим оценку относительной ошибки в  $m_L$ -центрической скорости от неучета влияния массы  $m_L$  при  $\rho > \rho_K$ :

$$\left| \frac{\delta_L \dot{\rho}}{\dot{\rho}_K^0} \right| \leq \frac{\mu}{\rho_K (\dot{\rho}_K^0)^2}. \quad (10.3)$$

Радиус  $\rho_K = \rho_*$ , для которого минимальна сумма оценок модулей относительных ошибок (10.2) и (10.3)

$$\frac{\delta \dot{\rho}}{\dot{\rho}_K^0} = \frac{1}{(\dot{\rho}_K^0)^2} \left( \frac{\rho_K^2}{2} + \frac{\mu}{\rho_K} \right),$$

выражается следующей из условия

$$\frac{d}{d\rho_K} \left( \frac{\delta \dot{\rho}}{\dot{\rho}_K^0} \right) = 0$$

формулой

$$\rho_* = \mu^{1/3} r_L. \quad (10.4)$$

Соответствующий минимум оценки

$$\left( \frac{\delta \dot{\rho}}{\dot{\rho}_K^0} \right)_{\rho_*} = \frac{3\mu^{2/3}}{2(\dot{\rho}_K^0)^2} \omega_L r_L \quad (10.5)$$

убывает обратно пропорционально  $(\dot{\rho}_K^0)^2$  в то время как значение  $\rho_*$  (10.4) не зависит от  $\dot{\rho}_K^0$ . Оно на 15% меньше радиуса сферы влияния [7—1964]. Если пренебречь таким отличием (как при определении СД [2—1937]), то сферу  $\rho = \rho_*$  тоже можно считать сферой влияния.

Для системы Земля — Луна  $\mu^{-1} \approx 81$ ,  $\mu^{-1/3} \approx 4,3$ , так что  $\rho_* \approx 89\,000$  км;  $\mu^{-2/3} \approx 18,7$ , и при  $\dot{\rho}_K^0 = 1$  км/с имеем  $\delta \dot{\rho}/\dot{\rho}_K^0 < 0,08$ , т. е. ошибка метода ИВ в худшем случае составляет менее 8%.

Обычно же ошибки будут меньше, и возможна даже компенсация ошибок (особенно при подборе  $\rho_K$ ). Например, когда  $m_L$ -центрическая траектория близка к прямой  $m_L m_G$ , то торможение движения массой  $m_L$  при  $\rho > \rho_K$  компенсируется ускоряющим влиянием массы  $m_G$  при  $\rho < \rho_K$ . Соответствующие относительные ошибки выбором  $\rho_K$  могут быть уменьшены на порядок.

З а м е ч а н и я.

1. Формула (10.3) дает величину торможения  $m_L$ -центрического движения массой  $m_L$  при  $\rho > \rho_K$ . Соответствующее компенсирующее увеличение  $\delta U_1$  скорости  $U_1$  в начале пассивного полета с поверхности Луны или с низкой орбиты ИСЛ слабо (только через  $U_1$ ) зависит от скорости  $\dot{\rho}_K^0$  на сфере  $\rho = \rho_K$ . Действительно, из следствия  $U_1 \delta U_1 = \dot{\rho}_K^0 \dot{\rho}_K^0 m_L$ -центрического интеграла энергии и (10.3) при заданных величинах  $\rho_1, \rho_K$  получим

$$\delta U_1 = \frac{\mu_L}{\rho_K U_1}. \quad (10.6)$$

При  $U_1 = 2,5$  км/с ( $\rho_K^0 = 1$  км/с) получим  $\delta U_1 = 22$  м/с для  $\rho_K = \rho_K$ . Такой дополнительный разгон может потребоваться (при неблагоприятных направлениях полета) сверх того, который получается методом ИВ при пересчете параметров движения на границе сферы влияния. Аналогичные оценки для системы Солнце — Земля даны в [4—1970].

2. Если ось  $\xi$  декартовой  $m_L$ -центрической системы координат  $m_L \xi \eta \zeta$  направить от  $m_L$  и  $m_G$ , то в (10.1) будет  $\rho \cos \theta_p = \xi$ , и компоненты возмущающего ускорения (второго члена в правой части (10.1)) будут иметь вид (10.4.1).

## ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ИВ — игнорирование возмущений.
- ИСЗ — искусственный спутник Земли.
- ИСЛ — искусственный спутник Луны.
- КА — космический аппарат.
- СД — сфера действия.
- ТВ — траектория возвращения.
- ТС — траектория сближения.
- ТСД — точечная сфера действия.
- ЧИ — численное интегрирование.
- $\alpha$  — заданное значение переменной  $\alpha$ .
- $C(C_1, C_2, C_3)$  — вектор геоцентрического кинетического момента (секториальная скорость).
- $e$  — эксцентриситет.
- $h$  — геоцентрическая энергия.
- $i$  — наклонение.
- $m_G$  — масса Земли или материальная точка, совпадающая с центром Земли.
- $m_L$  — масса Луны или материальная точка, совпадающая с центром Луны.
- $m_0$  — масса КА; центр тяжести КА.
- $O_n$  — ось пучка гиперболических траекторий в СД Луны.
- $p$  — параметр орбиты.
- $r, v$  — геоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА.
- $r_1, v_1$  — геоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА в точке 1 начала космического полета.
- $r_2, v_2$  — геоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА в точке 2 входа в СД (встречи с Луной).
- $r_3, v_3$  — геоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА в точке 3 выхода из СД.
- $r_G, \rho_L$  — радиусы Земли и Луны.
- $S_0$  — звездное время в  $O^A$  всемирного времени.
- $T$  — время полета.
- $T_{1,2}$  — время полета КА от СД до первого перигея.
- $T_{2,3}, T_c$  — время полета КА в СД.
- $T_{3,K}$  — время полета КА до СД до первого перигея.
- $U_0, U_n$  — модуль вектора скорости КА на поверхности Луны.
- $U_2, U_3$  — входная и выходная селеноцентрические скорости КА на СД Луны.
- $U_n(\rho)$  — селеноцентрическая параболическая скорость на расстоянии  $\rho$  от Луны.

$u$  — аргумент широты.

$V_{\text{г}}(r)$  — геоцентрическая параболическая скорость на расстоянии  $r$  от Земли.

$V_r, V_{\tau}$  — радиальная и трансверсальная компоненты геоцентрической скорости.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — углы между геоцентрическими радиус-вектором и вектором скорости в точках 1, 2, 3 траектории полета.

$\alpha'_2, \alpha'_3$  — углы между селеноцентрическими радиус-вектором и вектором скорости в точках 2, 3 входа и выхода на СД.

$\Gamma_{1,2}$  — участок геоцентрической траектории полета от начальной точки 1 до точки 2 входа в сферу действия Луны.

$\Gamma_{3,K}$  — участок геоцентрической траектории полета от точки 3 выхода из СД до конечной точки К.

$\Upsilon_{2,3}$  — участок селеноцентрической траектории (гиперболы) в СД Луны между входной точкой 2 и выходной точкой 3 на СД.

$\theta$  — угол возвышения вектора скорости.

$\phi$  — истинная аномалия.

$\delta_{\text{сд}}, \alpha_{\text{сд}}$  — селеноцентрические широта и долгота.

$\mu_{\text{г}}$  — гравитационная характеристика Земли, равная произведению гравитационной постоянной на массу Земли.

$\mu_{\text{л}}$  — гравитационная характеристика Луны, равная произведению гравитационной постоянной на массу Луны.

$\Pi$  — плоскость эклиптики.

$\Pi'$  — плоскость гиперболической траектории в СД Луны.

$\Pi_0$  — плоскость экватора Земли.

$\Pi_L$  — плоскость орбиты Луны.

$\Pi_{\gamma}$  — плоскость орбиты ИСЗ.

$\Pi_{\alpha}$  — плоскость орбиты ИСЛ.

$\rho_*$  — радиус СД Луны.

$\rho, U$  — селеноцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА.

$\Phi$  — полная угловая дальность траектории, т. е. угол между геоцентрическими радиусами начальной и конечной точек траектории.

$\Phi_1$  — угловая дальность пассивного участка траектории.

$\Phi_a$  — угловая дальность активного участка траектории.

$\varphi, \lambda$  — широта и долгота КА.

$\varphi_0, \lambda_0$  — географические широта и долгота точки старта на поверхности Земли.

$\Upsilon$  — точка весеннего равноденствия.

$\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты.

$\Omega, i, \omega, u$  — элементы относительно плоскости лунной орбиты.

$\Omega_0, i_0, \omega_0, u_0$  — геоцентрические элементы в экваториальной системе координат.

$\Omega_L, i_L, \omega_L, u_L, \dot{r}_L, e_L, V_L, r_L$  — элементы орбиты Луны, ее скорость и радиус-вектор.

$\Omega_{\gamma}, i_{\gamma}, \omega_{\gamma}, u_{\gamma}, \dot{r}_{\gamma}, e_{\gamma}, V_{\gamma}, r_{\gamma}$  — элементы орбиты ИСЗ, скорость и радиус-вектор КА на этой орбите.

$\Omega_\lambda, i_\lambda, \omega_\lambda, u_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, V_\lambda, r_\lambda$  — элементы орбиты ИСЛ, скорость и радиус-вектор на этой орбите.

$\Omega', i', \omega', u', p', e', U, \rho$  — элементы гиперболы в СД, скорость и радиус-вектор КА на гиперболе.

$\omega_G$  — угловая скорость суточного вращения Земли.

$\omega_L$  — угловая скорость движения Луны по орбите.

### Системы координат

$A_2 u_2 v_2 w_2$  и  $A'_2 u_3 v_3 w_3$  — невращающиеся системы координат в пространстве скоростей; оси  $u_2 v_2 w_2, u_3 v_3 w_3$  параллельны осям  $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ , соответственно, в моменты  $t_2$  входа КА в СД и  $t_3$  выхода КА из СД.

$m_G x y z$  — невращающаяся геоцентрическая система координат с началом  $m_G$  в центре Земли; оси  $x y z$  параллельны осям  $x_\lambda y_\lambda z_\lambda$  соответственно, в фиксированный момент времени.

$m_G x_0 y_0 z_0$  — геоцентрическая невращающаяся экваториальная система координат; ось  $m_G x_0$  направлена из центра Земли в точку  $\Upsilon$  весеннего равноденствия (например, эпохи 1970.0); ось  $m_G z_0$  направлена по вектору угловой скорости вращения Земли.

$m_L \xi \eta \zeta$  — невращающаяся селеноцентрическая система координат с началом  $m_L$  в центре Луны; оси  $\xi \eta \zeta$  параллельны осям  $x y z$  соответственно в момент  $t_2$  входа КА в СД.

$m_L \xi_\lambda \eta_\lambda \zeta_\lambda$  — вращающаяся селеноцентрическая система координат; начало  $m_L$  расположено в центре Луны; ось  $m_L \xi_\lambda$  направлена по оси  $m_L m_G$ ; ось  $m_L \zeta_\lambda$  перпендикулярна плоскости орбиты Луны; ось  $m_L \eta_\lambda$  дополняет систему до правой.

$m_L \xi_0 \eta_0 \zeta_0$  — селеноцентрическая невращающаяся система координат с началом  $m_L$  в центре Луны и с осями  $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ , параллельными осям  $x_0 y_0 z_0$  соответственно.

$O x_\lambda y_\lambda z_\lambda$  — барицентрическая вращающаяся система координат с началом  $O$  в центре масс системы  $m_G, m_L$ ; ось  $O x_\lambda$  направлена по линии  $m_G m_L$ ; ось  $O y_\lambda$  направлена в плоскости  $\Pi_L$  движения масс  $m_G, m_L$  против скорости  $V_L$  точки  $m_L$ .

$O_1 x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda$  — вращающаяся система координат с началом  $O_1$  в середине отрезка  $m_G m_L$ . Оси  $x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda$  параллельны осям  $x_\lambda y_\lambda z_\lambda$  соответственно.

### Верхние индексы

в — восходящий.

к — конечный.

н — нисходящий; новый.

ср — среднее.

М — максимальное.

м — минимальное.

опт — оптимальное.

1, 2, 3 — признак элементов в точках 1, 2, 3 траектории соответственно.



*Нижние индексы*

- а — активный участок.
- ас — асимптота.
- в — вращающиеся оси координат.
- вх — вход.
- г — географические.
- дв — двигатель.
- к — конечный.
- кас — касательная.
- кр — круговая.
- л — лунная поверхность.
- М — максимальный.
- оп — ось пучка.
- п — параболическая.
- отн — относительный.
- сж — сжатие.
- ср — среднее.
- ст — старт.
- сц — селеноцентрические.
- у — упрежденная.
- уд — удельная.
- уск — ускорение.
- х — характеристическая.
- э — экватор Земли.
- эфф — эффективный.
- Зв — в точке З восходящий.
- Зн — в точке З нисходящий.
- G — Земля.
- L — Луна.
- LG — Луна — Земля.
- $\mathbf{r}^0$  — направление вектора  $\mathbf{r}$ .
- S — признак элементов орбиты Солнца.
- P — тяга двигателя.
- $\alpha$  — точка апоцентра.
- $\gamma$  — признак элементов орбиты ИСЗ.
- $\lambda$  — признак элементов орбиты ИСЛ.
- $\mu$  — признак элементов в момент наибольшего сближения с меньшим гравитирующим центром.
- $\pi$  — точка перигения.
- $\Sigma$  — принадлежит многообразию  $\Sigma$ ; суммарный.
- $\tau$  — трансверсаль.
- $\Phi$  — угловая дальность.
- $\Omega$  — узел орбиты; признак элементов, относящихся к узлу орбиты.
- 2r, 3r — радиальные компоненты в точках 2 и 3 траектории соответственно.
- 2t, 3t — трансверсальные компоненты в точках 2 и 3 траектории соответственно.
- 1, 2, 3 — признак элементов в точках 1, 2, 3 траектории соответственно.

## ЛИТЕРАТУРА

### Принятые сокращения:

ДАН	— журнал «Доклады АН СССР»;
КИ	— журнал «Космические исследования»;
ИСЗ	— сборник «Искусственные спутники Земли»;
УФН	— журнал «Успехи физических наук»;
ЖВМ и МФ	— «Журнал вычислительной математики и математической физики»;
А и Т	— журнал «Автоматика и телемеханика»;
ТК	— журнал «Известия АН СССР», серия «Техническая кибернетика»;
УЗЦ	— журнал «Ученые записки ЦАГИ»;
AIAA J.	— American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal;
AIAA Paper	— American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper;
ARS J.	— American Rocket Society Journal;
Astr. Acta	— Astronautical Acta;
IAS Paper	— Institute of Aeronautical Sciences Paper;
JAS	— Journal of the Astronautical Sciences;
JSR	— Journal of Spacecraft and Rockets;
JBIS	— Journal of British Interplanetary Society;
AAS	— Advances of Astronautical Sciences;
A & A	— Astronautics and Aeronautics.

В библиографических ссылках второе число указывает год издания, а первое — порядковый номер в списке цитируемых работ указанного года.

1805 г.

1. Laplace P. S. *Mecanique Celeste*, t. 4, livre IX, Chap. II.— Paris, 1805.

1877 г.

1. Hill G. W.—*The Amer. Journal of Math.*, 1877, v. 1, № 23.

1896 г.

1. Tisserand F. *Traite de Mecanique Celeste*, t. 4 (Theories les Satellites des Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planetes), chap XII.— Paris, 1896.

1913 г.

1. Циолковский К. Э. *Исследование мировых пространств реактивными приборами*.— Калуга, 1913.

1925 г.

1. Hohmann W. Die Erreichbarkeit des Himmelskörper.— München; Berlin, 1925.

1930 г.

1. Hopf E.— Mathematische Annalen, 1930, 103.

1933 г.

1. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли.— М.: Гостехиздат, 1933.
2. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Т. 1.— М.: Гостехиздат, 1933.

1936 г.

1. Strömberg E. Publikationern fra Kobenhavns obs., 1936, № 100.

1937 г.

1. Мультион Ф. Р. Введение в небесную механику.— ОНТИ, 1937.
2. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Т. 2.— ОНТИ, 1937.

1946 г.

1. Фесенков В. Г.— Астрономический журнал, 1946, т. 23, в. 1.

1954 г.

1. Lawden D. F. Perturbation Maneuvres.— JBIS, 1954, v. 13, № 6.
2. Lawden D. F. Entry into circular orbits.— JBIS, 1954, v. 13, № 7.

1955 г.

1. Lawden D. F.— JBIS, 1955, v. 14, № 4.

1956 г.

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
2. Buchheim R. W.— Proc. VII JAF Congress, Rome, 1956.

1957 г.

1. Егоров В. А. Некоторые вопросы динамики полета к Луне.— ДАН, 1957, т. 113, № 1.
2. Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне.— УФН, 1957, т. 63, в. 1а.
3. Охотимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П.— УФН, 1957, т. 63, в. 1а.
4. Охотимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли.— УФН, 1957, т. 63, в. 1а.
5. Чеботарев Г. А. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны.— Бюллетень ИТА АН СССР, 1957, № 7 (80).
6. Лисовская М. С. О траекториях полета ракеты вокруг Луны.— Бюллетень ИТА АН СССР, 1957, № 8 (81).
7. Таратынова Г. П.— УФН, 1957, т. 63, в. 1а.
8. Ehrlicke K. A. Cislunar operations.— ARS Preprint, 1957, June.

9. Gröbner W., Cap F. The three-body problem Earth — Moon Spaceship.— *Astr. Acta*, 1957, v. 5, № 5.

1958 г.

1. Gold L.— *ARS Preprint*, 1958, June.
2. Goldbaum G. C., Gunkel R. J.— *Proc. Amer. Astronaut. Soc. Western Regional Meeting*, Palo Alto, 1958, August.
3. Lieske H. A.— *RAND Paper*, 1958, June.
4. Walters L. G. Lunar trajectory mechanics.— *Navigation*, 1958, v. 6, p. 51.
5. Cola D. U., Muir D. E. Around the Moon in 80 Hours.— *AAS*, 1958, v. 3.

1959 г.

1. Егоров В. А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек.— *ИСЗ*, 1959, в. 3.
2. Mickelwait A. B. Lunar trajectories.— *ARS J.*, 1959, v. 29, № 12.
3. Battin R. H. The determination of round-trip planetary reconnaissance trajectories.— *JAS*, 1959, v. 26, № 9.
4. Chapman D. R. An analysis of the corridor and guidance requirements for supercircular entry into planetary atmospheres.— *NASA TR*, № R-55, 1959.
5. Mickelwait A. B., Button R. C. Analytical and numerical studies of three-dimensional trajectories to the Moon.— *IAS Paper*, № 59-90, 1959.
6. Moeckel W. F. Interplanetary trajectories with excess energy.— *Proc. of the IX-th Intern. Astronaut. Congr.*, 1958, part I, 1959.
7. Ehricke K. Orbit theory: cislunar orbits.— *Proceed. of Symposium in Appl. Math.*, 1959, v. 10.
8. Almar I., Balazs B. Approximate method of plotting the orbit of a space rocket, passing near the Moon.— *Magyar tud. acad. Mat. kutato int. közl.*, 1959, v. 4, № 2.
9. Thüning B. Zwei speciale Mond Einfang-Bahnen in der Raumfahrt um Erde und Mond.— *Astr. Acta*, 1959, v. 5, F. 3/4.

1960 г.

1. Поспергелис М. М.— *Астрономический журнал*, 1960, т. 37, в. 2.
2. Седов Л. И. Орбиты космических ракет в сторону Луны.— *ИСЗ*, 1960, в. 5.
3. Левантовский В. И. Ракетой к Луне.— *М.: Физматгиз*, 1960.
4. Koop I. M., Berghuis J. On the numerical computation of free trajectories of a lunar space vehicle.— *Astr. Acta*, 1960, v. 6, № 2—3.
5. Miele A. Theorem of image trajectories in the Earth — Moon space.— *Astr. Acta*, 1960, v. 6, № 5.
6. Riddell J. Initial azimuth and times for ballistic lunar impact trajectories.— *ARS J.*, 1960, v. 30, № 5.

1961 г.

1. Турский В. С. К вопросу о траекториях столкновения и захвата в задаче трех точек.— *Сообщение ГАИШ*, № 114, 1961.

2. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии.— М.: Физматгиз, 1961.
3. Michael W. H., Grenham J. W. Trajectory considerations for circumlunar missions.— IAS Paper, № 61-35, 1961.
4. Nelson W. C. An integrated approach to the determination and selection of lunar trajectories.— AAS, 1961, v. 9.
5. Huss C. R., Hammer H. A., Mayer I. P. Parameter study of insertion conditions for lunar missions, including varying trajectory considerations.— NASA TR, № R-122, 1961.

1962 г.

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1, 2.— М.: Физматгиз, 1962.
2. Tross C. Lunar vehicle orbit determination.— ARS J., 1962, v. 32, № 4.
3. Petersen N. V. Orbital assembly and launch for lunar operations.— Aerospace engineering, 1962, v. 21, № 8, p. 41.
4. Hiller H. A generalized study of two-dimensional trajectories in Earth—Moon space.— Astr. Acta, 1962, v. 8, F2—3.
5. Ehrlicke K. A.— Space flight, v. 2, 1962.
6. Snider, Taylor. An analysis of lunar injection parameters and their effects upon the characteristics of entry into the Earth's atmosphere.— ARS Preprint, 62-26, 1962.
7. Kelley Th. J., Adornato R. J. Determination abort way stations on a nominal circumlunar trajectories.— ARS J., 1962, v. 32, № 6.

1963 г.

1. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 1.— Киев: Изд. АН УССР, 1963.
2. Niman A. JBIS, 1963, v. 19, № 1.
3. Skidmore L. I., Penzo P. A. AIAA J., 1963, № 4.
4. Lagerström P. A., Kevorkian J. Earth-to-Moon trajectories in the restricted three-body problem.— J. de Mecanique, 1963, v. 11, № 2.
5. Lagerström P. A., Kevorkian J. Earth-to-Moon trajectories with minimum energy.— J. de Mecanique, 1963, v. 11, № 4.
6. Lagerström P. A., Kevorkian J. Some numerical aspects of Earth-to-Moon trajectories in the restricted three-body problem.— AIAA Paper, № 63-389, 1963.
7. Mickelwait A. B. Lunar and interplanetary trajectories.— Guidance and control of aerospace vehicles, 1963.
8. Mickelwait A. B. Lunar missions: launch to rendezvous.— Technology of lunar exploration. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1963, v. 10.
9. Gilruth R. R., Feget M. A. The Manned lunar mission.— Technology of Lunar Exploration. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1963, v. 10.
10. Hiller H. Entry into elliptic orbits round the Moon.— Planetary and Space Sci., 1963, v. 11, Febr.
11. Hoelker R. F., Brand N. J. Survey and classification of Earth—Moon trajectories based on newly discovered properties.— AIAA Paper, № 63-150, 1963.

12. Dallas S. Moon-to-Earth trajectories.— AIAA Preprint, № 402, 1963.
13. Gapevsky J. P., Tolson R. H. Trajectory considerations for the return to Earth phase of lunar exploration.— Technology of Lunar Exploration. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1963, v. 10.
14. Magness T. A., Pace W. H., Penzo P. A., Steiner P., Tompkins E. H. Trajectory and guidance considerations for lunar return missions.— Technology of Lunar Exploration. Progress in Astronautics and Aeronautics, 1963, v. 10.
15. Bartos G., Greenberg A. B. Abort problems of the lunar landing mission technology of lunar exploration.— Technology of Lunar Exploration. Progress in Astron. and Aeron., 1963, v. 10.
16. Kelley Th. J., Adornato R. J., Speiser K. H. Abort considerations for manned lunar missions.— Technology of lunar Exploration. Progress in Astron. and Aeron., 1963, v. 10.
17. Green B. S., Levin N. A gradient method for obtaining circumlunar trajectories.— AIAA Paper, № 63-401, 1963.
18. Penzo P. A. An Analysis of free-flight circumlunar trajectories.— AIAA Paper, № 63-404, 1963.
19. Johnson F. Free return circumlunar trajectories from launch windows with fixed launch azimuths.— AIAA Paper, № 63-406, 1963.
20. Caldwell D. M. Geometric constraints on trajectories.— AAS, 1963, v. 16 part 1.
21. Hall B. A., Dietrich R. G., Tiernan K. E. Landing guidance techniques.— AIAA Paper, № 63-345, 1963.
22. Pfeffer J. Terminal guidance for soft lunar landing.— Guidance and control of Aerospace Vehicles, 1963.

1964 г.

1. Ильин В. А. К расчету траекторий перелета космических аппаратов между компланарными крутовыми орбитами в ньютоновском гравитационном поле.— КИ, 1964, т. 2, в. 5.
2. Лидов М. Л., Охотимский Д. Е., Тесленко Н. А. Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел.— КИ, 1964, т. 2, в. 6.
3. Lunar Flight Handbook.— Space Flight Handbooks, 1964, v. 2, NASA, sp-35.
4. Hoelker R. F., Brand N. J. Mapping the course for the Moon trip.— ASA, 1964, v. 2, № 2.
5. Szebehely V. G. A group of Earth-to-Moon trajectories with consecutive collision.— Celestial Mechanics and Astrodynamics, Academic Press, 1964.
6. Gwinn J. M. Lunar ascent with plane change.— AIAA Paper, № 64-400, 1964.
7. Кислик М. Д. Сферы влияния больших планет и Луны.— КИ, 1964, т. 2, № 6.

1965 г.

1. Дашков А. А., Ивашкин В. В.— КИ, 1965, т. 3, в. 5.

2. Егоров В. А. Пространственная задача достижения Луны.— М.: Наука, 1965.
3. Эльясберг П. Е. Основы теории полета искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1965.
4. Шванигер А. Исследование траекторий свободного облета Луны.— Сборник обзоров и переводов иностранной периодической литературы «Механика», 1965, № 5 (93).
5. Власова З. П., Егоров В. А., Казакова Р. К., Платонов А. К. Некоторые алгоритмы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— Доклад на Всесоюзной конференции по вычислительной математике, МГУ, 1965.
6. Breshears R. R. Spacecraft propulsion requirements for lunar missions.— JSR, 1965, v. 2, № 1.
7. Nayth A. H. A comparison of three perturbation methods for Earth—Moon space ship problem.— AIAA J., 1965, v. 3, № 9.
8. Pierce D. A., Standish E. Numerical aspects of the family of Earth-to-Moon trajectories with consecutive collisions.— AIAA Paper, N 65-86, 1965.

## 1966 г.

1. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Балластика управляемых ракет дальнего действия.— М.: Наука, 1966.
2. Ивашкин В. В.— КИ, 1966, т. 4, в. 6.
3. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 2.— Киев: Изд. АН УССР, 1966.
4. Эннеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления.— КИ, 1966, т. 4, в. 5.
5. Бэттин Р. (Battin R. H.) Наведение в космосе.— М.: Машиностроение, 1966.
6. Lagerström P. A., Kevorkian J. Nonplanar Earth-to-Moon trajectories in the restricted three-body problem.— AIAA J., v. 4, № 1.
7. Rosenbaum R., Willwerth R. E., Wang Cheng. Powered flight trajectory optimization for lunar and interplanetary transfer.— Astr. Acta, 1966, v. 12, № 12.
8. Gunter P. Asymptotically optimum two-impulse transfer from lunar orbit.— AIAA J., 1966, v. 4, № 2.
9. Webb E. D. Three-impulse transfer from lunar orbits.— AAS Paper, № 66-134, 1966.

## 1967 г.

1. Егоров В. А. О траекториях возвращения от Луны к Земле.— КИ, 1967, т. 5, в. 4.
2. Ивашкин В. В. Кандидатская диссертация.— М., 1967.
3. Ильин В. А. Синтез траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли.— ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, в. 2.
4. Яров-Яровой М. С.— М.: Изд-во МГУ, Труды ГАИШ, 1967.
5. Алешин В. И., Бажинов И. К., Мельбард В. А. Исследование траекторий полета к Луне и возвращения на Землю.— КИ, 1967, т. 5, в. 6.
6. Szebehely V. G., Pierce D. A. Advantage of regularization in space dynamics.— AIAA J., 1967, v. 5, № 8.

## 1968 г.

1. Охочимский Д. Е. Динамика космических полетов.— М.: Изд-во МГУ, 1968.
2. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.
3. Ильин В. А. Некоторые вопросы исследования траекторий облета Луны с возвращением космического аппарата в атмосферу Земли.— Труды II чтений им. К. Э. Циолковского, М., 1968.
4. Вожаев В. С. Приближенное решение задачи об оптимальных перелетах Луна — Земля при старте с орбиты искусственного спутника Луны.— Труды II чтений им. К. Э. Циолковского, М., 1968.
5. Müller H., Tolle H.— Luftfahrttechnik, 1968, Bd. 14, № 5.
6. Lancaster J. E., Kevorkian J. Nonplanar Moon — Earth trajectories.— AIAA J., 1968, v. 6, № 10.
7. Miner W. E., Andrews J. F. Necessary conditions for optimal lunar trajectories with discontinuous state variables and intermediate point conditions.— AIAA J., 1968, v. 6, № 11.

## 1969 г.

1. Егоров В. А. О влиянии разброса начальных данных на траектории возвращения от Луны к Земле.— КИ, 1969, т. 7, в. 1.
2. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на фортране.— М.: Мир, 1969.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе В. Г., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1969.
4. Гобец Ф. У., Долл Дж. Ф. Исследование импульсных траекторий.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 5.
5. Исаев В. К., Давидсон Б. К. Оптимальная посадка космического аппарата на поверхность Луны.— КИ, 1969, т. 7, в. 3.
6. Исаев В. К., Давидсон Б. К. Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны.— КИ, 1969, т. 7, в. 3.
7. Lancaster J. E., Walker J. C., Mann F. J. Rapid analysis of Moon-to-Earth trajectories.— AIAA J., 1969, v. 7, № 6.
8. Kevorkian J., Brachet G. Numerical Analysis of the asymptotic solution for Earth-to-Moon trajectories.— AIAA J., 1969, v. 7, № 5.

## 1970 г.

1. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Ярошевский В. А. Маневрирование космических аппаратов.— М.: Машиностроение, 1970.
2. Демешкина В. В., Ильин В. А. Исследование траекторий космического аппарата, стартующего с поверхности Луны и возвращающегося в атмосферу Земли.— УЗЦ, 1970, т. 1, № 3.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1970.
4. Егоров В. А. Некоторые вопросы оптимизации траекторий зондирования межпланетного пространства.— А и Т, 1970, т. 5.



5. Ильин В. А., Демешкина В. В., Истомин Н. А. Исследование траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли.— КИ, 1970, т. 8, в. 1.
6. Ильин В. А., Истомин Н. А. Приближенный синтез оптимальных траекторий Земля—Луна с выходом на орбиту искусственного спутника Луны.— УЗЦ, 1970, т. 1, № 1.
7. Руппе Г. (Ruppe G. O.) Введение в астронавтику. Т. 1.— М.: Наука, 1970.
8. Bynnes D. V., Hooper H. L. AIAA Paper, № 70-1062, 1970.
9. Cook T. E., Hooper H. L. TRW Letter, № 70-5521, 1970.
10. Penzo P. A. AIAA Paper, № 70-70, 1970.
11. Lancaster J. E. Numerical analysis of the asymptotic two-point boundary value solution for Moon-to-Earth trajectories.— AIAA Paper, № 70-1060, 1970.
12. Johns R. A., Alexander J. D. Apollo lunar rendezvous.— JSR, 1970, v. 7, № 9.

## 1971 г.

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.— М.: Наука, 1971.
2. Ивашкин В. В., Скороходов А. П. Оптимальный пространственный одноимпульсный переход с гиперболической орбиты на круговую.— КИ, 1971, т. 9, в. 4.
3. Ивашкин В. В., Тупицын Н. Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли.— КИ, 1971, т. 9, в. 2.
4. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1971.
5. Эскобал П. (Escobal P. R.) Методы астродинамики.— М.: Мир, 1971.

## 1972 г.

1. Егоров В. А. Оптимизация одноимпульсного перехода с эллиптической орбиты на гиперболическую с заданной скоростью «на бесконечности». — КИ, 1972, т. 10, в. 5.
2. Основы теории полета космических аппаратов/Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова.— М.: Машиностроение, 1972.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
4. Карпов И. И., Платонов А. К. Ускорение численного интегрирования уравнений движения в небесной механике.— КИ, 1972, т. 10, в. 6.

## 1973 г.

1. Авербух А. И., Волохов Ю. Д., Королева Л. С. Методика прицеливания с Луны на Землю.— КИ, 1973, т. 11, в. 3.
2. Егоров В. А., Золотухина Н. И., Тесленко Н. А. Выбор траекторий возвращения к Земле с орбиты искусственного спутника Луны.— КИ, 1973, т. 11, в. 3.
3. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления.— М.: Наука, 1973.

4. Ильин В. А. Приближенное решение задачи синтеза траекторий близкого облета Луны с возвращением в атмосферу Земли.— Труды конференции по общим вопросам небесной механики и аэродинамики.— М.: Наука, 1973.
5. Авербух А. И., Гиршович Б. В. Приближенное определение геометрических характеристик траекторий Луна — Земля.— КИ, 1973, т. 11, в. 5.

1974 г.

1. Гусев Л. И. Метод определения характеристических скоростей при перелетах космического аппарата с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ и обратно.— КИ, 1974, т. 12, в. 5.
2. Гусев Л. И. Исследование формирования траекторий на сфере действия Луны.— Доклад на IX чтениях им. К. Э. Циолковского, 1974.
3. Лидов М. Л., Лукьянов С. С., Тесленко Н. А. Препринт № 116, изд. ИПМ АН СССР, 1974.
4. Никулин А. М., Кулакова Р. Д., Данилов А. Т. Доклад на IX чтениях им. К. Э. Циолковского, 1974.

1975 г.

1. Гурман В. И., Гусев Л. И. Оценка оптимальности одного класса траекторий перелета между орбитами ИСЗ и ИСЛ.— КИ, 1975, т. 13, в. 6.
2. Гусев Л. И. Оптимизация перелета с орбит ИСЗ на орбиты ИСЛ и обратно в случае фиксированной плоскости орбит ИСЛ.— УЗЦ, 1975, т. 6, № 6.
3. Гусев Л. И., Никулин А. М. Об одном методе расчета траекторий облета Луны.— Доклад на X чтениях им. К. Э. Циолковского, 1975.
4. Ивашкин В. В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет.— М.: Наука, 1975.
5. Кротов В. Ф. Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем.— ТК, 1975, №№ 5, 6.

1976 г.

1. Ильин В. А., Кузман Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги.— М.: Наука, 1976.
2. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел.— М.: Наука, 1976.

1979 г.

1. Гусев Л. И. Решение одной вариационной задачи перелета КА между спутниковыми орбитами Земли и Луны.— КИ, 1979, т. 17, в. 2.

1980 г.

1. Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении.— 3-е изд.— М.: Наука, 1980.

## УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

- Абалакин В. К. [1—1971] 43, 50, 537  
 Авербух А. И. [1, 5—1973] 31, 537  
 Аксенов Е. П. [1—1971] 43, 50, 537  
 Александер (Alexander J. D.) [12—1970] 26, 537  
 Алексеев К. Б. [1—1970] 13, 335, 536  
 Алешин В. И. [5—1967] 33, 535  
 Алмар (Almar I.) [8—1959] 28, 532  
 Аппазов Р. Ф. [1—1966] 289, 535  
 Бажинов И. К. [5—1967] 33, 535  
 Балаш (Balasz B.) [8—1959] 28, 532  
 Бартос (Bartos G.) [15—1963] 27, 534  
 Батон (Button R. C.) [5—1959] 27, 28, 532  
 Бебенин Г. Г. [1—1970] 13, 335, 536  
 Белецкий В. В. [2—1976] 27, 538  
 Бергюис (Berghuis J.) [4—1960] 28, 532  
 Березин И. С. [1—1962] 59, 533  
 Бирис (Burgess D. V.) [8—1970] 56, 537  
 Болтянский В. Г. [3—1969] 25, 536  
 Брейчет (Brachet G.) [8—1969] 29, 536  
 Брешерс (Breathers R. R.) [6—1965] 27, 29, 535  
 Бранд (Brand N. J.) [11—1963, 4—1964] 29, 533, 534  
 Буххейм (Buchhelm R. W.) [2—1956] 20, 27, 531  
 Бэттин Р. (Battin R. H.) [3—1959, 5—1966] 13, 20, 27, 532, 535  
 Власова З. П. [5—1965] 519, 535  
 Вожаков В. С. [4—1968] 350, 536  
 Волохов Ю. Д. [1—1973] 31, 535  
 Гамкрелидзе В. Г. [3—1969] 25, 536  
 Ганкел (Gunkel R. J.) [2—1958] 27, 532  
 Гантер (Gunter P.) [8—1966] 26, 532  
 Гапсунски (Gapsunsky J. P.) [13—1963] 30, 531  
 Гвинн (Gwinn J. M.) [6—1964] 26, 534  
 Гришнович Б. В. [5—1973] 31, 538  
 Гобец Ф. У. [4—1969] 34, 536  
 Голд (Gold L.) [1—1958] 27, 532  
 Голдбаум (Goldbaum G. C.) [2—1958] 27, 532  
 Гоман (Hohmann W.) [1—1925] 162, 531  
 Гребеников В. А. [1—1971] 43, 50, 537  
 Грёбнер (Gröbner W.) [9—1957] 27, 532  
 Гренгем (Grenham J. W.) [3—1961] 26, 28, 32, 533  
 Грин (Green B. S.) [17—1963] 33, 534  
 Гринберг (Greenberg A. B.) [15—1963] 27, 534  
 Гурман В. И. [3—1973, 1—1975] 14, 25, 29, 30, 537  
 Гусев Л. И. [1, 2—1974, 1, 2, 3—1975, 1—1979] 14, 23, 25, 29—31, 34, 319, 493, 538  
 Давидсон Б. К. [5, 6—1969] 26, 535  
 Даллас (Dallas S.) [12—1963] 30, 534  
 Данилов А. Т. [4—1974] 395, 538  
 Дашков А. А. [1—1965] 327, 534  
 Демешкина В. В. [2, 5—1970] 20, 30, 33, 469, 536  
 Дежидович В. П. [3—1970] 59, 536  
 Джилрут (Giltruth R. B.) [9—1963] 26, 533  
 Джонс (Johns R. A.) [12—1970] 26, 537  
 Джонсон (Johnson F.) [19—1963] 33, 534  
 Дитрих (Dietrich B. G.) [21—1963] 26, 534  
 Долл Дж. Ф. [4—1969] 34, 536  
 Дори У. [2—1969] 51, 536  
 Егоров В. А. [1, 2—1957, 1—1959, 2, 5—1965, 1—1967, 1—1969, 4—1970, 1—1972, 2—1973] 13—21, 25, 26, 29—32, 42, 61, 74, 89, 95, 96, 105, 116, 118, 121, 175, 274, 278, 350, 407, 468, 519, 531, 532, 535—537  
 Жидков Н. П. [1—1962] 59, 533  
 Золотухина Н. И. [2—1973] 31, 537  
 Ивашкин В. В. [1—1965, 2—1966, 2—1967, 2, 3—1970, 2, 3—1971, 4—1975] 25, 26, 34, 302, 321

- 329, 326, 327, 350, 494, 496, 498, 533—535, 537, 538  
 Ильин В. А. [1—1964, 3—1967, 3—1968, 2, 5, 6—1970, 4—1973, 1—1976] 13, 20, 25, 27, 29, 30, 33, 34, 105, 350, 469, 534, 535, 536, 538  
 Исаев В. К. [5, 6—1969] 26, 536  
 Истомин Н. А. [5, 6—1970] 20, 29, 30, 33, 350, 469, 537  
 Каакова Р. К. [5—1965] 519, 535  
 Карпов И. И. [4—1972] 519, 537  
 Кеворкян (Kevorkian J.) [4, 5, 6—1963, 6—1966, 6—1968, 8—1969] 21, 23, 24, 29, 30, 533, 535, 536  
 Келли (Kelley Th. J.) [7—1962, 16—1963] 27, 32, 533, 534  
 Кислик М. Д. [7—1964] 524  
 Кола (Cola D. U.) [5—1958] 32, 531  
 Колдуэлл (Caldwell D. M.) [20—1963] 33, 534  
 Коой (Kooj I. M.) [4—1960] 28, 532  
 Королева Л. С. [1—1973] 31, 537  
 Коул Дж. [3—1972] 24, 537  
 Кротов В. Ф. [3—1973, 5—1975] 30, 537  
 Куаман Г. Е. [1—1976] 13, 20, 25, 27, 33, 34, 105, 538  
 Кук (Cook T. E.) [9—1970] 53, 56, 537  
 Кулакова Р. Д. [4—1974] 39, 538  
 Куликовский П. Г. [2—1961] 35, 176, 177, 533  
 Кап (Cap F.) [9—1957] 27, 532  
 Лапков С. С. [1—1966] 289, 535  
 Лагерстрём (Lagerström P. A.) [4, 5, 6—1963, 6—1966] 21, 23, 24, 29, 30, 533, 535  
 Ланкастер (Lancaster J. E.) [6—1968, 7—1969, 11—1970] 24, 30, 536, 537  
 Лаплас П. (Laplace P. S.) [1—1805] 17, 48, 530  
 Левантовский В. И. [3—1960, 1—1980] 13, 26, 27, 492, 532, 538  
 Левин (Levin N.) [17—1963] 33, 534  
 Лидов М. Л. [2—1964, 3—1974] 33, 40, 293, 437—440, 442, 444—447, 450, 534, 538  
 Лиске (Lieske H. A.) [3—1958] 27, 532  
 Лисовская М. С. [1—1957] 32, 162, 163, 531  
 Лоуден (Lawden D. F.) [1, 2—1954, 4—1955] 20, 121, 531  
 Лукьянов С. С. [3—1974] 40, 538  
 Магнес (Magness T. A.) [14—1963] 30, 534  
 Майкл (Michael W. H.) [3—1961] 26, 28, 32, 533  
 Майкелвейт (Mickelwait A. B.) [2, 5—1959, 7, 8—1963] 26, 27, 28, 532, 534  
 Майнер (Miner W. E.) [7—1968] 26, 29, 536  
 Мак-Кракен Д. [2—1969] 51, 536  
 Малкин И. Г. [1—1956] 24, 531  
 Мани (Mann F. J.) [7—1969] 24, 30, 536  
 Марон И. А. [3—1970] 59, 536  
 Мейер (Mayer I. P.) [5—1961] 26, 533  
 Мёкель (Moeschel W. F.) [6—1959] 20, 532  
 Мельбард В. А. [5—1967] 33, 535  
 Миеде (Miele A.) [5—1960] 150, 304, 312, 341, 344, 532  
 Михайлов А. А. [1—1933] 43, 531  
 Мишин В. П. [1—1966] 289, 535  
 Мищенко Е. Ф. [3—1969] 25, 536  
 Моисеев Н. Н. [4—1971] 25, 537  
 Мултон Ф. Р. [1—1937] 76, 531  
 Мюир (Muir H.) [5—1958] 32, 532  
 Мюллер (Müller H.) [5—1968] 536  
 Найман (Niman A.) [2—1962] 27, 533  
 Нейс (Nayth A. H.) [7—1965] 29, 535  
 Нелсон (Nelson W. C.) [4—1961] 28, 533  
 Никулин А. М. [4—1974, 3—1975] 34, 395, 538  
 Охотинский Д. Е. [3, 4—1957, 2—1964, 1—1968] 33, 52, 70, 78, 287, 293, 398, 437—440, 442, 444—449, 450, 459, 532, 534, 536  
 Пейс (Pace W. H.) [14—1963] 30, 534  
 Пензо (Penzo P. A.) [3, 14, 18—1963, 10—1970] 29, 30, 33, 533, 534, 537  
 Петерсен (Petersen N. V.) [3—1962] 26, 534  
 Пирс (Pierce D. A.) [8—1965, 6—1967] 29, 535, 536  
 Платонов А. К. [5—1965, 4—1972] 519, 535, 537  
 Понтиягин Л. С. [3—1969] 25, 536  
 Поспергелис М. М. [1—1960] 28, 532  
 Пфеффер (Pfeffer J.) [22—1963] 26, 534  
 Ридел (Riddell J.) [6—1960] 28, 532  
 Розенбаум (Rosenbaum R.) [7—1966] 29, 535  
 Руппе Г. (Ruppe G. O.) [7—1970] 27, 537  
 Рябов Ю. А. [1—1971] 43, 50, 537  
 Себехей В. (Szebehely V. G.) [5—1964, 6—1967] 29, 534, 535  
 Седов Л. Н. [2—1960] 14, 532  
 Скидмор (Skidmore L. I.) [3—1963] 29, 533  
 Скороходов А. П. [2—1971] 26, 350, 537  
 Снайдер (Snider) [6—1962] 30, 533  
 Спейсер (Speiser K. H.) [16—1963] 27, 534

- Стейнер (Steiner P.) [14—1963] 30, 534  
 Стендиш (Standish E.) [8—1965] 29, 535  
 Стрёмгрен (Strömberg E.) [1—1936] 65, 531  
 Субботин М. Ф. [2—1933, 2—1937, 2—1968] 17, 44, 49, 61, 77, 79, 82, 106, 130, 531, 536  
 Таратынова Г. П. [3, 7—1957] 78, 275, 531  
 Тейлор (Taylor) [6—1962] 30, 533  
 Тесленко Н. А. [2—1964, 2—1973, 3—1974] 31, 33, 40, 293, 437—440, 442, 444—447, 450, 534, 537  
 Тириен (Tiernan K. E.) [21—1963] 26, 534  
 Тиссеран (Tisserand F.) [1—1896] 16, 530  
 Толле (Tolle H.) [5—1968] 536  
 Толсон (Tolson R. H.) [13—1963] 30, 534  
 Томпкинс (Tompkins E. H.) [14—1963] 30, 534  
 Тросс (Tross C.) [2—1962] 28, 533  
 Туницын Н. Н. [3—1971] 26, 34, 425, 494, 496, 498, 537  
 Турский В. С. [1—1961] 74, 532  
 Тюринг (Thüring B.) [9—1959] 32, 532  
 Уилверс (Willwerth R. E.) [7—1966] 29, 535  
 Уолкер (Walker J. C.) [7—1969] 24, 30, 536  
 Уолтерс (Walters L. G.) [4—1958] 27, 28, 532  
 Уэбб (Webb E. D.) [9—1966] 26, 535  
 Фегет (Feget M. A.) [9—1963] 26, 533  
 Фесениов В. Г. [1—1946] 16, 82, 532  
 Хаммер (Hämmer H. A.) [5—1961] 26, 533  
 Хейкер (Hoelker R. F.) [11—1963, 4—1964] 29, 533, 534  
 Хилл (Hill G. W.) [1—1877] 16, 61, 530  
 Хиллер (Hiller H. A.) [4—1962, 10—1963] 27, 29, 533  
 Холл (Hall B. A.) [21—1963] 26, 534  
 Хопф (Hopf E.) [1—1930] 16, 74, 531  
 Хупер (Hooper H. L.) [8, 9—1970] 53, 56, 537  
 Хьюз (Huss C. R.) [5—1961] 26, 533  
 Цюлковский К. Э. [1—1913] 162, 527  
 Чеботарев Г. А. [5—1957] 32, 162, 163, 529  
 Чень (Cheng Wang) [7—1966] 29, 531  
 Чепмен (Chapman D. R.) [4—1959] 171, 335, 532  
 Шаманский В. Е. [1—1963, 3—1966] 58, 533, 335  
 Шванигер А. [4—1965] 33, 535  
 Эйдорнато (Adornato R. J.) [7—1962, 16—1963] 27, 32, 533, 534  
 Эльясберг П. Е. [3—1965] 43, 45, 535  
 Эндрюс (Andrews J. F.) [7—1968] 26, 29, 536  
 Энеев Т. М. [3, 4—1957, 4—1966] 58, 78, 287, 398, 531, 535  
 Эрике К. (Ehricke K. A.) [8—1957, 7—1959, 5—1962] 26, 27, 531, 533  
 Эскобал П. (Escobal P. R.) [5—1971] 13, 27, 537  
 Яров-Яровой М. С. [4—1967] 24, 25, 535  
 Ярошевский В. А. [1—1970] 13, 335, 536

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоматизация выбора шага интегрирования 50, 519  
 Видимость точки встречи с Луной 41, 234  
 Влияние Луны на траекторию попадания 71, 269  
 — разброса начальных данных на Луне 259  
 — — — на СД 253  
 Возвращение от Луны к Земле см. Траектория возвращения  
 Возмущения от сжатия Земли 52, 43  
 — от Солнца 42  
 — — — движения Луны 43  
 Вращение Земли, учет его 219, 225, 227, 230, 234, 293, 483  
 Время ожидания на орбите ИСЛ для возвращения 349  
 — полета в СД Луны 104  
 — — до Луны 95, 234 и д.  
 — — —, влияние Луны на него 270  
 Гомана траектория 37, 89  
 Дальность прицельная 430  
 — угловая 70  
 Данные начальные номинальные 35  
 — — отклоненные 248  
 Движение относительно поверхности Земли (Луны) 524  
 Достижение Луны 15, 36, 68 и д., 154 и д.

Достижения Луны в заданной точке поверхности 297 и д.

- — с больших широт 178
- Задача Копи 49, 518
- краевая 57 и д., 480 и д.
- — — возвращения 368, 388 и д.
- — — нецентральная 391
- — — предварительная 386
- — — центральная 391
- — — облета Луны с возвращением к Земле 480
- — — попадания в Луну 57
- — — плоская 154 и д.
- — — пространственная 175 и д.
- — — трех точек ограниченная 47
- — — — круговая 47
- Запуск с орбиты ИСЗ 38
- — — ИСЛ 381
- Захват 16—17, 73 и д.

- Изолинии 121 и д., 437
- Интеграл Якоби 16, 61
- Интегрирование численное см. Метод численного интегрирования
- — — по методу многих конических сечений 53 и д.
- Интервал временной межстартовый 199
- — — поражаемый 179
- — — стартовый 186

Коррекция 401  
Критерий сопряженности см. Сопряжение движений

Ламберта задача 114  
Линии постоянства 121 и д., 437

- Метод асимптотических разложений 23
- — — долготной привязки 23, 230, 293, 372, 385, 484
- — — игнорирования возмущений 17, 87, 240 и д., 336, 437 и д., 485
- — — многих конических сечений 53 и д.
- — — Ньютона итерационный решения краевой задачи 59, 391
- — — полиноминой аппроксимации 24
- — — скоростных многообразий 22, 111 и д., 335, 354, 425 и д., 461 и д., 487 и д., 517
- — — сферы влияния 20, 21
- — — — модифицированный 20, 21
- — — точечной сферы действия 19, 20, 49, 106 и д., 335, 426, 437 и д., 452, 490, 517
- — — численного интегрирования 23, 25, 518
- — — — Адамса 49
- — — Коуэлла 49
- — — Рунге — Кутты 49, 518
- — — Штармера 49
- Методом итерационные решения краевых задач 59
- — — теории возмущений 23—25
- Минимизация характеристической скорости 25, 211, 360, 362

Многообразие скоростное 22, 93, 102, 106, 338 и д., 354, 448 и д., 496

Несферичность Земли см. Сжатие Земли  
Ньютона метод 391

- Облет Луны 15, 39 (см. также Траектории облета Луны)
- — — с возвращением 162
- — — — за заданное время 472 и д.
- — — — пологим 169, 481
- Ограничения технические 41
- Орбита Луны 35
- — — стационарная ИСЗ, — — — получение путем облета Луны 425
- Орбиты после облета Луны допустимые 499
- Освещенность места посадки на Луне 41
- Отклонения начальных данных см. Разброс начальных данных
- Ошибки начальные см. Разброс начальных данных
- — — инструментальные (приборные) 401
- — — методические 401

Перегрузки при спуске в атмосфере Земли 335

Перелет между двумя точками в центральном поле 111 и д.  
— — — между орбитами ИСЗ и ИСЛ 301  
Переход от декартовых координат к кеплеровым элементам орбиты 520

- — — от кеплеровых элементов орбиты к декартовым координатам 519
- — — с эллиптической орбиты на гиперболу 350—367

Перигей условный (фиктивный) 41, 335, 392

Плоскость картинная 293  
— — — селеноцентрического движения 97

Подход энергетический 61 и д.  
Полуэллипс Гомена 37, 89

Попадание в заданную точку лунной поверхности 297 и д.

— — — в Луну см. Достижение Луны  
Посадка на Луну 320 и д.

— — — — вертикальная 321

— — — — невертикальная 326

— — — — с орбиты ИСЛ 329

Потенциал гравитационного поля 43, 46

Преобразование Тиле 65  
Привязка долготная см. Метод долготной привязки

Программирование численного интегрирования 49

Продолжительность полета см. Время полета

Радиовидимость места посадки на Луне 41, 234

Радиус эффективный Луны 262  
Разброс начальных данных 248 и д., 401

- Разгон с Луны вертикальный 398  
 — — наклонный 398  
 — с помощью Луны 40, 171 и д., 486—494  
 Расстояние прицельное 99  
 Сжатие Земли, влияние на траекторию 42—44, 275 и д.  
 Система координат барицентрическая вращающаяся 48, 61  
 — — геоцентрическая экваториальная не вращающаяся 45  
 — — селеноцентрическая 46  
 — — транспортирующая 381  
 Скорости начальные критические 63  
 Скорость начальная минимальная 61 и д.  
 — параболическая местная 70  
 — характеристическая 204 и д.  
 — — перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ 308 и д.  
 Солнце, влияние на номинальную траекторию попадания 280 и д.  
 Сопряженные движения 129 и д.  
 — — методом ТСЦ 133  
 — — ИВ 137  
 — — точное 140  
 Спутник Земли стационарный, запуск путем облета Луны 494 и д.  
 — Луны искусственный 38 (см. также Захват)  
 Старт с больших широт 475 и д.  
 — с Луны см. Траектория возвращения с поверхности Луны  
 — — вертикальный 341, 397  
 — — горизонтальный 345  
 — — наклонный 346, 398  
 — с орбиты ИСЗ 38, 286 и д.  
 — — ИСЛ 346, 369  
 — — пространственный 347  
 Сфера влияния 524  
 — — выходных скоростей геоцентрических 105  
 — — селеноцентрических 103  
 — — действия 17, 47—  
 — — Луны 64  
 — — точечная 106 (см. также Метод точечной сферы действия)  
 — — притяжения 75  
 Схема полета северная (N) 175  
 — — южная (S) 175  
 Тип преобразование 65  
 Тиссерана необходимое условие сопряженности движений 130  
 Торможение с помощью Луны 174  
 Точка встречи с Луной при фиксированном угле начальной скорости с трансверсалью 230  
 — — падения на Луну, видимость 41, 234  
 — — —, влияние разброса начальных данных 259 и д.  
 — — предупрежденная 230  
 Точки либрации 63, 64  
 Точность начальных данных см. Разброс начальных данных  
 Траектория возвращения 15, 38, 334  
 — — восходящая 340  
 — — нисходящая 341  
 — — номинальная 335, 341  
 — — осевая 389  
 — — с орбиты ИСЛ 346, 368 и д.  
 — — — заданной 394  
 — — — отклоненная 414 и д.  
 — — с поверхности Луны 341, 343, 368 и д., 397  
 — — — отклоненная 404 и д.  
 — — гомановская 37, 89  
 — — достижения Луны 15, 36  
 — — навесная 89  
 — — настильная 89  
 — — с минимальной начальной скоростью 16  
 — — энергетически оптимальная 204 и д.  
 — — номинальная 35  
 — — облета Луны 15, 18, 421 и д.  
 — — —, плоская задача 452  
 — — — разгонная 424  
 — — с возвращением 421, 423, 460, 461 и д.  
 — — — за заданное время 472 и д.  
 — — —, точный расчет 476 и д.  
 — — полета к Луне с орбиты ИСЗ 286 и д.  
 — — с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ 301 и д.  
 — — посадки на Луну 320  
 — — оближения 17, 18  
 — — в ограниченной круговой задаче трех точек 86  
 — — северная 38, 203, 215 и д.  
 — — спуска на Луну см. Посадка на Луну  
 — — южная 38, 203, 221  
 Трасса на земной поверхности 421  
 Тяговооруженность 50, 322  
 Ускорение реактивное 45  
 Условие сопряженности точное 132  
 — Тиссерана сопряженности движений 130  
 Участок активный, учет протяженности 195  
 — — пассивный 70  
 Функция силовая гравитационного поля планет 43, 46  
 Хилла поверхность 62  
 Шаг интегрирования 50, 519  
 Эллиптичность орбиты Луны, влияние на номинальную траекторию попадания 273  
 Якоби интеграл 16, 61

*Всеволод Александрович Бгоров, Леонид Иванович Гусев*

Динамика перелетов между Землей и Луной

(Серия: «Механика космического полета»)

М., 1980 г., 544 стр. с илл.

Редактор *Э. П. Иванов*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *Е. Я. Строева*

ИБ № 11031

---

Сдано в набор 24.03.80. Подписано к печати 17.11.80. Т-17850. Бумага 84 × 108<sup>1/2</sup>, тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условия печ. л. 28,56. Уч.-изд. л. 27,92. Тираж 1800 экз. Заказ № 120. Цена книги 4 р. 50 к.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

4-я типография издательства «Наука»  
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25











# АМНАМИКА ПЕРВЫХ ДНЕЙ В ВОЙНУ И ВЫХОД